西北狼教育联盟 2023 年秋期开学学业调研

高三数学试题卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x-2\leq 0\}$，集合 $B=\{0,1,2,3\}$，集合 $C=\{x|-1<x<1\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$（　　）

A. $(-1,1]$　　B. $(-1,1]\cup\{2\}$　　C. $(-1,2]$　　D. $\{0\}$

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对任意两个不相等的实数 a,b 都有 $(a-b)[f(b)-f(a)]>0$，则不等式 $f(3x-1)<f(x+5)$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty,3)$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $(2,+\infty)$

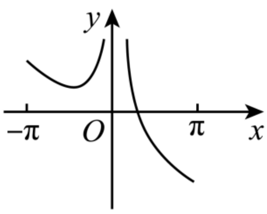
3. 已知随机变量 $X\sim B(2,p)$，随机变量 $Y\sim N(2,\sigma^2)$，若 $P(X\leq 1)=0.36$，$P(Y<4)=p$，则 $P(0<Y<2)=$（　　）

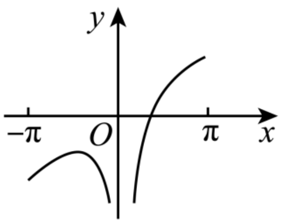
A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

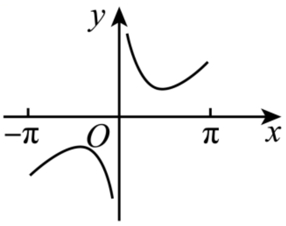
4. 如图，“天宫空间站”是我国自主建设的大型空间站，其基本结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱三个部分. 假设有 6 名航天员(4 男 2 女) 在天宫空间站开展实验，其中天和核心舱安排 4 人，问天实验舱与梦天实验舱各安排 1 人， 且两名女航天员不在一个舱内，则不同的安排方案种数为（　　）

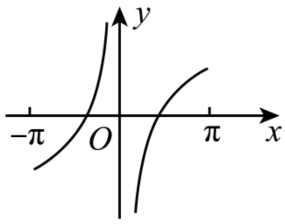
A. 14　　B. 18　　C. 30　　D. 36

5. 函数 $f(x)=x^3-\dfrac{\sin x}{x^5}$ 在 $x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ 上的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

6. 定义在$\left(0,+\infty\right)$上的函数$f\left(x\right)$的导函数为$f'\left(x\right)$，且$\left(x^3-x^2+x\right)f'\left(x\right)<\left(3x^2-2x+1\right)f\left(x\right)$恒成立，则必有（　　）

A. $f\left(1\right)<\frac{f\left(2\right)}{2}<\frac{f\left(3\right)}{7}$

B. $3f\left(1\right)<\frac{f\left(2\right)}{2}<\frac{f\left(3\right)}{7}$

C. $f\left(1\right)>\frac{f\left(2\right)}{2}>\frac{f\left(3\right)}{7}$

D. $3f\left(1\right)>\frac{f\left(2\right)}{2}>\frac{f\left(3\right)}{7}$

7. 若$x>0$，$y>0$，$x+3y=1$，则$\frac{xy}{3x+y}$的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{1}{20}$

8. 已知函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，若函数$f\left(2x+1\right)$为奇函数，且$f\left(4-x\right)=f\left(x\right)$，$\sum_{k=1}^{2023}f(k)=1$，则$f\left(0\right)=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列命题中，真命题是（　　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得$\mathrm{e}^{x_0}\le 0$

B. $\sin^2 x+\frac{2}{\sin x}\ge 3\left(x\ne k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$

C. 幂函数$f\left(x\right)=\left(m^2-2m-2\right)x^{2m-1}$在$\left(0,+\infty\right)$上为减函数，则$m$的值为$-1$

D. $a>1$，$b>1$是$ab>1$的充分不必要条件

10. 甲、乙两盒中各放有除颜色外其余均相同的若干个球，其中甲盒中有 4 个红球和 2 个白球，乙盒中有 2 个红球和 3 个白球，现从甲盒中随机取出 1 球放入乙盒，再从乙盒中随机取出 1 球.记“从甲盒中取出的球是红球”为事件A，“从甲盒中取出的球是白球”为事件B，“从乙盒中取出的球是红球”为事件C，则（　　）

A. A与B互斥　　B. A与C独立　　C. $P\left(C|A\right)=\frac{1}{2}$　　D. $P\left(C\right)=\frac{4}{9}$

11. 已知$\left(1-2x\right)^{2024}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2023}x^{2023}+a_{2024}x^{2024}$，则（　　）

A. 展开式中二项式系数最大项为第 1012 项

B. 展开式中所有项的系数和为 1

C. $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+L\ +\frac{a_{2023}}{2^{2023}}+\frac{a_{2024}}{2^{2024}}=-1$

D. $a_1+2a_2+3a_3+L\ +2023a_{2023}+2024a_{2024}=4048$

12. 德国著名数学家狄利克雷（*Dirichlet*，1805~1859）在数学领域成就显著.19 世纪，狄利克雷定义了一个“奇怪的函数”$y=f(x)=\begin{cases}1,x\in Q\\0,x\in \complement_R Q\end{cases}$其中 R 为实数集，Q 为有理数集．则关于函数 $f(x)$ 有如下四个命题，正确的为（　　）

A. 对任意 $x\in R$，都有 $f\left(-x\right)+f\left(x\right)=0$

B. 对任意 $x_1\in \mathrm{R}$，都存在 $x_2\in \mathbf{Q}$， $f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)$

C. 若 $a<0$，$b>1$，则有 $\left\{x\middle|\,f(x)>a\right\}=\left\{x\middle|\,f(x)<b\right\}$

D. 存在三个点 $A\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$，$B\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$，$C\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)$，使 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x+3\right),x\le 0\\x^2-3x-4,x>0\end{cases}$，则 $f\left(-4\right)=$_________.

14. 计算：$0.125^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{64}{27}\right)^0-\log_2 25\times\log_3 4\times\log_5 9=$_________.

15. 若函数 $f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+ax\right)$ 在 $\left(1,2\right)$ 上单调递减，则 a 的取值范围_________.

16. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-ax^2\left(a\in \mathrm{R}\right)$ 有两个极值点 x_1， x_2，且 $x_1>2x_2$，则 a 的取值范围为__________.

四、解答题（本题共 6 个小题，共 70 分）

17. 2022 年 6 月 5 日神舟十四号搭载陈冬、刘洋、蔡旭哲 3 名航天员在酒泉卫星发射中心发射成功，表明中国航天技术进一步走向成熟，中国空间站即将完成“*T*”字基本结构的搭建，为了解民众对我国航天事业的关注度，随机抽取 1000 人，其中大学及以上学历 480 人，高中及以下学历 520 人，得到如下 2×2 列联表：

	不了解	了解	总计
大学及以上	38	442	480
高中及以下	6	514	520
总计	44	956	1000

（1）若高中及以下学历不了解的 6 人中，高中学历 2 人，高中以下学历 4 人，从中任意抽取 2 人，求 2 人都不是高中以下学历的概率；

（2）若认为不了解与否与学历有关，则出错的概率是多少?

附表：

$P\left(K^2>k\right)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
K	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.84	5.024	6.635	7.879	10.83

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

18. 已知函数 $f(x)=xe^{x+1}$.

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)=m$ 只有一个实数解，求实数 m 的取值范围.

19. 已知函数 $y=ax^2-x-a-b$.

（1）若 $ax^2-x-a-b<0$ 的解集为 $(-1,2)$，求 a，b 的值.

（2）若 $a>0$，求解不等式 $ax^2-x-a+1<0$.

20. 我国承诺 2030 年前达到“碳达峰”，2060 年实现“碳中和”，“碳达峰”就是我们国家承诺在 2030 年前，二氧化碳的排放不再增长，达到峰值之后再慢慢减下去；而到 2060 年，针对排放的二氧化碳要采取植树、节能减排等各种方式全部抵消掉，这就是“碳中和”，做好垃圾分类和回收工作可以有效地减少处理废物造成的二氧化碳的排放，助力“碳中和”. 某校为加强学生对垃圾分类意义的认识以及养成良好的垃圾分类的习惯，团委组织了垃圾分类知识竞赛活动，竞赛分为初赛、复赛和决赛，只有通过初赛和复赛，才能进入决赛，甲、乙、丙三队参加竞赛，已知甲队通过初赛、复赛的概率均为 $\dfrac{2}{3}$，乙队通过初赛、复赛的概率均为 $\dfrac{2}{3}$，丙队通过初赛、复赛的概率分别为 p，$\dfrac{4}{3}-p$，其中 $0<p\le\dfrac{3}{4}$，三支队伍是否通过初赛和复赛互不影响.

（1）求 p 取何值时，丙队进入决赛的概率最大；

（2）在（1）的条件下，求进入决赛的队伍数 X 的分布列及均值.

21. 某公司为了解年研发资金投入量 x（单位:亿元）对年销售额 y（单位:亿元）的影响.对公司近 12 年的年研发资金投入量 x_i 和年销售额 y_i 的数据，进行了对比分析，建立了两个模型:① $y=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x^2$，② $\hat{y}=e^{\hat{\lambda}x+\hat{t}}$，其中 α，β，λ，t 均为常数，e 为自然对数的底数，并得到一些统计量的值.令 $u_i=x_i^2, v_i=\ln y_i, (i=1,2,3,\cdots,12)$，经计算得如下数据:

$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\sum\limits_{i=1}^{12}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$	$\sum\limits_{i=1}^{12}\left(y_i-\overline{y}\right)^2$	$\overline{u}$	$\overline{v}$
20	66	77	2	460	4.20

$\sum_{i=1}^{12}\left(u_i-\overline{u}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{12}\left(u_i-\overline{u}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$	$\sum_{i=1}^{12}\left(v_i-\overline{v}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{12}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(v_i-\overline{v}\right)$
31250	215	3.08	14

（1）请从相关系数的角度，分析哪一个模型拟合程度更好?

（2）（i）根据分析及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程;

（ii）若下一年销售额 y 需达到 90 亿元，预测下一年的研发资金投入量 x 是多少亿元?

附 :① 相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$ ， 回归直 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中公式分别为

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}，\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\cdot\overline{x};$$

②参考数据：$308=4\times77,\sqrt{90}\approx9.4868,\mathrm{e}^{4.4998}\approx90$

22. 已知函数 $f\left(x\right)=x\mathrm{e}^x-a\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=\left(2\mathrm{e}+1\right)x-b\left(a,b\in\mathrm{R}\right)$

（1）求实数 a ， b 的值；

（2）设函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2\mathrm{e}^x-x+3$ ，当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时， $g\left(x\right)<m\quad\left(m\in\mathrm{Z}\right)$ 恒成立，求 m 的最小值.