贵阳第一中学2024届高考适应性月考卷（一）
数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	B	D	C	A	B

【解析】

1．函数 $y=\ln(1-x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ 1)$，不等式 $\dfrac{x-1}{x}\leqslant 0$，可化为 $x(x-1)\leqslant 0$ 且 $x\neq 0$，所以 $0<x\leqslant 1$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0<x<1\}$，故选A．

2．当 $x>0$ 时由基本不等式可得 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$ 时取得“=”，当 $\dfrac{x^2+1}{x}\geqslant 2$ 时，则 $\dfrac{x^2+1}{x}-2\geqslant 0$，可得 $\dfrac{x^2-2x+1}{x}\geqslant 0$，即 $\dfrac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$，解得 $x>0$；所以“$x>0$”是“$\dfrac{x^2+1}{x}\geqslant 2$”的充要条件，故选C．

3．对于A，由正态分布曲线对称性可知：$P(X\geqslant 10)=0.5$，$P(8\leqslant X\leqslant 12)=2P(8\leqslant X\leqslant 10)$，A正确；C正确，对于B，$\because P(X\geqslant 8)=P(X\leqslant 12)$，$\therefore P(X\leqslant 8)+P(X\leqslant 12)=P(X\leqslant 8)+P(X\geqslant 8)=1$，B正确；对于D，$\because D(X)=2^2=4$，$\therefore D(2X+1)=4D(X)=16$，D错误，故选D．

4．当 $x=0$ 时，$f(x)=0$，排除A选项；因为 $f(-x)=f(x),\ x\in\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 为偶函数，排除C；当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2x\sin x+(x^2+1)\cos x}{\mathrm{e}^2}$，$0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$2x\sin x+(x^2+1)\cos x>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 单调递增；$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0,\ f'(\pi)<0$，所以存在 $m\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，使得 $f'(m)=0$，故 $f(x)$ 在 $(0,\ m)$ 上单调递增，在 $(m,\ \pi)$ 上单调递减，排除D，故选B．

5．当 $a=0$ 时，满足题意；当为二次函数时，因为 $f(x)=ax^2+2(a-1)x+2$ 在 $(-\infty,\ 4)$ 上为减函数，所以 $\begin{cases}a>0,\\ \dfrac{1-a}{a}\geqslant 4,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{5}$，综上所述 a 的取值范围为 $\left[0,\ \dfrac{1}{5}\right]$，故选D．

6．双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，记点$A(0,\ 3c)$，由题意可知，点$F(c,\ 0)$为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的右焦点，易知直线$AF$与直线$y=\dfrac{b}{a}x$垂直，且$k_{AF}=-3$，可得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{3}$，因此，该双曲线的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，故选C．

7．因为$2^a+\log_2 a<2^{2b}+\log_2 b+1=2^{2b}+\log_2(2b)$，令$f(x)=2^x+\log_2 x$，其中$x>0$，因为函数$y=2^x$、$y=\log_2 x$在$(0,\ +\infty)$上均为增函数，所以，函数$f(x)=2^x+\log_2 x$在$(0,\ +\infty)$上为增函数，因为$2^a+\log_2 a<2^{2b}+\log_2(2b)$，即$f(a)<f(2b)$，故$2b>a>0$，则$2b-a>0$，所以，$2b-a+1>1$，则$\ln(2b-a+1)>\ln 1=0$，B错A对；无法确定$|a-2b|$与1的大小，故$\ln|a-2b|$与0的大小无法确定，CD都错，故选A．

8．构造函数$F(x)=\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}$，则$F'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot\mathrm{e}^x-[f(x)+1]\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)-1}{\mathrm{e}^x}$，因为$f'(x)-f(x)<1$，所以$F'(x)<0$恒成立，故$F(x)=\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}$单调递减，$f(x)+1>2023\mathrm{e}^x$变形为$\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}>2023$，又$f(0)=2022$，所以$F(0)=\dfrac{f(0)+1}{\mathrm{e}^0}=2023$，所以$F(x)>F(0)$，解得：$x<0$，故选B．

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分）

题号	9	10	11	12
答案	BD	CD	ABC	AD

【解析】

9．由题意知A_1，A_2，A_3两两互斥，故D正确；又$P(A_1)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$，$P(A_2)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$，$P(A_3)=\dfrac{3}{10}$，$P(B|A_1)=\dfrac{5}{11}$，$P(B|A_2)=\dfrac{4}{11}$，$P(B|A_3)=\dfrac{4}{11}$，故B正确；$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{11}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{11}+\dfrac{3}{10}\times\dfrac{4}{11}=\dfrac{9}{22}$，故A错误；因为$P(BA_1)=P(B|A_1)P(A_1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{11}=\dfrac{5}{22}\neq P(B)P(A_1)$，所以$B$与$A_1$不是相互独立事件，故C错误，故选BD．

10．数列$\{a_n\}$各项乘以10后再减4得到数列$\{b_n\}$:0，3，6，12，24，48，96，192，…，故该数列从第2项起构成公比为2的等比数列，所以$b_n=\begin{cases}0，n=1,\\3\times 2^{n-2}，n\geqslant 2,\end{cases}$数列$\{b_n\}$的第2023项为$3\times 2^{2021}$，故A错误；从而$a_n=\dfrac{b_n+4}{10}=\begin{cases}0.4，n=1,\\0.3\times 2^{n-2}+0.4，n\geqslant 2,\end{cases}$故B错误；当$n=1$时，$S_1=a_1=0.4$；当$n\geqslant 2$时，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=0.4+0.3(2^0+2^1+\cdots+2^{n-2})+0.4(n-1)$$=0.4n+0.3\times\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2}=0.4n+0.3\times 2^{n-1}-0.3$，当$n=1$时，$S_1=0.4$也符合上式，所以$S_n=0.4n+0.3\times 2^{n-1}-0.3$，$S_{10}=4+0.3\times 2^9-0.3=157.3$，故C正确；因为$nb_n=\begin{cases}0，n=1,\\3n\times 2^{n-2}，n\geqslant 2,\end{cases}$所以当$n=1$时，$T_1=b_1=0$，当$n\geqslant 2$时，$T_n=b_1+2b_2+3b_3+\cdots$$+nb_n=0+3(2\times 2^0+3\times 2^1+4\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-2})$，$2T_n=3(2\times 2^1+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+n\times$$2^{n-1})$，所以$-T_n=0+3(2+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}-n\times 2^{n-1})=3\left(2+\dfrac{2-2^{n-1}}{1-2}-n\times 2^{n-1}\right)=$$3(1-n)\times 2^{n-1}$，所以$T_n=3(n-1)\times 2^{n-1}$，又当$n=1$时$T_1=0$也满足上式，所以$T_n=3(n-1)\times 2^{n-1}$，故D正确，故选CD.

11．对于A，令$x=y=0$，得$f(0)-f(0)=f(0)=0$，故A正确；对于B，令$y=-x$得：$f(x)-f(-x)=f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$（1），再以$-x$代$x$，得：$f(-x)-f(x)=f\left(\dfrac{-2x}{1+x^2}\right)$（2），（1）+（2）得：$f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)+f\left(\dfrac{-2x}{1+x^2}\right)=0$，$\therefore f\left(\dfrac{-2x}{1+x^2}\right)=-f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$，$\therefore$定义在$(-1，1)$上的函数$f(x)$为奇函数，故B正确；对于C，$\because$函数$f(x)$为定义在$(-1，1)$上的奇函数，且当$x\in(-1，0)$时，$f(x)<0$，不妨设$-1<x_1<x_2<1$，则$f(x_1)-f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)$，因为$-1<x_1<x_2<1$，所以$\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$且$\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}+1=\dfrac{(1+x_1)(1-x_2)}{1-x_1x_2}>0$，因此$-1<\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$，所以$f\left(\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)<0$，则$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，故函数$f(x)$在$(-1，1)$上为增函数，C正确；对于D，令$x=\dfrac{7}{8}，y=\dfrac{2}{3}$，因为$f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)$，则$f\left(\dfrac{7}{8}\right)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，即$f\left(\dfrac{2}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{7}{8}\right)$，因为$\dfrac{7}{8}>\dfrac{7}{9}$，且函数$f(x)$在$(-1，1)$上

为增函数，所以 $f\left(\frac{7}{8}\right)>f\left(\frac{7}{9}\right)$，即 $f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{7}{8}\right)>f\left(\frac{7}{9}\right)$，故D错误，故选ABC.

12．因为双曲线C的方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，所以$a=4$，$b=3$，$c=5$，渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$，选项A，因为直线$PF_2$与双曲线有两个交点，所以$k\in\left(-\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$，即A正确；选项B，由双曲线的定义知，$|PF_1|-|PF_2|=2a=8$，若$m\perp n$，则$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=(2c)^2=100$，因为$(|PF_1|-|PF_2|)^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|$，所以$64=100-2|PF_1|\cdot|PF_2|$，解得$|PF_1|\cdot|PF_2|=18$，即B错误；选项C：$|PF_2|+|PQ|=|F_1Q|+2|PQ|-2a=5+2|PQ|>5$，即C错误；选项D，因为$PT$平分$\angle F_1PF_2$，由角分线定理知，$\frac{|PF_1|}{|TF_1|}=\frac{|PF_2|}{|TF_2|}$，所以$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|TF_1|}{|TF_2|}=\frac{5+1}{5-1}=\frac{3}{2}$，又$|PF_1|-|PF_2|=8$，所以$\frac{3}{2}|PF_2|-|PF_2|=8$，解得$|PF_2|=16$，即D正确，故选AD.

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	-480	$\frac{1}{2}$	$\left(1,\ \frac{2}{e}+1\right)$	$\frac{16}{3}$；　$\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{20}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

【解析】

13．$(x-2y+1)^6$的展开式中为x^2y^3项为$C_6^2x^2C_4^3(-2y)^3=-480x^2y^3$.

14．令$4x-1=1$，即$x=\frac{1}{2}$，得$y=2$，故$P\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$，由$P\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$在直线$l$：$ax+by-3=0(b>0)$上，得$\frac{1}{2}a+2b-3=0$，即$a+2+4b=8$，因为$a>0$且$a\neq1$，$b>0$，所以$a+2>2$，所以

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{4b}=\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{4b}\right)(a+2+4b)\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\left(2+\frac{4b}{a+2}+\frac{a+2}{4b}\right)\geqslant\frac{1}{8}\left(2+2\sqrt{\frac{4b}{a+2}\cdot\frac{a+2}{4b}}\right)=\frac{1}{2},$$

当且仅当$\frac{4b}{a+2}=\frac{a+2}{4b}$，即$a+2=4b=4$，即$a=2$，$b=1$时，等号成立.

15．由$f(x)=x\ln x-\frac{1}{4}(m-1)x^2-x+1$，得$f'(x)=\ln x-\frac{1}{2}(m-1)x$，$x>0$．要使$f(x)=x\ln x-\frac{1}{4}(m-1)x^2-x+1$有两个极值点，只需$f'(x)=\ln x-\frac{1}{2}(m-1)x$有两个变号根，

即$\dfrac{1}{2}(m-1)=\dfrac{\ln x}{x}$有两个变号根．令$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}\ (x>0)$，则$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，由$g'(x)=0$得$x=\mathrm{e}$，易知当$x\in(0,\ \mathrm{e})$时，$g'(x)>0$，此时$g(x)$单调递增；当$x\in(\mathrm{e},\ +\infty)$时，$g'(x)<0$，此时$g(x)$单调递减．所以$g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，而$g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\mathrm{e}<0$，当$0<x<1$时，$g(x)<0$，当$x>1$时，$g(x)>0$，作出$y=g(x)$，$y=\dfrac{1}{2}(m-1)$的图象如图 1，可知：$0<\dfrac{1}{2}(m-1)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，解得$1<m<\dfrac{2}{\mathrm{e}}+1$．故答案为$\left(1,\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}+1\right)$.

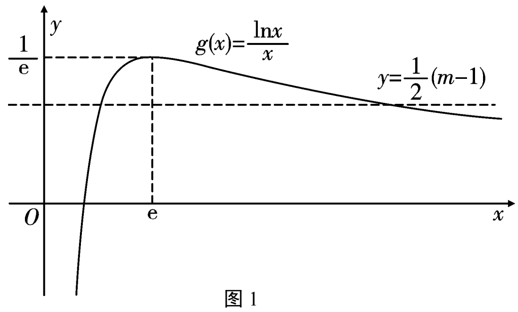

图 1

16．记第n个图形为P_n，边长为a_n，边数为b_n，周长为L_n，面积为S_n，P_1有b_1条边，边长a_1；P_2有$b_2=4b_1$条边，边长$a_2=\dfrac{1}{3}a_1$；P_3有$b_3=4^2b_1$条边，边长$a_3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2a_1$；……分析可知$a_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}$，即$a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}a_1$；$b_n=4b_{n-1}$，即$b_n=b_1\cdot4^{n-1}$.当第 1 个图中的三角形的边长为 1 时，即$a_1=1$，$b_1=3$，所以$L_n=a_nb_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\times3\times4^{n-1}=3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$，当$n=3$时，$L_3=3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{3-1}=\dfrac{16}{3}$.由图形可知$P_n$是在$P_{n-1}$每条边上生成一个小三角形，即$S_n=S_{n-1}+b_{n-1}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a_n^2$，$(n\geqslant2)$，即$S_n-S_{n-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times a_n^2\cdot b_{n-1}$，$S_{n-1}-S_{n-2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times a_{n-1}^2\cdot b_{n-2}$，$\cdots$，$S_2-S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times a_2^2\cdot b_1$，利用累加法可得$S_n-S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a_n^2\cdot b_{n-1}+a_{n-1}^2\cdot b_{n-2}+\cdots+a_2^2\cdot b_1)$，数列$\{a_n\}$是以$\dfrac{1}{3}$为公比的等比数列，数列$\{b_n\}$是以 4 为公比的等比数列，故$\{a_n^2\cdot b_{n-1}\}$是以$\dfrac{4}{9}$为公比的等比数列，当第 1 个图中的三角形的边长为 1 时，$S_1=\dfrac{1}{2}a_1^2\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$a_1^2=1$，$a_2^2=\dfrac{1}{9}$，$P_1$有$b_1=3$条边，则$a_n^2\cdot b_{n-1}+a_{n-1}^2\cdot b_{n-2}+\cdots+a_2^2\cdot b_1=\dfrac{a_2^2\cdot b_1\left(1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}{1-\dfrac{4}{9}}$

$=\dfrac{\frac{1}{9}\times 3\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{4}{9}}=\dfrac{3}{5}\times\left(1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$，所以 $S_n-S_1=\dfrac{3\sqrt{3}}{20}\times\left(1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$，所以

$S_n=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}-\dfrac{3\sqrt{3}}{20}\bullet\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$，$S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$也满足上式.

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

（1）证明：由题意知：$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2-a_n}{a_n}=2\bullet\dfrac{1}{a_n}-1$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=2\left(\dfrac{1}{a_n}-1\right)$,

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$是以 2 为公比，$\dfrac{1}{a_1}-1=2$为首项的等比数列.

……………………………………………………………………………………………（5 分）

（2）解：由（1）知$\dfrac{1}{a_n}-1=2^n\Rightarrow\dfrac{1}{a_n}=2^n+1$,

所以$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}+n=2^{n+1}+n-2$,

记 $f(n)=2^{n+1}+n-2$，显然 $f(n)$ 为递增数列，又 $f(9)=1031$，$f(10)=2056$,

所以最大整数$n=9$． ………………………………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意可得，$\overline{x}=3$，$\overline{y}=2$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=4.8$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10$,

设 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=0.48$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=2-0.48\times 3=0.56$，$\therefore y$ 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.48x+0.56$．

……………………………………………………………………（6 分）

（2）零假设为 H_0：两个店的顾客购买率无差异，则

由题意可知 2×2 列联表如表所示：

	购买	不购买	合计
分店一	180	120	300
分店二	150	50	200
合计	330	170	500

……………………………………………………………………（8 分）

$\therefore \chi^2=\dfrac{500(180\times 50-150\times 120)^2}{300\times 200\times 330\times 170}\approx 12.032>10.828$，

∴根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，没有充分证据推断H_0成立，

即两个店的顾客购买率有差异，且推断犯错的概率不超过 0.001.

……………………………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为E，F为圆弧AB上的两个三等分点，所以$EF\,//\,AB\Rightarrow EF\,//$平面$ABCD$，

同理$EH\,//$平面$ABCD$，又$EF\cap EH=E$，所以平面$ABCD\,//$平面$EFGH$，

又平面$\alpha\cap$平面$ABCD=CP$，平面$\alpha\cap$平面$EFGH=MQ$，所以$CP\,//\,MQ$.

……………………………………………………………………（6 分）

（2）解：不妨取圆柱底面半径为 2，如图 2，以O为坐标原点，过点O作x轴$\perp OB$，OB为y轴，OO'为z轴建立空间直角坐标系，则：

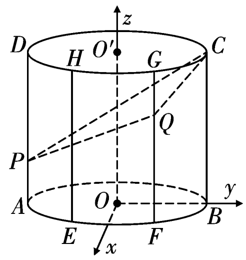

图 2

$F(\sqrt{3},1,0)$，$E(\sqrt{3},-1,0)$，$A(0,-2,0)$，$C(0,2,4)$，

设$AP=GQ=h(0<h<4)$，

则$P(0,-2,h)$，$Q(\sqrt{3},1,4-h)$，$\overrightarrow{PC}=(0,4,4-h)$，$\overrightarrow{QC}=(-\sqrt{3},1,h)$，

设平面α的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=4y+(4-h)z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{QC}=-\sqrt{3}x+y+hz=0,\end{cases}$ 取$\vec{n}=(5h-4,\sqrt{3}h-4\sqrt{3},4\sqrt{3})$，

易得圆柱底面O的一个法向量为$\vec{m}=(0,0,1)$，

则$\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7h^2-16h+28}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7\times\left(h-\frac{8}{7}\right)^2+\frac{132}{7}}}$，

当$h=\dfrac{8}{7}$时，$\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle$取得最大值为$\dfrac{\sqrt{77}}{11}$，

所以平面α与圆柱底面O所成夹角的正弦值的最小值为$\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$. …………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为$f'(x)=6x^2-3$，$f'(0)=-3$，$f(0)=0$，

所以在$x=0$处的切线方程为$y=-3x$. ……………………………………（2 分）

（2）设切点为(x_0,y_0)，$f'(x_0)=6x_0^2-3$，则切线方程为$y=3(2x_0^2-1)x-4x_0^3$，

又点$P(-1,t)$在切线上，则$t=-4x_0^3-6x_0^2+3$.

令 $g(x_0)=-4x_0^3-6x_0^2+3$，$g'(x_0)=-12x_0^2-12x_0=-12x_0(x_0+1)$，

则在 $(-\infty，-1)$，$(0，+\infty)$ 上，$g'(x_0)<0$，$g(x_0)$ 递减；

在 $(-1，0)$ 上，$g'(x_0)>0$，$g(x_0)$ 递增.

$g(-1)=1$，$g(0)=3$，所以 $t\in(1，3)$. ……………………………………………（7 分）

（3）过点 $A(0，0)$，$B(-1，-1)$ 分别存在 1 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切；

过点 $C(-1，3)$，$D(1，-1)$ 分别存在 2 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切；

过点 $E(1，-2)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切. ……………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

（1）解：由题意可知 $a_1=\frac{1}{3}$，$b_1=\frac{2}{3}$， ……………………………………………（2 分）

从而 $a_2=\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{3}$，$b_2=\frac{2}{3}a_1+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)b_1=\frac{5}{9}$. ………………………（4 分）

（2）证明：由题意知 $P(X_n=2)=a_n$，$P(X_n=1)=b_n$，$P(X_n=0)=1-a_n-b_n$，

由全概率公式得：$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}b_n+0\times(1-a_n-b_n)=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$，①

$b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)b_n+1\times(1-a_n-b_n)=-\frac{1}{3}a_n-\frac{1}{2}b_n+1$，②

①×2＋②得：

$$2a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{6}b_n+1=\frac{1}{6}(2a_n+b_n)+1\Rightarrow 2a_{n+1}+b_{n+1}-\frac{6}{5}=\frac{1}{6}\left(2a_n+b_n-\frac{6}{5}\right),$$

即：$\dfrac{2a_{n+1}+b_{n+1}-\frac{6}{5}}{2a_n+b_n-\frac{6}{5}}=\dfrac{1}{6}$，

即 $\left\{2a_n+b_n-\frac{6}{5}\right\}$ 是以 $\frac{1}{6}$ 为公比，以 $2a_1+b_1-\frac{6}{5}=\frac{2}{15}$ 为首项的等比数列.

………………………………………………………………………………………………（8 分）

（3）解：由（2）知：$2a_n+b_n-\frac{6}{5}=\frac{2}{15}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$，

所以 $E(X_n)=2a_n+b_n+0\times(1-a_n-b_n)=\frac{2}{15}\bullet\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{6}{5}$. ……………………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

（1）解：直线l： $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，联立抛物线方程得： $x^2-7px+\frac{p^2}{4}=0$,

设$A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$，所以$x_1+x_2=7p$，则$|AB|=x_1+x_2+p=8p=16\Rightarrow p=2$,

所以抛物线C的标准方程为$y^2=4x$，准线方程为$x=-1$．……………………………（6 分）

（2）证明：设直线l： $x=my+1$，则$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1\end{cases}\Rightarrow y^2-4my-4=0$，

所以$y_1+y_2=4m,\ y_1y_2=-4$,

又$k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{4}{y_1},\ l_{OA}$：$y=\frac{4}{y_1}x$，所以$M\left(-2,\ \frac{-8}{y_1}\right)$，同理$N\left(-2,\ \frac{-8}{y_2}\right)$,

设圆上任意一点为$P(x,\ y)$，则圆的方程为：$(x+2)^2+\left(y+\frac{8}{y_1}\right)\left(y+\frac{8}{y_2}\right)=0$,

化解得：$(x+2)^2+y^2+8\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)y+\frac{64}{y_1y_2}=(x+2)^2+y^2-8my-16=0$,

令$y=0\Rightarrow x=2或x=-6$，所以以MN为直径的圆过定点$(2,\ 0)$和$(-6,\ 0)$．

………………………………………………………………………………（12 分）