

高三数学考试参考答案(文科)

1. B 因为 $A = \{x | x \geq -3\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | -3 \leq x < 2\}$.
2. C 因为 $1 - i \cdot z = 1 - i(2 - i) = -2i$, 所以 $|1 - i \cdot z| = 2$.
3. D 因为 $f(x) = \sin(2x + \frac{3\pi}{10})$, 所以 $f(\frac{3\pi}{10}) = \sin(2 \times \frac{3\pi}{10} + \frac{3\pi}{10}) \neq \pm 1$, $f(\frac{\pi}{4}) = \sin(2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{10}) \neq 0$, A 错误, B 错误. 显然 $f(x)$ 的最小正周期为 π , C 错误. 将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 可得函数 $y = \sin(x + \frac{3\pi}{10})$ 的图象, D 正确.

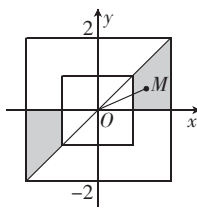
4. C 因为 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $DE \parallel AB$, $DE = \frac{1}{2}AB = 1$, $\angle ADE = \angle BAD = \frac{\pi}{6}$. 又 $AD = \sqrt{3}$, 所以 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = \sqrt{3} \times 1 \times \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$.

5. D 因为 $f(x) = 4x^2 + (a-4)x + |x|$ 是偶函数, 所以 $a-4=0$, 解得 $a=4$.

6. A 因为 $y' = -\frac{3}{(x-3)^2}$, 所以所求切线的斜率 $k = -\frac{3}{(2-3)^2} = -3$, 故该切线的方程为 $y = -3x + 4$.

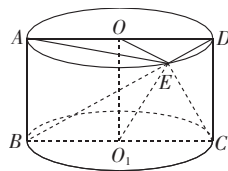
7. A 因为 $e_2 = \frac{3}{4}e_1$, 所以 $\sqrt{1 + \frac{b^2}{8}} = \frac{3}{4} \times \sqrt{1+1}$, 解得 $b=1$.

8. B 满足“直线 OM 的倾斜角不大于 $\frac{\pi}{4}$ ”这个条件的点 M 构成的区域为图中阴影部分, 根据几何概型的定义, 可知所求概率为 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.



9. A 因为 $b \cos C - c \cos B = a$, 所以 $\sin B \cos C - \cos B \sin C = \sin A$, 整理得 $\sin B \cos C - \cos B \cdot \sin C = \sin B \cos C + \cos B \sin C$, 所以 $\cos B \sin C = 0$. 因为 $\sin C > 0$, 所以 $\cos B = 0$. 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{2}$, 从而 $A + C = \frac{\pi}{2}$. 又 $A = 2C$, 所以 $C = \frac{\pi}{6}$.

10. B 四棱锥体积 $V_{E-ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot d$, 其中 d 为 E 到 AD 的距离, 因为正方形 $ABCD$ 的面积为定值, 所以当 E 为 \widehat{AD} 的中点时, 四棱锥的体积最大, 连接 OE, O_1E , 此时其侧面积 $S = \frac{1}{2}AD \cdot OE + \frac{1}{2}AB \cdot AE + \frac{1}{2}CD \cdot DE + \frac{1}{2}BC \cdot O_1E = 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

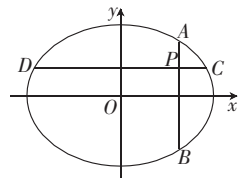


11. C 因为 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200[(80-m)(50-m) - (20+m)(50+m)]^2}{100 \times 100 \times 130 \times 70} = \frac{8(15-m)^2}{91} \geq 3.841$, 所以 $(15-m)^2 \geq 43.7$, 又 $5 \leq m \leq 15$, 所以 $15-m \geq 7$, 解得 $m \leq 8$,

故在被调查的 100 名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为 58.

12. D 设 $P(m, n)$, $|PA| = t$, 则 $A(m, n+t)$, $B(m, n-3t)$, $C(m+2t, n)$, $D(m-4t, n)$. 由题知

A, B 关于 x 轴对称, C, D 关于 y 轴对称, 所以 $n+t+n-3t=0, m+2t+m-4t=0$, 即 $n=t, m=t$, 所以 $A(t, 2t), C(3t, t)$. 因为 A, C 在椭圆 E 上,



$$\text{所以} \begin{cases} \frac{t^2}{8} + \frac{4t^2}{b^2} = 1, \\ \frac{9t^2}{8} + \frac{t^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \text{即} \frac{9}{8} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{8} + \frac{4}{b^2}, \text{解得} b = \sqrt{3}.$$

13. -4 画出可行域(图略)知, 当直线 $z=2x-y$ 过点 $(-3, -2)$ 时, z 取得最小值 -4.

14. 6; 17 执行程序框图,

$$n=1, S=0, S=-S+2^1=2, n=2, \text{满足 } 2 \leq P;$$

$$S=(-1)^2 S+2^2=6, n=3, \text{满足 } 6 \leq P;$$

$$S=(-1)^3 S+2^3=2, n=4, \text{满足 } 2 \leq P;$$

$$S=(-1)^4 S+2^4=18, n=5, \text{满足 } 18 > P.$$

所以 $6 \leq P \leq 17, P \in \mathbf{N}^*$, 所以正整数 P 的最小值和最大值分别为 6 和 17.

15. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 设这个黄金三角形的另一个底角为 B , 顶角为 A , 因为 $\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 所以 $\cos C =$

$$\frac{BC}{2AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{则 } \cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}.$$

16. $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 取 BC 的中点 D , 连接 AD, C_1D (图略), 易知 $\angle AC_1D$ 为直线 AC_1 与平面 BCC_1B_1

所成的角. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r , 边长为 a , 正三棱柱的高为 h , 则 $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a, AC_1 =$

$\sqrt{a^2+h^2}$, 所以 $\sin 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{a^2+h^2}}$, 即 $h^2 = 2a^2$. 又因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为

2 的球, 所以 $(\frac{\sqrt{3}a}{3})^2 + (\frac{h}{2})^2 = 2^2$, 所以 $\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{2} = 4$, 解得 $a = \frac{2\sqrt{30}}{5}$, 即 $AB = \frac{2\sqrt{30}}{5}$.

17. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{依题意得} \begin{cases} 2(a_1+4d) - (a_1+3d) = 11, \\ 3(a_1+d) = 9, \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\text{所以 } a_n = 2n - 1. \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$(2) \text{由(1)得 } S_n = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2, \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\text{所以 } b_n = \frac{1+a_n}{(n+1)S_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{所以 } T_n = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}. \dots\dots\dots 9 \text{分}$$



由 $\frac{99}{50} < \frac{2m}{m+1} < \frac{101}{51}$, 解得 $99 < m < 101$, 11分

因为 $m \in \mathbf{N}^*$, 所以 $m = 100$ 12分

18. 解: (1) 由已知可得 $a = \frac{300}{600} \times \frac{1}{10} = 0.05$, 1分

则 $(0.005 + 0.05 + b + c + 0.005) \times 10 = 1$, 即 $b + c = 0.04$,

又因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $2b = 0.05 + c$, 3分

解得 $b = 0.03, c = 0.01$ 4分

(2) 可知 $0.005 \times 10 = 0.05 < 0.5, (0.005 + 0.05) \times 10 = 0.55 > 0.5$,

设中位数为 x , 则 $x \in [60, 70)$, 由 $0.005 \times 10 + (x - 60) \times 0.05 = 0.5$, 解得 $x = 69$,

即中位数为 69, 6分

平均数为 $(55 \times 0.005 + 65 \times 0.05 + 75 \times 0.03 + 85 \times 0.01 + 95 \times 0.005) \times 10 = 71$ 8分

(3) 成绩位于区间 $[80, 90)$ 内的学生有 $0.01 \times 10 \times 600 = 60$ 人, 成绩位于区间 $[90, 100]$ 内的学生有 $0.005 \times 10 \times 600 = 30$ 人, 9分

通过分层抽样抽取的 6 人中成绩位于 $[80, 90)$ 的人数为 $6 \times \frac{60}{90} = 4$, 这 4 人分别记为 a, b, c, d ,

成绩位于 $[90, 100]$ 的人数为 $6 \times \frac{30}{90} = 2$, 这 2 人分别记为 E, F 10分

从上述 6 人中抽取 2 人的基本事件有 $ab, ac, ad, aE, aF, bc, bd, bE, bF, cd, cE, cF, dE, dF, EF$, 共 15 种, 11分

其中恰有 1 人的得分在区间 $[90, 100]$ 内的基本事件有 $aE, aF, bE, bF, cE, cF, dE, dF$, 共 8 种, 故所求概率 $P = \frac{8}{15}$ 12分

19. (1) 证明: 取 PA 的中点 G , 连接 FG, GE ,

因为 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

所以 $DE \parallel AB$, 且 $DE = \frac{1}{2}AB$ 1分

同理可证 $FG \parallel AB$, 且 $FG = \frac{1}{2}AB$ 2分

所以 $DE \parallel FG, DE = FG$, 四边形 $DEGF$ 为平行四边形,

所以 $DF \parallel EG$ 4分

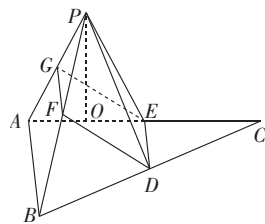
因为 $EG \subset$ 平面 $PAE, DF \not\subset$ 平面 PAE , 所以 $DF \parallel$ 平面 PAE 5分

(2) 解: 取 AE 的中点 O , 连接 PO , 因为 $PA = PE = AE$, 所以 $PO \perp AE$.

易知 $DE \perp EC, DE \perp PE$, 所以 $DE \perp$ 平面 PAE , 从而 $DE \perp PO$.

因为 $AE \cap DE = E$, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABDE$, 且 $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 7分

因为 $AC = \sqrt{2}AB = 2$, 所以 $AB = \sqrt{2}$, 8分



又因为 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $DE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AE = 1$, 9 分

因为 $AC \perp AB$, 所以四边形 $ABDE$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}) \times 1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ 11 分

所以四棱锥 $P-ABDE$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{8}$ 12 分

20. 解: (1) 由题意知 $F(0, \frac{p}{2})$, 直线 l 的方程为 $y = x + \frac{p}{2}$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 1 分

联立方程组 $\begin{cases} y = x + \frac{p}{2}, \\ x^2 = 2py, \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2 - 3py + \frac{p^2}{4} = 0$, 则 $y_1 + y_2 = 3p$ 3 分

因为 $|AB| = y_1 + y_2 + p = 4p$, 所以 $4p = 16$, 解得 $p = 4$ 5 分

(2) 由(1)知 $l: y = x + 2$, $y_1 + y_2 = 12$, 设线段 AB 的中点为 D , 则 $D(4, 6)$, 线段 AB 的中垂线方程为 $y = -x + 10$ 7 分

设圆心为 $P(x_0, y_0)$, 易知 $P(x_0, y_0)$ 在直线 $y = -x + 10$ 上,

即 $\begin{cases} y_0 = -x_0 + 10, \\ (y_0 + 2)^2 = (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 6)^2 + 8^2, \end{cases}$ 9 分

消去 y_0 得 $x_0^2 + 8x_0 - 48 = 0$, 解得 $\begin{cases} x_0 = 4, \\ y_0 = 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = -12, \\ y_0 = 22, \end{cases}$ 11 分

所以所求圆的方程为 $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 64$ 或 $(x+12)^2 + (y-22)^2 = 576$ 12 分

注: 少写一个圆的方程扣 2 分.

21. (1) 解: 当 $a = e$ 时, 因为 $f(x) = e^x + (1-e)x - 1$, 所以 $f'(x) = e^x + 1 - e$, 1 分

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln(e-1)$, 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(e-1))$ 上单调递减, 在 $(\ln(e-1), +\infty)$ 上单调递增. 4 分

(2) 证明: (法一) 易知当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\ln x < x - 1$, $\ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1$, 所以 $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$

..... 6 分

由题设知 $a > 1$, $f'(x) = a^x \ln a + 1 - a$ 7 分

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_0 = \frac{\ln \frac{a-1}{\ln a}}{\ln a}$, 8 分

由上可知 $1 < \frac{a-1}{\ln a} < a$, $0 < \ln \frac{a-1}{\ln a} < \ln a$, 故 $0 < x_0 < 1$ 10 分

当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 11 分

又 $f(0) = f(1) = 0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$ 12 分

(法二) 因为 $f'(x) = a^x \ln a + 1 - a$, 且 $a > 1$, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增. 5 分

又 $f'(0) = \ln a + 1 - a$, 设 $g(a) = \ln a + 1 - a$, 则 $g'(a) = \frac{1}{a} - 1 < 0$, 可知 $g(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上

单调递减, 所以 $g(a) < g(1) = 0$, 即 $f'(0) < 0$ 7 分



又 $f'(1) = a \ln a + 1 - a$, 设 $h(a) = a \ln a + 1 - a$, 则 $h'(a) = \ln a > 0$, 可知 $h(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上

单调递增, 所以 $h(a) > h(1) = 0$, 即 $f'(1) > 0$ 9 分

所以存在唯一的 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 1)$ 上单

调递增. 11 分

因为 $f(0) = f(1) = 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$ 12 分

22. 解: (1) 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 3\cos \alpha, \\ y = -2 + 3\sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 其普通方程为 $(x-1)^2 + (y+2)^2$

$= 9$, 即 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, 2 分

则 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 4\rho \sin \theta - 4 = 0$ 3 分

直线 C_2 的方程为 $y = \sqrt{3}x$,

所以直线 C_2 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \in \mathbf{R}$). 5 分

(2) 设 $M(\rho_1, \theta), N(\rho_2, \theta)$,

将 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \in \mathbf{R}$) 代入 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 4\rho \sin \theta - 4 = 0$, 7 分

得 $\rho^2 + (2\sqrt{3} - 1)\rho - 4 = 0$, 8 分

所以 $\rho_1 \rho_2 = -4$, 9 分

所以 $|OM| \cdot |ON| = |\rho_1 \rho_2| = 4$ 10 分

23. 解: (1) 化简得 $|x+2| - 2|x-1| > -3$ 1 分

当 $x \geq 1$ 时, 解得 $x < 7$, 所以 $1 \leq x < 7$; 2 分

当 $x \leq -2$ 时, 解得 $x > 1$, 此时无解; 3 分

当 $-2 < x < 1$ 时, 解得 $x > -1$, 所以 $-1 < x < 1$ 4 分

综上所述, 原不等式的解集为 $(-1, 7)$ 5 分

(2) 因为 $f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq -2, \\ 2x+1, & -2 < x < 1, \\ 3, & x \geq 1, \end{cases}$ 7 分

所以 $f(x)_{\max} = 3$ 8 分

由题意知 $|1-m| \leq 3$, 解得 $-2 \leq m \leq 4$,

所以 m 的取值范围是 $[-2, 4]$ 10 分

