

绝密★启用前



# 重庆市高三数学考试

## 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x | x > 1\}$ ,  $N = \{x | -1 < 3x - 1 < 8\}$ , 则  $M \cap N =$   
 A. (1, 3)                      B. (0, 1)                      C. (1, +∞)                      D. (3, +∞)
2. 已知  $z = 2 - i$ , 则  $i\bar{z}$  在复平面内对应的点位于  
 A. 第一象限                      B. 第二象限  
 C. 第三象限                      D. 第四象限
3. 若数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = (-\frac{1}{2})^n$ , 则  
 A. 数列  $\{a_n + a_{n+1}\}$  是首项为  $\frac{1}{4}$ , 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列  
 B. 数列  $\{a_n + a_{n+1}\}$  是首项为  $-\frac{1}{4}$ , 公比为  $-\frac{1}{2}$  的等比数列  
 C. 数列  $\{a_n + a_{n+1}\}$  是首项为  $-\frac{1}{4}$ , 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列  
 D. 数列  $\{a_n + a_{n+1}\}$  是首项为  $-\frac{1}{2}$ , 公比为  $-\frac{1}{2}$  的等比数列
4.  $(2x - y)^5$  的展开式中,  $x^2 y^3$  的系数为  
 A. -10                      B. 10                      C. -40                      D. 40
5. 牛皮鼓, 又称堂鼓、喜庆鼓, 多用于江南祠堂内婚嫁迎娶和迎新年等。牛皮鼓的制作工艺考究, 有数十道工序, 包括处理牛皮、刨制鼓腔、蒙皮、拉皮、钉钉, 每道工序都考验着手艺人的技艺和耐心。如图所示的牛皮鼓的鼓面直径为 50 cm, 鼓身高度为 60 cm, 用平行于鼓面的平面截牛皮鼓, 所得截面圆的最大直径为 60 cm, 若将该牛皮鼓看成由两个相同的圆台拼接而成, 忽略鼓面与鼓身的厚度, 则该牛皮鼓的体积为  
 A.  $22750\pi \text{ cm}^3$   
 B.  $23750\pi \text{ cm}^3$   
 C.  $45500\pi \text{ cm}^3$   
 D.  $47500\pi \text{ cm}^3$

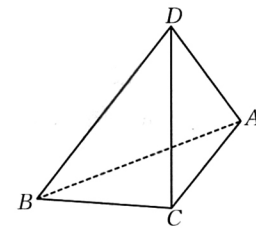


· C QING ·

6. 若  $a = \log_3 6, b = 2, c = \log_{0.25} 0.125$ , 则  
 A.  $a > c > b$                       B.  $a > b > c$                       C.  $b > c > a$                       D.  $b > a > c$
7. 设曲线  $y = x^3 - 2x^2 + 1$  在  $x = k$  处的切线为  $l$ , 若  $l$  的倾斜角小于  $135^\circ$ , 则  $k$  的取值范围是  
 A.  $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$                       B.  $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{3}, 1) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$   
 C.  $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$                       D.  $(-\infty, 0] \cup (\frac{1}{3}, 1) \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$
8. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在  $C$  上, 且  $PF_1 \perp F_1F_2$ , 直线  $PF_2$  与  $C$  交于另一点  $Q$ , 与  $y$  轴交于点  $M$ , 若  $\overrightarrow{MF_2} = 2\overrightarrow{F_2Q}$ , 则  $C$  的离心率为  
 A.  $\frac{3\sqrt{3}}{7}$                       B.  $\frac{4}{7}$                       C.  $\frac{\sqrt{7}}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 若函数  $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ , 则  
 A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$                       B.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{5\pi}{4}$  对称  
 C.  $f(x) + f(-x) = \sqrt{2} \cos x$                       D.  $f(x)$  的图象关于点  $(-\frac{5\pi}{4}, 0)$  对称
10. 有一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_6$ , 其中任何两个数都不相等, 现在删去其中一个数据, 得到一组新数据, 则下列判断正确的是  
 A. 新数据的极差可能等于原数据的极差  
 B. 新数据的中位数可能等于原数据的中位数  
 C. 若新数据的平均数等于原数据的平均数, 则新数据的方差大于原数据的方差  
 D. 若新数据的平均数等于原数据的平均数, 则新数据的 20% 分位数小于原数据的 20% 分位数
11. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = xf(y) + yf(x)$ , 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $g(x)$  满足  $g(x+1) = (x+1)(x^2 + 2x)$ , 则  
 A.  $f(x)$  不是奇函数                      B.  $f(x)$  既是奇函数又是偶函数  
 C.  $g(x)$  是奇函数                      D.  $g(x)$  既不是奇函数又不是偶函数
12. 如图, 在三棱锥  $D-ABC$  中, 平面  $ABC \perp$  平面  $ABD$ ,  $AB = AC = BC = BD = 3, AD = 2$ , 则  
 A. 三棱锥  $D-ABC$  的体积为  $\sqrt{6}$   
 B. 点  $C$  到直线  $AD$  的距离为  $\frac{\sqrt{34}}{2}$   
 C. 二面角  $B-AD-C$  的正切值为  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$   
 D. 三棱锥  $D-ABC$  外接球的球心到平面  $ABD$  的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 若双曲线的焦距为 6, 实轴长为 2, 则该双曲线的虚轴长为  $\blacktriangle$  .

14. 在矩形  $ABCD$  中,  $O$  为对角线的交点,  $E$  为  $BC$  上一点, 且向量  $\vec{AE}$  在向量  $\vec{AD}$  上的投影向量为  $\frac{1}{3}\vec{AD}$ ,  $\vec{OE} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AD}$ , 则  $\lambda - \mu =$   $\blacktriangle$ .

15. 已知圆  $M$  与圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  内切, 且圆  $M$  与直线  $x = 2$  相切, 则圆  $M$  的圆心的轨迹方程为  $\blacktriangle$ .

16. 已知  $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ , 则当  $\tan 2\theta - \tan \theta$  取得最大值时,  $\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} =$   $\blacktriangle$ .

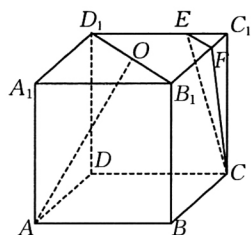
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $O$  为  $B_1D_1$  的中点,  $\vec{ED_1} = 2\vec{C_1E}$ ,  $\vec{FB_1} = 2\vec{C_1F}$ .

(1) 证明:  $B_1D_1 \parallel$  平面  $CEF$ .

(2) 求直线  $AO$  与平面  $CEF$  所成角的正弦值的平方.



18. (12 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $A + B = 11C$ ,  $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ .

(1) 若  $\cos A = \frac{4}{5}$ , 求  $BC$  的长;

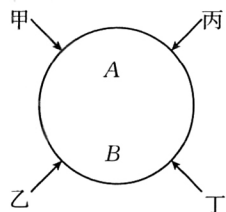
(2) 若  $A = 2C$ ,  $D$  为  $AB$  延长线上一点,  $E$  为  $AC$  边上一点, 且  $AE = \sqrt{3}$ ,  $DE = \sqrt{7}$ , 求  $\triangle BDE$  的面积.

19. (12 分)

艾伦·麦席森·图灵提出的图灵测试, 指测试者与被测试者在隔开的情况下, 通过一些装置(如键盘)向被测试者随意提问. 已知在某一轮图灵测试中有甲、乙、丙、丁 4 名测试者, 每名测试者向一台机器(记为  $A$ )和一个人(记为  $B$ )各提出一个问题, 并根据机器  $A$  和人的作答来判断谁是机器, 若机器  $A$  能让至少一半的测试者产生误判, 则机器  $A$  通过本轮的图灵测试. 假设每名测试者提问相互独立, 且甲、乙、丙、丁四人之间的提问互不相同, 而每名测试者有 60% 的可能性会向  $A$  和  $B$  问同一个题. 当同一名测试者提出的两个问题相同时, 机器  $A$  被误判的可能性为 10%, 当同一名测试者提的两个问题不不同时, 机器  $A$  被误判的可能性为 35%.

(1) 当回答一名测试者的问题时, 求机器  $A$  被误判的概率;

(2) 按现有设置程序, 求机器  $A$  通过本轮图灵测试的概率.



20. (12 分)

已知  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $a_1 = 1$ ,  $S_{n+1} + S_n = (n+1)^2$ .

(1) 证明:  $a_{n+1} + a_n = 2n + 1$ .

(2) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

(3) 若  $b_n = \frac{1-a_n}{2^{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

21. (12 分)

已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  经过点  $(2, -2\sqrt{6})$ , 直线  $l_1: y = kx + m (km \neq 0)$  与  $C$  交于  $A, B$  两点(异于坐标原点  $O$ ).

(1) 若  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ , 证明: 直线  $l_1$  过定点.

(2) 已知  $k = 2$ , 直线  $l_2$  在直线  $l_1$  的右侧,  $l_1 \parallel l_2$ ,  $l_1$  与  $l_2$  之间的距离  $d = \sqrt{5}$ ,  $l_2$  交  $C$  于  $M, N$  两点, 试问是否存在  $m$ , 使得  $|MN| - |AB| = 10$ ? 若存在, 求  $m$  的值; 若不存在, 说明理由.

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = \cos ax + \frac{1}{2}x^2 - 1$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $x = 0$  是  $f(x)$  的极大值点, 求  $a$  的取值范围.