泸县五中高2021级高三上学期开学考试
理科数学参考答案

1．A　2．A　3．D　4．D　5．B　6．C　7．D　8．B　9．D　10．A　11．B　12．B

13．$x=-2$（答案不唯一）　14．110　15．$y=\frac{1}{2}$或$y=\frac{1}{2}x$或$x=1$　16．$\frac{14\pi}{3}$

17．解：（1）推荐的6名医生中任选3名去参加活动基本事件总数$n=\mathrm{C}_6^3=20$，

这6名医生中，外科医生2名，内科医生2名，眼科医生2名，

设事件A表示"选出的外科医生人数多于内科医生人数"，

A_1表示"恰好选出1名外科医生和2名眼科医生"，A_2表示"恰好选出2名外科医生"，

A_1，A_2互斥，且$A=A_1\cup A_2$，

$P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_6^3}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$，$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_6^3}=\frac{1}{5}$，

$\therefore$选出外科医生人数多于内科医生人数的概率为$P=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$；

（2）由于从6名医生中任选3名的结果为C_6^3，

从6名医生中任选3名，其中恰有m名外科医生的结果为$\mathrm{C}_2^m\mathrm{C}_4^{3-m}$，$m=0,1,2$，那么6名中任选3人，

恰有m名外科医生的概率为$P(X=m)=\frac{\mathrm{C}_2^m\mathrm{C}_4^{3-m}}{\mathrm{C}_6^3}$，

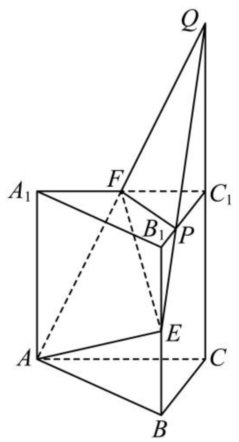
所以$P(X=0)=\frac{\mathrm{C}_2^0\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=1)=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_6^3}=\frac{1}{5}$，

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$　　$D(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{5}+(1-1)^2\times\frac{3}{5}+(2-1)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

18．解：（1）延长AF交CC_1延长线于点Q，连接QE交B_1C_1于点P，连接PF，则过A、E、F三点的截面就是平面四边形$AEPF$，因为F是A_1C_1中点，$C_1F\parallel AC$且$C_1F=\frac{1}{2}AC$，

所以C_1F是$\triangle QAC$的一条中位线，

所以$QC_1\parallel BE$且$BE=\frac{1}{2}QC_1$，所以$\frac{C_1P}{PB_1}=2$；



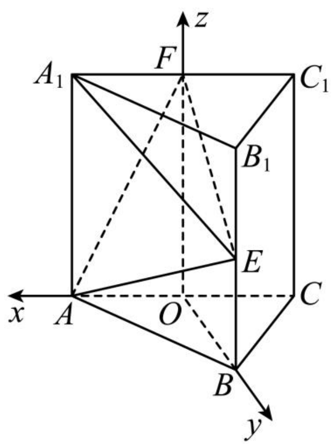
解法一：取AC中点O连接OB,OF，因为正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$,F为A_1C_1的中点，OF与三棱柱的侧棱平行，所以OA,OB,OF两两垂直，以O为原点，OA,OB,OF为x,y,z轴正方向建立空间直角坐标系，如图所示，

所以$A(1,0,0),E(0,\sqrt{3},1),F(0,0,2),A_1(1,0,2)$，

所以$\overrightarrow{A_1E}=\left(-1,\sqrt{3},-1\right),\overrightarrow{AE}=\left(-1,\sqrt{3},1\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(-1,0,2\right)$，

设平面 AEF 的法向量$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x+\sqrt{3}y+z=0\\ -x+2z=0\end{cases}$，

令$x=2$，则$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3},z=1$，所以$\vec{n}=\left(2,\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，



设A_1E与平面AEF所成角为θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A_1E},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{A_1E}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{A_1E}\right|\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\frac{-2+1-1}{\sqrt{4+\frac{1}{3}+1}\cdot\sqrt{1+3+1}}\right|=\frac{\sqrt{15}}{10},$$

A_1E与平面AEF所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{10}$；

解法二：设点A_1到平面AEF的距离为h，连接B_1F，

因为$A_1B_1=B_1C_1$，F是A_1C_1中点，所以$B_1F\perp A_1C_1$，

因为$AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1$，$B_1F\subset$平面$A_1B_1C_1$，所以$AA_1\perp B_1F$，

因为$A_1C_1\cap AA_1=A_1$，$A_1C_1,AA_1\subset$平面ACC_1A_1，所以$B_1F\perp$平面ACC_1A_1，

因为等边三角形$A_1B_1C_1$的边长为 2，所以$B_1F=\sqrt{3}$，

所以$EF=\sqrt{3+1}=2,AE=AF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

所以等腰三角形AEF的底边EF上的高为$\sqrt{5-1}=2$，

所以$\triangle AEF$的面积为$\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$，又$\triangle AA_1F$的面积为$\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$，

因为$\dfrac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\triangle AA_1F}\cdot B_1F$，所以$2h=\sqrt{3}$，得$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又$A_1E=\sqrt{5}$，

设A_1E与平面AEF所成角为θ，

则$\sin\theta=\dfrac{h}{AE}=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$，故$A_1E$平面$AEF$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

19 解：(1) 由图知：平均数为：$35\times0.05+45\times0.15+55\times0.2+65\times0.3+75\times0.2+85\times0.1=62.5$；

(2) 由题设$\mu=\overline{t}=62.5$，$\sigma=13.4$，则$35.7=62.5-2\times13.4=\mu-2\sigma$，$75.9=62.5+13.4=\mu+\sigma$，

$\therefore P(35.7<t\le75.9)=P(\mu-2\sigma<t\le\mu+\sigma)=\dfrac{0.9545+0.6827}{2}=0.8186$，

由题意知：$X\sim B(10,0.8186)$，则$E(X)=10\times0.8186\approx8.2$.

20．解：(1) 解法一：由$f\left(x\right)=a\mathrm{e}^x-x-a$，得$f\left(0\right)=0$，

又 $f(x)\geq 0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，

故 $f'(0)=0$，而 $f'(x)=ae^x-1, f'(0)=a-1=0$，故 $a=1$，若 $a=1$，则 $f'(x)=e^x-1$，

当 $x<0, f'(x)<0$；当 $x>0, f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 唯一的极小值点，也是最小值点，由 $f(0)=0$，所以当且仅当 $a=1$ 时 $f(x)\geq 0$，

解法二：由 $f(x)=ae^x-x-a$，得 $f(0)=0$，又 $f'(x)=ae^x-1$，

当 $a\leq 0$ 时，有 $f'(x)<0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，又 $f(0)=0$，则 $f(x)\geq 0$ 不成立，

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln\frac{1}{a}$，

则 $x>\ln\frac{1}{a}$ 时，有 $f'(x)>0, x<\ln\frac{1}{a}$ 时，有 $f'(x)<0$，

即 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 单调递减，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1+\ln a-a\geq 0$，$(1+\ln x-x)'=\frac{1-x}{x}$，

函数 $y=1+\ln x-x$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，$(0,1)$ 单调递增，

$f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1+\ln a-a\leq 0$，当且仅当 $a=1$ 取等号，故 $a=1$；

（2）当 $a\geq 1, x>0$ 时，$f(x)=ae^x-x-a=a\left(e^x-1\right)-x\geq e^x-1-x$，设 $g(x)=e^x-x-x\ln x+\sin x-1$，

当 $0<x\leq 1$ 时，$-x\ln x>0, \sin x>0$，

又由（1）知 $e^x-1-x>0$，故 $g(x)>0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)=e^x-2-\ln x+\cos x$，

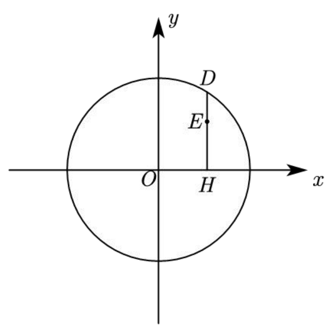
设 $h(x)=e^x-2-\ln x+\cos x$，则 $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}-\sin x, h'(x)>e-1-1>0$，

则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$h(x)>h(1)=e-2+\cos 1>0$，

所以 $g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$g(x)>g(1)=e-2+\sin 1>0$，

综上，$g(x)>0$，即当 $a\geq 1$ 时，$f(x)>x\ln x-\sin x$.

21．解：（1）由题意，设 $E(x,y), D(x_0,y_0)$，又 $\frac{|DH|}{|EH|}=\sqrt{2}$，则 $\begin{cases} x_0=x \\ y_0=\sqrt{2}y \end{cases}$



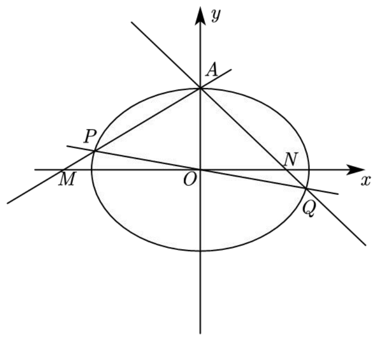
又因为点 D 在圆 $x^2+y^2=2$ 上，

所以 $x^2+2y^2=2$，故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

（2）

由题意，$A(0,1)$，设$M(a,0),N(b,0)$，则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=ab=-2$，

易得AP,AQ斜率必然存在，所以$k_{AP}\cdot k_{AQ}=k_{AM}\cdot k_{AN}=\dfrac{-1}{a}\cdot\dfrac{-1}{b}=-\dfrac{1}{2}$，



设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，由图象易知，直线PQ斜率不存在时不符合题意

设直线PQ的方程为$y=kx+n$，

联立曲线C的方程$\begin{cases}y=kx+n\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得$\left(2k^2+1\right)x^2+4knx+2n^2-2=0$，

$\Delta=\left(4kn\right)^2-4(2k^2+1)\left(2n^2-2\right)=16k^2-8n^2+8>0$ 得$n^2<2k^2+1$，

所以$x_1+x_2=\dfrac{-4kn}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{2n^2-2}{2k^2+1}$，由题意知，直线$AP,AQ$均不过原点，所以$x_1x_2\neq 0$，从而$n\neq\pm1$，

$$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{kx_1+n-1}{x_1}\cdot\frac{kx_2+n-1}{x_2}=\frac{k^2x_1x_2+k\left(n-1\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(n-1\right)^2}{x_1x_2}=k^2+\frac{k\left(n-1\right)\cdot\dfrac{-4kn}{2k^2+1}+\left(n-1\right)^2}{\dfrac{2n^2-2}{2k^2+1}}=\frac{n-1}{2(n+1)}=-\frac{1}{2},$$

解得$n=0$，满足$\Delta>0$，所以直线PQ的方程为$y=kx$，恒过定点$\left(0,0\right)$.

22．解：（1）由直线l的参数方程，得直线l的普通方程为$2x+3y-8=0$.

将$\rho^2=x^2+y^2,\rho\sin\theta=y$代入曲线$C$的极坐标方程，化简得曲线$C$的直角坐标方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）由（1），设点$P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$，

由题知$|PQ|$的最小值为点P到直线l的距离的最小值.

又点P到直线l的距离$d=\dfrac{|4\cos\alpha+3\sin\alpha-8|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{|5\sin(\alpha+\varphi)-8|}{\sqrt{13}}$，其中$\tan\varphi=\dfrac{4}{3}$.

当$\alpha+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$d$的最小值为$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore|PQ|$的最小值为$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

23．解：（1）当$x\le 2$时，$f(x)=-(x-3)-(x-2)=-2x+5<3$，解得$x>1$，所以$2\ge x>1$，成立.

当$2<x<3$时，$f(x)=-(x-3)+(x-2)=1<3$，恒成立，所以$2<x<3$成立.

当$x\ge 3$时，$f(x)=(x-3)+(x-2)=2x-5<3$，解得$x<4$，所以$3\le x<4$，成立

综上，原不等式的解集为$M=\left\{x\middle|1<x<4\right\}$

（2）$\left(a+b\right)^2-\left(1+ab\right)^2=\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)$

$\because a,b\in\left(1,4\right)$，$\therefore 1-b^2\left\langle 0,a^2-1\right\rangle 0$ $\therefore\left(a+b\right)^2<\left(1+ab\right)^2$，$\therefore\left|a+b\right|<\left|1+ab\right|$.