

数 学

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{x | x(x-1)(x-2) = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则满足条件的集合 B 的个数为
A. 4 B. 5 C. 7 D. 8
2. 复数 $\frac{3}{(2-i)i}$ 的共轭复数是
A. $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$ B. $\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$ C. $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$ D. $\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$
3. “ $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ” 是 “ $\cos \alpha > 0$ ” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 设 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 3x - 1$, 则 $f(0) + f(4) =$
A. 12 B. -12 C. 13 D. -13
5. $\left(1 - \frac{2x}{y}\right)(x-y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为
A. 55 B. 60 C. 65 D. 70
6. 为落实党的二十大提出的“加快建设农业强国, 扎实推动乡村产业、人才、文化、生态、组织振兴”的目标, 某银行拟在乡村开展小额贷款业务。根据调查的数据, 建立了实际还款比例 P 关于还款人的年收入 x (单位: 万元) 的 Logistic 模型: $P(x) = \frac{e^{-0.9+4x}}{1+e^{-0.9+4x}}$ 。已知当贷款人的年收入为 9 万元时, 其实际还款比例为 50%, 若贷款人的年收入约为 5 万元, 则实际还款比例约为 (参考数据: $e^{-0.4} \approx \frac{2}{3}$)
A. 30% B. 40% C. 60% D. 70%

7. 若函数 $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 2x + a\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[-1, 1]$ B. $[-1, \frac{1}{3}]$ C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ D. $[-1, -\frac{1}{3}]$

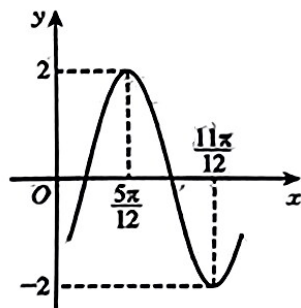
8. 已知抛物线 $C_1: y^2 = 8x$, 圆 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 1$, 若点 P, Q 分别在 C_1, C_2 上运动, 且设点 $M(4, 0)$, 则 $\frac{|PM|}{|PQ|}$ 的最小值为

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则

- A. $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$
 B. $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$
 C. $f(x) = 2\cos(\omega x - \frac{5\pi}{6})$
 D. $f(x) = 2\cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$



10. 已知实数 a, b, c , 其中 $a > b > 1, c > 0$, 则下列关系中一定成立的是

- A. $a^2 - bc > b^2 - ac$ B. $a^3 > b^2$
 C. $|a - c| > |b - c|$ D. $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 2x - 2$, 则

- A. $f(x)$ 有三个零点
 B. $f(x)$ 有两个极值点
 C. 点 $(0, -2)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
 D. 曲线 $y = f(x)$ 有两条过点 $(-1, 0)$ 的切线

12. 设符号函数 $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ 已知函数 $f(x) = [\text{sgn}(x + \pi)]\sin x + \cos(x + \pi)$, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
 B. $f(x)$ 在 $[-2\pi, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
 C. $f(x)$ 在 $[-\pi, -\frac{\pi}{4}]$ 上单调递减
 D. 函数 $g(x) = 2f(x) - 1$ 在 $[-3\pi, 2\pi]$ 上有 5 个零点

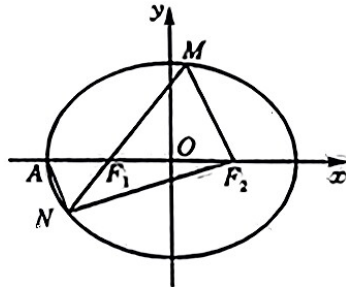
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知非零向量 a, b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|b| = 2, b \perp (b - 2a)$, 则 $|a| =$ _____.

14. 已知 $\tan \frac{\alpha}{2} = 2$, 则 $\frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} =$ _____.

15. 已知 $x > y > 0$, 则 $x^2 + \frac{4}{y(x-y)}$ 的最小值为_____.

16. 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 左顶点是 A , 左、右焦点分别是 F_1, F_2 , M 是 C 在第一象限内的一点, 直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N . 若 $MF_2 \parallel AN$, 且 $\triangle ANF_2$ 的周长为 $\frac{19}{6}a$, 则直线 MN 的斜率为_____.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

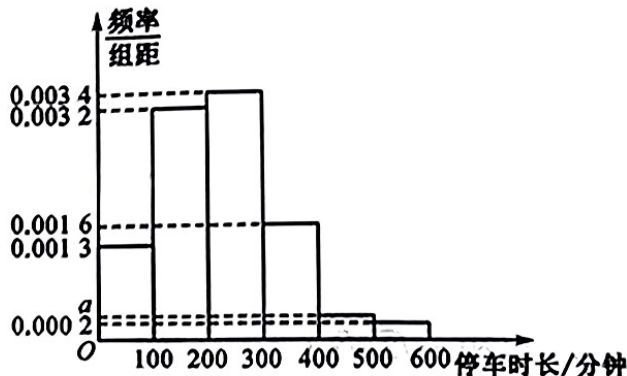
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_8 - 3a_3 = 18, S_4 = S_5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求使 $\frac{S_n}{a_n} < 1$ 成立的 n 的取值集合.

18. (本小题满分 12 分)

某商场为了制定合理的停车收费政策, 需要了解顾客的停车时长(单位: 分钟). 现随机抽取了该商场到访顾客的 100 辆车进行调查, 将数据分成 6 组: $(0, 100]$, $(100, 200]$, $(200, 300]$, $(300, 400]$, $(400, 500]$, $(500, 600]$, 并整理得到如下频率分布直方图(顾客的停车时长均不超过 600 分钟):



(1) 求 a ;

(2) 若某天该商场到访顾客的车辆数为 500, 根据频率分布直方图估计该天停车时长在区间 $(300, 500]$ 内的车辆数;

(3) 为了吸引顾客, 该商场准备给停车时长较短的车辆提供免费停车服务. 若以第 30 百分位数为标准, 请你根据频率分布直方图, 给出确定免费停车时长标准的建议(数据取整数).

19. (本小题满分 12 分)

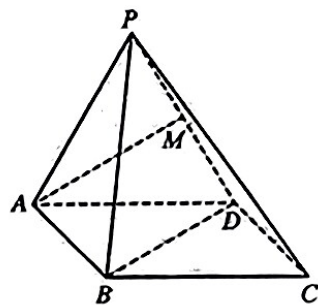
在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a(\sin A - \sqrt{2}\sin B) = c\sin C - b\sin B$.

- (1)求 C 的大小;
- (2)若 D 为 AB 边上一点,且 $AD=CD=2BD$,求 $\tan B$ 的值.

20. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,侧面 PAD 是正三角形,侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, M 是 PD 的中点.

- (1)求证: $AM \perp$ 平面 PCD ;
- (2)求平面 BPD 与平面 PCD 夹角的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{m(x-1)}{x+1}$, 其中 $m \in \mathbb{R}$.

- (1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2)若存在 $x \in (1, +\infty)$, 使得不等式 $f(x) > \ln x$ 成立, 求 m 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F, a^2 + b^2 = 1, O$ 为坐标原点, 过 F 的直线 l 与 C 的右支相交于 A, B 两点.

- (1)若 $b < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 C 的离心率 e 的取值范围;
- (2)若 $\angle AOB$ 恒为锐角, 求 C 的实轴长的取值范围.