

# 2023-2024 学年秋学期高三年级期初调研考试

## 数学学科试卷

时间： 120 分钟 满分： 150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{1,2,3\}$ ,  $B = \{x \mid \frac{x-2}{x} \leq 0, x \in Z\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $\{1,2\}$                       B.  $\{0,1,2,3\}$                       C.  $\{1,2,3\}$                       D.  $\{0,1,2\}$

2. 已知复数  $z = \frac{2-i}{3+4i}$ , 则  $|\bar{z}| =$  ( )

- A.  $\sqrt{5}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       C.  $\frac{1}{5}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $2S_3, 3S_5, 4S_6$  成等差数列, 则数列  $\{a_n\}$  的公比  $q =$  ( )

- A. 1 或  $-\frac{1}{2}$                       B. -1 或  $\frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{2}$

4. 若双曲线  $ky^2 - 8x^2 = 8$  的焦距为 6, 则该双曲线的离心率为 ( )

- A.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C. 3                      D.  $\frac{10}{3}$

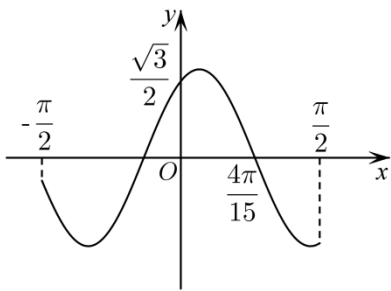
5. 向量旋转具有反映点与点之间特殊对应关系的特征, 在电子信息传导方面有重要应用.平面向量旋转公式在中学数学中用于求旋转相关点的轨迹方程具有明显优势, 已知对任意平面向量  $\vec{AB} = (x, y)$ , 把  $\vec{AB}$  绕其起点沿逆时针方向旋转  $\theta$  角得到向量  $\vec{AP} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ , 叫做把点  $B$  绕点  $A$  沿逆时针方向旋转  $\theta$  角得到点  $P$ .已知平面内点  $A(1,2)$ , 点  $B(1+\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$ , 把点  $B$  绕点  $A$  沿顺时针方向旋转  $\frac{\pi}{4}$  后得到点  $P$ , 则点  $P$  的坐标为 ( )

- A.  $(-2,1)$                       B.  $(4,1)$                       C.  $(2,-1)$                       D.  $(0,-1)$

6. 已知  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{5}, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$  ( )

- A.  $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$                       B.  $\frac{4}{5}$                       C.  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{10}$

7. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则  $f(\pi)$  的值为 ( )



- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 若关于  $x$  的方程  $\frac{x}{e^x} + \frac{e^{x+1}}{x+e^x} + m = 0$  有三个不等的实数解  $x_1, x_2, x_3$ , 且  $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ , 其中  $m \in \mathbb{R}$ ,

$e = 2.71828 \dots$  为自然对数的底数, 则  $\left(\frac{x_1}{e^{x_1}} + 1\right)^2 \left(\frac{x_2}{e^{x_2}} + 1\right) \left(\frac{x_3}{e^{x_3}} + 1\right)$  的值为 ( )

- A.  $e$       B.  $e^2$       C.  $e+1$       D.  $(e+1)^2$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知  $a > 0, b > 0, a + 2b = 1$ , 下列结论正确的是 ( )

- A.  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$  的最小值为 9      B.  $a^2 + b^2$  的最小值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$   
 C.  $\log_2 a + \log_2 b$  的最小值为 -3      D.  $2^a + 4^b$  的最小值为  $2\sqrt{2}$

10. “天宫课堂”是为发挥中国空间站的综合效益, 推出的首个太空科普教育品牌. 为了解学生对“天宫课堂”的喜爱程度, 某学校从全校学生中随机抽取 200 名学生进行问卷调查, 得到以下数据, 则 ( )

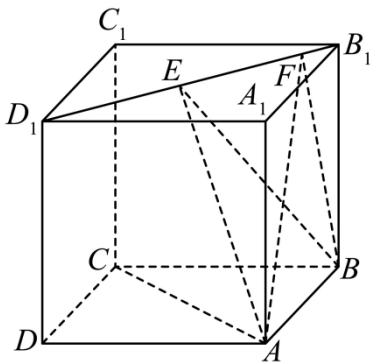
	喜欢天宫课堂	不喜欢天宫课堂
男生	80	20
女生	70	30

参考公式及数据: ①  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,  $n = a+b+c+d$ . ② 当  $\alpha = 0.05$  时,  $\chi_\alpha = 3.841$ .

- A. 从这 200 名学生中任选 1 人, 已知选到的是男生, 则他喜欢天宫课堂的概率为  $\frac{2}{5}$   
 B. 用样本的频率估计概率, 从全校学生中任选 3 人, 恰有 2 人不喜欢天宫课堂的概率为  $\frac{9}{64}$   
 C. 根据小概率值  $\alpha = 0.05$  的独立性检验, 认为喜欢天宫课堂与性别没有关联  
 D. 对抽取的喜欢天宫课堂的学生进行天文知识测试, 男生的平均成绩为 80, 女生的平均成绩为 90, 则参加测试的学生成绩的均值为 85

11. (多选题) 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为  $a$ , 线段  $B_1D_1$  上有两个动点  $E, F$ , 且  $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ,

以下结论正确的有 ( )



- A.  $AC \perp BE$
- B. 点 A 到平面  $BEF$  的距离为定值
- C. 三棱锥  $A-BEF$  的体积是正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  体积的  $\frac{1}{12}$
- D. 异面直线  $AE, BF$  所成的角为定值

12. 已知  $0 < x < y < \pi$ ,  $e^y \sin x = e^x \sin y$ , 则 ( )

- A.  $\sin x < \sin y$
- B.  $\cos x > -\cos y$
- C.  $\sin x > \cos y$
- D.  $\cos x > \sin y$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知“ $\exists x \in [\frac{1}{2}, 2], x^2 - mx + 1 \leq 0$ ”是假命题, 则实数  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

14. 数据 23, 76, 45, 37, 58, 16, 28, 15, 53, 24, 42, 36 的第 25 百分位数是\_\_\_\_\_.

15. 已知随机变量  $X, Y$ , 其中  $X \sim B(6, \frac{1}{3}), Y \sim N(\mu, \sigma^2), E(X) = E(Y), P(|Y| < 2) = 0.3$ , 则  $P(Y > 6) =$ \_\_\_\_\_.

16. 定义在实数集  $\mathbb{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = 2 + \sqrt{4f(x) - f^2(x)}$ , 则  $f(2021) =$ \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos B(\sqrt{3}a - b \sin C) = b \sin B \cos C$

(1) 求  $B$ ;

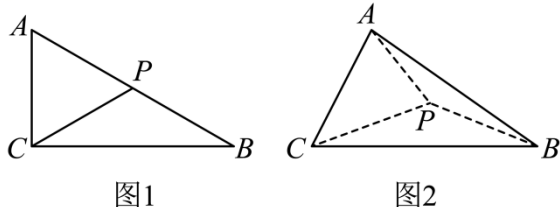
(2) 若  $c = 2a, \triangle ABC$  的面积为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

18. 已知等差数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$  满足  $a_1 = b_1 = 1, a_1 + a_2 = b_3, 15a_1 + a_9 = b_6$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 记  $c_n = \log_2 b_{n+1}$ , 求数列  $\left\{ \frac{c_n^2}{a_n a_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

19. 如图 1, 在  $\triangle ABC$  中,  $AC = 2$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $P$  是  $AB$  边的中点, 现把  $\triangle ACP$  沿  $CP$  折成如图 2 所示的三棱锥  $A-BCP$ , 使得  $AB = \sqrt{10}$ .



(1) 求证: 平面  $ACP \perp$  平面  $BCP$ ;

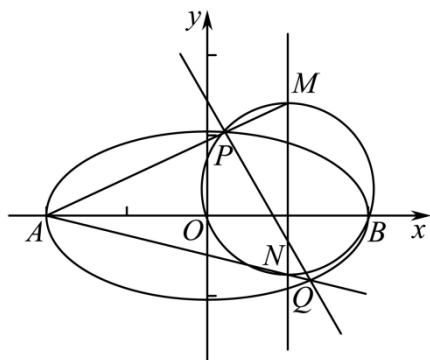
(2) 求二面角  $B-AC-P$  的余弦值.

20. 现有甲、乙、丙、丁等 6 人去参加新冠疫苗的接种排队, 有  $A, B, C, D$  4 个不同的窗口供排队等候接种, 每个窗口至少有一位同学等候.

(1) 求甲、乙两人在不同窗口等候的概率;

(2) 设随机变量  $X$  表示在窗口  $A$  排队等候的人数, 求随机变量  $X$  的期望.

21. 已知椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的左右顶点为  $A, B$ , 直线  $l: x = 1$ . 已知  $O$  为坐标原点, 圆  $G$  过点  $O, B$  交直线  $l$  于  $M, N$  两点, 直线  $AM, AN$  分别交椭圆于  $P, Q$ .



(1) 记直线  $AM, AN$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 求  $k_1 \cdot k_2$  的值;

(2) 证明直线  $PQ$  过定点, 并求该定点坐标.

22. 已知函数  $f(x) = ae^x - e^{-x} - (a+1)x (a \in \mathbb{R})$ ,  $f(x)$  既存在极大值, 又存在极小值.

(1) 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 当  $0 < a < 1$  时,  $x_1, x_2$  分别为  $f(x)$  的极大值点和极小值点, 且  $f(x_1) + kf(x_2) > 0$ , 求实数  $k$  的取值范围.