黄冈市 2023 年高三 9 月调考数学答案

1. D　2.A　3.C　4.A　5.A　6.D　7.D　8.C

9.CD　10.ABC　11.ABD　12.BCD

13. $\frac{3\pi}{4}$　　14. $[5,+\infty)$　　15. $27-18\sqrt{2}$　　16. $(-\infty,2\ln 2-2)$

17.（1）依题意有 $2(a_1+a_2)=a_1+5+2, \because a_1=1, \therefore a_2=3$

又 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\therefore d=2, \therefore a_n=2n-1$.　　　　…………5 分

(2)由（1）可得 $S_n=n^2. \therefore b_n=\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2})$.

$b_1=\frac{1}{4}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3^2}), b_2=\frac{1}{4}(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}), b_3=\frac{1}{4}(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}), \cdots$，$b_{n-1}=\frac{1}{4}(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2})$.

$\therefore T_n=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2})<\frac{1}{4}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{16}$.　　　　…………10 分

18.（1）$\because$ 点 $(1,f(1))$ 在切线 $x-y+1=0$ 上，$\therefore f(1)=3-a+b=2$, ①

$f'(x)=3x^2-2ax+b, f'(1)=3-2a+b=1$, ②

联立①②解得 $a=1, b=0$.　　　　…………5 分

(2)依题意有 $f'(x)=3x^2-2ax+b, f'(1)=3-2a+b=0, b=2a-3$,

且 $\Delta=4a^2-12(2a-3)=4(a^2-6a+9)>0, \therefore a\neq 3$.

$\frac{f(x)}{x}=x^2-ax+\frac{2}{x}+2a-3$. $(\frac{f(x)}{x})'=2x-a-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-ax^2-2}{x^2}$.

则 $x\in[2,3]$ 时，$2x^3-ax^2-2\geq 0$，即 $a\leq\frac{2x^3-2}{x^2}.2\leq x\leq 3$.

令 $g(x)=\frac{2x^3-2}{x^2}, 2\leq x\leq 3$. $g'(x)=2+\frac{4}{x^3}>0$，$\therefore a\leq g(x)_{\min}=g(2)=\frac{7}{2}$.

又 $a\neq 3$, $\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty,3)\cup\left(3,\frac{7}{2}\right]$　　　　…………12 分

19.（1） $f(x)=a-2b+2bx-ax^2=-(x-1)(ax+a-2b).\because a,b\in \boldsymbol{R}^+$

$\therefore f(x)>0$ 的解集等价于 $(x-1)(x-\frac{2b-a}{a})<0$ 的解集.

当 $\frac{2b-a}{a}<1$ 即 $b<a$ 时不等式的解集为 $\left(\frac{2b-a}{a},1\right)$

当 $\frac{2b-a}{a}=1$ 即 $b=a$ 时不等式的解集为 Φ

当 $\frac{2b-a}{a}>1$ 即 $b>a$ 时不等式的解集为 $\left(1,\frac{2b-a}{a}\right)$ …………5 分

（2）$\because f(1)=0,\ f(0)=a-2b.$对称轴为 $x=\frac{b}{a}>0$. 若 $f(x)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上的最小值为 $a-2b$,

$\therefore\begin{cases}f(0)<0,\\ \left|\frac{b}{a}-0\right|\geq\left|2-\frac{b}{a}\right|.\end{cases}\therefore\begin{cases}a<2b\\ \frac{b}{a}\geq 1\end{cases}$，$\therefore \frac{b}{a}\geq 1$. …………12 分

20.（1）$f(x)=\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}+2=-4\cos(x+\frac{\pi}{3}-\theta)\cos(x-\frac{\pi}{6}-\theta)-2+2=-4\cos(x+\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(x+\frac{\pi}{3}-\theta)$

$=-2\sin(2x+\frac{2\pi}{3}-2\theta)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3}-2\theta)$.

若 $f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{12},0)$对称，则 $\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}-2\theta=k\pi,\therefore -2\theta=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$\theta=-\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$.

$\therefore \theta=-\frac{\pi}{12},\therefore\ f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

若 $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\sin 2x=\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,同理可得 $\cos 2x=\frac{1}{7}$.

$\therefore\ f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})=2(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6})=2\times\frac{4\sqrt{3}\bullet\sqrt{3}-1\times 1}{14}=\frac{11}{7}$.

…………6 分

(2) 若函数 $g(x)$的图象与 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称，则

$g(x)=f(\frac{\pi}{4}-x)=2\sin(2(\frac{\pi}{4}-x)-\frac{\pi}{6})=-2\sin(2x-\frac{\pi}{3}).$

$\because g(-\frac{5\pi}{12})=2\sin\frac{7\pi}{6}=-1.$ $g(x)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},t\right]$上的值域为$[-1,2]$， $\therefore -2\le 2\sin(2x-\frac{\pi}{3})\le 1.$

且$\because g(-\frac{5\pi}{12})=-1$. 结合函数 $g(x)$的图象知$-\frac{\pi}{2}\le 2t-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{6}$. $\therefore -\frac{\pi}{12}\le t\le\frac{\pi}{4}$

t 的取值范围为$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$. …………12 分

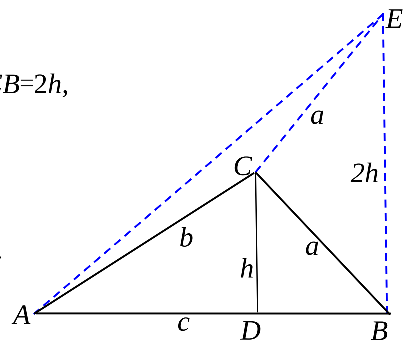
21.（1）在△ ABC 中， $a+b=c+h$, 若 $c=3h$.

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b)^2-c^2-2ab}{2ab}=\frac{(c+h)^2-c^2}{2ab}-1=\frac{h^2+2ch}{2ab}-1.$$

又$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ch,\therefore ab=\frac{ch}{\sin C}$. $\therefore\frac{1+\cos C}{\sin C}=\frac{h^2+2ch}{2ch}=1+\frac{h}{2c}=\frac{7}{6}$.

$\therefore\dfrac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos^2\frac{C}{2}}=\tan\frac{C}{2}=\frac{6}{7}$. $\therefore\tan C=\dfrac{2\times\frac{6}{7}}{1-\frac{36}{49}}=\frac{84}{13}$. …………6 分

（2）由（1）知$1+\frac{h}{2c}=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$.



如图，在△ ABC 中，过 B 作 AB 的垂线 EB，且使 $EB=2h$,

则 $CE=CB=a$,

$\therefore a+b\ge\sqrt{c^2+4h^2},\therefore (c+h)^2\ge c^2+4h^2,\therefore 0<\frac{h}{c}\le\frac{2}{3}$.

$\therefore 1<\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}\le\frac{4}{3},\therefore\frac{3}{4}\le\tan\frac{C}{2}<1$.

$\sin C=\dfrac{2\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=\dfrac{2}{\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}+\tan\frac{C}{2}}$, $\therefore\frac{24}{25}\le\sin C<1$. …………12 分

22.（1）$\because f'(x)=\dfrac{x^2-2x+a}{x}$， $x>0$， $\Delta=4-4a$. 令 $g(x)=x^2-2x+a$

①当 $\Delta\le 0$ 即 $a\ge 1$ 时， $f'(x)\ge 0$, $f(x)$ 单调递增，无极值点；

②当 $\Delta>0$ 即 $a<1$ 时，函数 $g(x)$有两个零点 $x_1=1-\sqrt{1-a}, x_2=1+\sqrt{1-a}$,

(i)当 $a\le 0$ 时 $x_1\le 0, x_2>1$, 当$x\in(0,x_2)$时$f'(x)<0$, $f(x)$递减，

当$x\in(x_2,+\infty)$时$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增， $f(x)$ 有一个极小值点；

(ii)当 $0<a<1$ 时 $0<x_1<1, x_2>1$, 当$x\in(0,x_1)$与$(x2,+\infty)$时$f'(x)>0$, $f(x)$递增，

当$x\in(x_1,x_2)$时$f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减， $f(x)$ 有两个极值点.

综上：当 $a\ge 1$ 时 $f(x)$ 无极值点；当 $0<a<1$ 时 $f(x)$ 有两个极值点；当 $a\le 0$ 时 $f(x)$ 有一个极小值点.　　　　　　　　　　…………5 分

(2) 不等式 $f(x)\le x(\mathrm{e}^x-2x+\dfrac{1}{2}x^2)$ 恒成立，即 $a(\ln x+x)\le x\mathrm{e}^x-1$.

$\therefore x\mathrm{e}^x-a\ln x\mathrm{e}^x-1\ge 0$.令$x\mathrm{e}^x=t, t>0, \therefore t-a\ln t-1\ge 0$.

令$h(t)=t-\ln t-1$, $h'(t)=\dfrac{t-a}{t}$,

当$a\le 0$时, $h'(t)\ge 0, h(t)$单调递增，又 $h(1)=0, \therefore t\in(0,1)$时$h(t)<0$, 不合题意，$\therefore a>0$.

当 $0<t<a$ 时, $h(t)$单调递减，当 $t>a$ 时 $h(t)$单调递增， $h(t)_{\min}=h(a)=a-a\ln a-1$.

而 $h(1)=0$, $\therefore h(a)=a-a\ln a-1\le 0$.

令 $m(x)=x-x\ln x-1, m'(x)=-\ln x$, 当 $x\in(0,1)$ 时 $m(x)$单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $m(x)$单调递减， $\therefore m(x)_{\min}=m(1)=0$， 即 $\therefore h(a)=a-a\ln a-1\ge 0$.

$\therefore h(a)=a-a\ln a-1=0$. $\therefore a=1$.　　　　…………12 分