2023-2024 学年秋学期高三年级期初调研考试

数学学科试卷

时间： 120 分钟　满分：150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\left\{x|\dfrac{x-2}{x}\le 0,x\in Z\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2\}$

【答案】C

【详解】由题意可得：$B=\left\{x\,|\,\dfrac{x-2}{x}\le 0,x\in Z\right\}=\{1,2\}$

又 $A=\{1,2,3\}$

$\therefore A\cup B=\{1,2,3\}$

故选：C

【点睛】本题考查并集的概念及运算，考查分式不等式的解法，属于基础题.

2. 已知复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$， 则 $|\bar{z}|=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【详解】因为 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\dfrac{2}{25}-\dfrac{11}{25}\mathrm{i}$

则 $\bar{z}=\dfrac{2}{25}+\dfrac{11}{25}\mathrm{i}$，所以 $|\bar{z}|=\sqrt{\left(\dfrac{2}{25}\right)^2+\left(\dfrac{11}{25}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

故选:B.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $2S_3$，$3S_5$，$4S_6$ 成等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$（　　）

A. 1 或 $-\dfrac{1}{2}$　　B. -1 或 $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

【答案】A

【详解】$\because 2S_3$，$3S_5$，$4S_6$成等差数列，$\therefore 6S_5=2S_3+4S_6$，

即$6\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\right)=2\left(a_1+a_2+a_3\right)+4\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6\right)$，

整理得$6a_4+6a_5=4a_4+4a_5+4a_6$，即$4a_6-2a_5-2a_4=0$，

$\because a_4\neq 0$，$\therefore 2q^2-q-1=0$，解得$q=1$或$q=-\dfrac{1}{2}$.

故选：A.

4. 若双曲线$ky^2-8x^2=8$的焦距为6，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　　　B. $\dfrac{3}{2}$　　　　C. 3　　　　D. $\dfrac{10}{3}$

【答案】A

【详解】因为$ky^2-8x^2=8$为双曲线，所以$k\neq 0$，化为标准方程为：$\dfrac{y^2}{\frac{8}{k}}-\dfrac{x^2}{1}=1$.

由焦距为6可得：$c=\sqrt{\dfrac{8}{k}+1}=3$，解得：$k$=1.

所以双曲线为$\dfrac{y^2}{8}-\dfrac{x^2}{1}=1$.

所以双曲线的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{\sqrt{8}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

故选：A

5. 向量旋转具有反映点与点之间特殊对应关系的特征，在电子信息传导方面有重要应用.平面向量旋转公式在中学数学中用于求旋转相关点的轨迹方程具有明显优势，已知对任意平面向量$\overrightarrow{AB}=(x,y)$，把$\overrightarrow{AB}$绕其起点沿逆时针方向旋转$\theta$角得到向量$\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$，叫做把点$B$绕点$A$沿逆时针方向旋转$\theta$角得到点$P$.已知平面内点$A(1,2)$，点$B\left(1+\sqrt{2},2-2\sqrt{2}\right)$，把点$B$绕点$A$沿顺时针方向旋转$\dfrac{\pi}{4}$后得到点$P$，则点$P$的坐标为（　　）

A. $(-2,1)$　　　　B. $(4,1)$　　　　C. $(2,-1)$　　　　D. $(0,-1)$

【答案】D

【详解】解：由题意可知$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)$，把点$B$绕点$A$逆时针方向旋转$\dfrac{7\pi}{4}$，得到点$P$，

设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=\left(\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{4}+2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4},\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}-2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{4}\right)=(-1,-3)$,

所以 $\begin{cases}x-1=-1\\ y-2=-3\end{cases}$，解得 $x=0$， $y=-1$,

所以点 P 的坐标为 $(0,-1)$,

故选：D.

6. 已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5},\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

【答案】C

【详解】解：因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$，又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$,

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{4}{5}$,

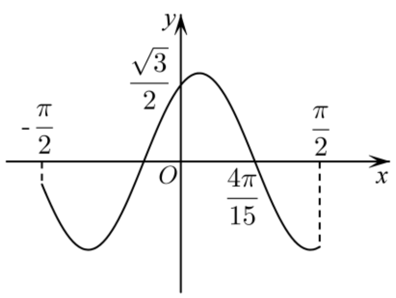
所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$

$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

故选：C

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$， $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则 $f(\pi)$ 的值为（　　）



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【详解】由 $f\left(0\right)=\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，

由 $\omega\cdot\dfrac{4\pi}{15}+\dfrac{\pi}{3}=k\pi,k\in Z$，又 $\omega>0$，得 $\omega=\dfrac{15}{4}k-\dfrac{5}{4},k\in N^{*}$，

观察图象知，$\begin{cases}\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}<\dfrac{4\pi}{15}\\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}>\dfrac{4\pi}{15}\end{cases}$，解得 $\dfrac{15}{8}<\omega<\dfrac{15}{4}$，则 $k=1,\omega=\dfrac{5}{2}$，

因此， $f\left(x\right)=\sin(\dfrac{5}{2}x+\dfrac{\pi}{3})$，所以 $f\left(\pi\right)=\sin(\dfrac{5}{2}\pi+\dfrac{\pi}{3})=\sin(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}$.

故选：C

8. 若关于 x 的方程 $\dfrac{x}{e^{x}}+\dfrac{e^{x+1}}{x+e^{x}}+m=0$ 有三个不等的实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<0<x_2<x_3$，其中 $m\in R$，$e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数，则 $\left(\dfrac{x_1}{e^{x_1}}+1\right)^2\left(\dfrac{x_2}{e^{x_2}}+1\right)\left(\dfrac{x_3}{e^{x_3}}+1\right)$ 的值为（　　）

A. e　　　　B. e^2　　　　C. $e+1$　　　　D. $\left(e+1\right)^2$

【答案】B

【详解】解：由关于的 x 方程 $\dfrac{x}{e^{x}}+\dfrac{e^{x+1}}{x+e^{x}}+m=0\Rightarrow\dfrac{x}{e^{x}}+\dfrac{e}{\dfrac{x}{e^{x}}+1}+m=0$，

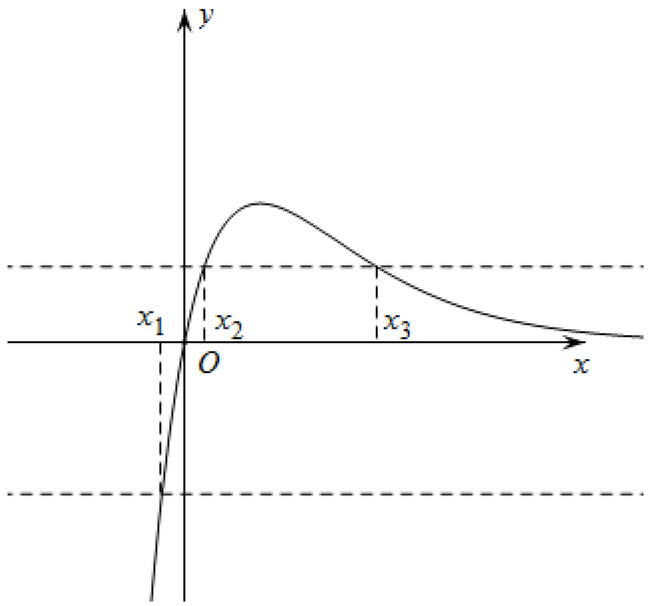
令 $\dfrac{x}{e^{x}}=t$，则有 $t+\dfrac{e}{t+1}+m=0\Rightarrow t^2+(m+1)t+m+e=0$，

令函数 $g(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^{x}}$，

当 $x<1$ 时 $g'(x)>0$，当 $x>1$ 时 $g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

其图象如下：



要使关于 x 的方程 $\frac{x}{e^x}+\frac{e^{x+1}}{x+e^x}+m=0$ 有 3 个不相等的实数解 x_1， x_2， x_3，

且 $x_1<0<x_2<x_3$，

结合图象可得关于 t 的方程 $t^2+(m+1)t+m+e=0$ 一定有两个实根 t_1， $t_2(t_1<0<t_2)$，

且 $\frac{x_1}{e^{x_1}}=t_1$， $\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{x_3}{e^{x_3}}=t_2$， 由韦达定理知， $t_1+t_2=-(m+1)$， $t_1t_2=m+e$，

$\therefore (\frac{x_1}{e^{x_1}}+1)^2(\frac{x_2}{e^{x_2}}+1)(\frac{x_3}{e^{x_3}}+1)=[(t_1+1)(t_2+1)]^2$，

又 $(t_1+1)(t_2+1)=t_1t_2+(t_1+t_2)+1=(e+m)-(1+m)+1=e$，

可得 $\left(\frac{x_1}{e^{x_1}}+1\right)^2\left(\frac{x_2}{e^{x_2}}+1\right)\left(\frac{x_3}{e^{x_3}}+1\right)=e^2$，

故选：B．

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知 $a>0$， $b>0$， $a+2b=1$，下列结论正确的是（　　）

A．$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 9　　　　B．a^2+b^2 的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\log_2 a+\log_2 b$ 的最小值为 -3　　　　D．2^a+4^b 的最小值为 $2\sqrt{2}$

【答案】AD

【详解】因为 $a>0$， $b>0$， $a+2b=1$，

所以$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+2b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geq 5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=9$，

当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$，即$a=b=\frac{1}{3}$时取等号，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$取得最小值 9，故 A 正确；

$a^2+b^2=(1-2b)^2+b^2=5b^2-4b+1=5\left(b-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$，

根据二次函数的性质可知，当$b=\frac{2}{5}$，$a=\frac{1}{5}$时，a^2+b^2取得最小值$\frac{1}{5}$，故 B 错误；

因为$1=a+2b\geq 2\sqrt{a\cdot 2b}$，即$ab\leq\frac{1}{8}$，

当且仅当$a=2b=\frac{1}{2}$，即$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4}$时取等号，

所以$\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab\leq\log_2\frac{1}{8}=-3$，即$\log_2 a+\log_2 b$最大值$-3$，故 C 错误；

$2^a+4^b\geq 2\sqrt{2^a\cdot 4^b}=2\sqrt{2^{a+2b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当$a=2b=\frac{1}{2}$，即$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4}$时取等号，此时$2^a+4^b$取得最小值$2\sqrt{2}$，故 D 正确.

故选：AD.

10. “天宫课堂”是为发挥中国空间站的综合效益，推出的首个太空科普教育品牌.为了解学生对“天宫课堂”的喜爱程度，某学校从全校学生中随机抽取 200 名学生进行问卷调查，得到以下数据，则（　　）

	喜欢天宫课堂	不喜欢天宫课堂
男生	80	20
女生	70	30

参考公式及数据：①$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.②当$\alpha=0.05$时，$x_\alpha=3.841$.

A. 从这 200 名学生中任选 1 人，已知选到的是男生，则他喜欢天宫课堂的概率为$\frac{2}{5}$

B. 用样本的频率估计概率，从全校学生中任选 3 人，恰有 2 人不喜欢天宫课堂的概率为$\frac{9}{64}$

C. 根据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，认为喜欢天宫课堂与性别没有关联

D. 对抽取的喜欢天宫课堂的学生进行天文知识测试，男生的平均成绩为 80，女生的平均成绩为 90，则参加测试的学生成绩的均值为 85

【答案】BC

【详解】对于 A：从这 200 名学生中任选 1 人，已知选到的是男生，则他喜欢天宫课堂的概率 $P=\frac{80}{80+20}=\frac{4}{5}$，故 A 错误；

对于 B：样本中喜欢天宫课堂的频率 $\frac{80+70}{200}=\frac{3}{4}$，从全校学生中任选 3 人，

恰有 2 人不喜欢天宫课堂的概率 $P_1=\mathrm{C}_3^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$，故 B 正确；

对于 C：因为 $\chi^2=\frac{200(80\times30-70\times20)^2}{100\times100\times150\times50}=\frac{8}{3}\approx2.667<3.841$，

所以根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，认为喜欢天宫课堂与性别没有关联，故 C 正确；

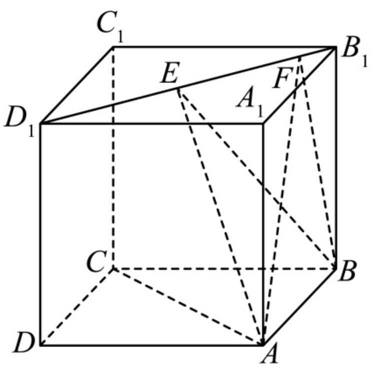
对于 D：抽取的喜欢天宫课堂的学生男、女生人数分别为 80、70，

又男生的平均成绩为 80，女生的平均成绩为 90，所以参加测试的学生成绩的均值为

$\frac{80\times80+70\times90}{80+70}=\frac{254}{3}$，故 D 错误；

故选：BC

11. （多选题）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，线段 B_1D_1 上有两个动点 E，F，且 $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，以下结论正确的有（　　）



A. $AC\perp BE$

B. 点 A 到平面 BEF 的距离为定值

C. 三棱锥 $A-BEF$ 的体积是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 体积的 $\frac{1}{12}$

D. 异面直线 AE，BF 所成的角为定值

【答案】ABC

【详解】解：对于 A，根据题意，$AC\perp BD$，$AC\perp DD_1$，且 $BD\cap DD_1=D$，所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，而 $BE\subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $AC\perp BE$，所以 A 正确；

对于 B，A 到平面 CDD_1C_1 的距离是定值，所以点 A 到 $\triangle BEF$ 的距离为定值，所以 B 正确；

对于 C，三棱锥 $A-BEF$ 的体积为

$V_{A-BEF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}EF\cdot AB\cdot BB_1\cdot sin45°=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times a\times a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{12}a^3$，三棱锥 $A-BEF$ 的体积是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 体积的 $\frac{1}{12}$，所以 C 正确；

对于 D，当点 E 在 D_1 处，F 为 D_1B_1 的中点时，异面直线 AE，BF 所成的角是 $\angle FBC_1$，当 E 在 D_1B_1 的中点时，F 在 B_1 的位置，异面直线 AE，BF 所成的角是 $\angle EAA_1$，显然两个角不相等，命题 D 错误；

故选：ABC.

12. 已知 $0<x<y<\pi$，$e^y\sin x=e^x\sin y$，则（　　）

A. $\sin x<\sin y$　　B. $\cos x>-\cos y$　　C. $\sin x>\cos y$　　D. $\cos x>\sin y$

【答案】ABC

【详解】由题意，$0<x<y<\pi$，$e^y\sin x=e^x\sin y$，得 $y-x>0$，

$\frac{e^y}{e^x}=\frac{\sin y}{\sin x}$，$e^{y-x}>1$，$\therefore\frac{\sin y}{\sin x}>1$，$\therefore\sin y>\sin x$，A 对；

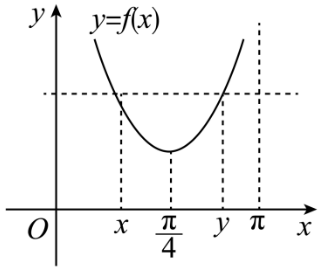
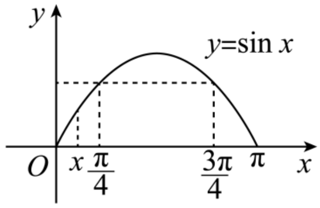
$\frac{e^y}{\sin y}=\frac{e^x}{\sin x}$，令 $f(x)=\frac{e^x}{\sin x},x\in(0,\pi)$，即有 $f(x)=f(y)$，

令 $f'(x)=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}=0,x=\frac{\pi}{4}$，

$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上递减，在 $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 上递增，

因为 $f(x)=f(y)$，$\therefore 0<x<\frac{\pi}{4}<y<\pi$，

作出函数 $f(x)=\frac{e^x}{\sin x},x\in(0,\pi)$ 以及 $y=\sin x,x\in[0,\pi]$ 大致图象如图：



则$0<\pi-y<\frac{3}{4}\pi,\sin y>\sin x$，$\therefore \sin(\pi-y)>\sin x$，结合图象则$\pi-y>x$，

$\therefore \cos(\pi-y)<\cos x$，$\therefore \cos x>-\cos y$，B 对；

结合以上分析以及图象可得$x+y>\frac{\pi}{2}$，$\therefore x>\frac{\pi}{2}-y$，

且$\frac{\pi}{4}<y<\pi,-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-y<\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \sin x>\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y$，C 对；

由 C 的分析可知，$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-y<x<\frac{\pi}{4}$，

在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}]$ 上，函数$y=\cos x$ 不是单调函数，即$\cos(\frac{\pi}{2}-y)<\cos x$不成立，即$\sin y<\cos x$不成立，故 D 错误；

故选：ABC．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知“$\exists x\in[\frac{1}{2},2],x^2-mx+1\le 0$”是假命题,则实数$m$的取值范围为________．

【答案】$(-\infty,2)$

【详解】解：由题意可知，$\forall x\in[\frac{1}{2},2],x^2-mx+1>0$是真命题

$\therefore m<x+\frac{1}{x}$对$\forall x\in[\frac{1}{2},2]$恒成立，

令$g\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$

$\therefore g'\left(x\right)=1-\frac{1}{x^2}$

令$g'\left(x\right)>0$则$1<x\le 2$；令$g'\left(x\right)<0$则$\frac{1}{2}\le x<1$；

即$g\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减，$\left(1,2\right)$上单调递增；

$\therefore g\left(x\right)_{\min}=g\left(1\right)=1+\frac{1}{1}=2$

$\therefore m<2$

故答案为：$(-\infty,2)$

14. 数据$23,76,45,37,58,16,28,15,53,24,42,36$的第 25 百分位数是__________.

【答案】23.5

【详解】先按照从小到大排序：$15,16,23,24,28,36,37,42,45,53,58,76$，共 12 个数据，$12\times25\%=3$.

第 3，4 个数据分别为$23,24$,则第 25 百分位数为$\dfrac{23+24}{2}=23.5$，

故答案为：23.5.

15. 已知随机变量X,Y，其中$X\sim B\left(6,\dfrac{1}{3}\right),Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right),E\left(X\right)=E\left(Y\right),P(|Y|<2)=0.3$，则

$P(Y>6)=$__________.

【答案】0.2

【详解】因为$X\sim B\left(6,\dfrac{1}{3}\right)$，所以$E\left(X\right)=6\times\dfrac{1}{3}=2$，

因为$Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，所以$E\left(Y\right)=\mu$，

又因为$E\left(X\right)=E\left(Y\right)$，所以$\mu=2$，

因为$Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，所以$P(Y<2)=0.5$，且$P(Y>6)=P(Y<-2)$，

又因为$P(|Y|<2)=0.3$，所以$P(Y<-2)=0.2$，所以$P(Y>6)=0.2$.

故答案为：0.2.

16. 定义在实数集 R 上的偶函数$f\left(x\right)$满足$f(x+2)=2+\sqrt{4f(x)-f^2(x)}$，则$f(2021)=$__________.

【答案】$2+\sqrt{2}$

【详解】因为$f(x+2)=2+\sqrt{4f(x)-f^2(x)}$，

所以$f(x+2)-2=\sqrt{4f(x)-f^2(x)}$，

即$(f(x+2)-2)^2=4f(x)-f^2(x)$，

即$f^2(x+2)-4f(x+2)=-\left[f^2(x)-4f(x)\right]-4$，

令$g(x)=f^2(x)-4f(x)$，则$g(x+2)=-g(x)-4$，

所以 $g(x+4)=-g(x+2)-4=g(x)$

故函数 $g\left(x\right)$ 的周期为 4，

所以 $g(2021)=g(4\times505+1)=g(1)$，

又因为 $f\left(x\right)$ 是偶函数，则 $g(x)=f^{2}(x)-4f(x)$ 为偶函数，

又因为 $g(1)=-g(-1)-4$，所以 $g(1)=-2$，即 $f^{2}(2021)-4f(2021)=-2$，

解得 $f(2021)=2\pm\sqrt{2}$，

又 $f(x+2)=2+\sqrt{4f(x)-f^{2}(x)}\geq2$，

即 $f(2021)\geq2$，即 $f(2021)=2+\sqrt{2}$.

故答案为：$2+\sqrt{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B(\sqrt{3}a-b\sin C)=b\sin B\cos C$

（1）求 B；

（2）若 $c=2a,\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{3}$

（2）$2\sqrt{3}+2$

【小问 1 详解】

由 $\cos B(\sqrt{3}a-b\sin C)=b\sin B\cos C$,及正弦定理得 $\sqrt{3}\cos B\sin A-\sin B\sin C\cos B=\sin^{2}B\cos C$，

即得 $\sqrt{3}\cos B\sin A=\sin^{2}B\cos C+\sin B\sin C\cos B=\sin B\left(\sin B\cos C+\cos B\sin C\right)$，

又因为 $\triangle ABC$ 中, $\sin\left(B+C\right)=\sin A$，

所以 $\sqrt{3}\cos B\sin A=\sin B\sin A$，

又因为 $\sin A\neq0$,所以 $\sin B=\sqrt{3}\cos B$ 即 $\tan B=\sqrt{3}$.

又 $B\in\left(0,\pi\right)$，故 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

由题意，$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 $a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

即 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 $c=2a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

由余弦定理 $b^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\times\frac{1}{2}$，解得 $b=2$.

故三角形 ABC 的周长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}+2=2\sqrt{3}+2$

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1, a_1+a_2=b_3, 15a_1+a_9=b_6$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $c_n=\log_2 b_{n+1}$，求数列 $\left\{\frac{c_n^2}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

【答案】（1）$a_n=2n-1, b_n=2^{n-1}$

（2）$S_n=\frac{n^2+n}{4n+2}$

【小问 1 详解】

设 $\{a_n\}$ 公差为 d, $\{b_n\}$ 公比为 q，则

$\begin{cases}1+1+d=q^2\\15+1+8d=q^5\end{cases}$，解得 $q=2, d=2$；

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1, b_n=2^{n-1}$.

【小问 2 详解】

$\because c_n=\log_2 2^n=n$，

$\therefore \frac{c_n^2}{a_na_{n+1}}=\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\frac{1}{4}(4n^2-1)+\frac{1}{4}}{4n^2-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

$\therefore S_n=\frac{1}{4}n+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}n+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{4}+\frac{n}{4(2n+1)}=\frac{n^2+n}{4n+2}$

19. 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，P 是 AB 边的中点，现把 $\triangle ACP$ 沿

CP 折成如图 2 所示的三棱锥 $A-BCP$，使得 $AB=\sqrt{10}$.

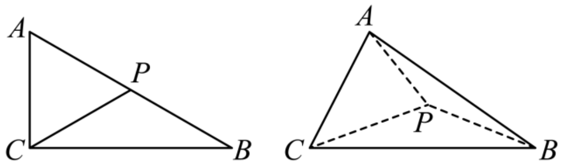


图1　　　　图2

（1）求证：平面 $ACP\perp$平面 BCP；

（2）求二面角 $B-AC-P$ 的余弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

【小问 1 详解】

在图 1 中作 $AO\perp CP$，交 CP 于 O，连接 OB，

$\because AC=2$，$\angle ACB=90^{\circ}$，$\angle ABC=30^{\circ}$，P 是 AB 边的中点，

$\therefore BC=2\sqrt{3},AB=4,AP=\dfrac{1}{2}AB=2,CP=\dfrac{1}{2}AB=2$，

$\therefore \triangle ACP$ 是等边三角形，

$\therefore AO=\sqrt{3},OC=\dfrac{1}{2}CP=1$，$AO\perp CP$，

在 $\triangle OBC$ 中，由余弦定理得 $OB^2=1+12-2\times1\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7$，

在图 2 中，$\because AB=\sqrt{10}$，$\therefore AO^2+OB^2=AB^2$，$\therefore AO\perp OB$.

又 $CP\subset$平面 BCP，$BC\subset$平面 BCP，$CP\cap BC=C$，

$\therefore AO\perp$平面 BCP，又 $AO\subset$平面 ACP，

$\therefore$平面 $ACP\perp$平面 BCP；

【小问 2 详解】

以 O 为原点，以 OC、OE、OA 为坐标轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图所示：

则 $A\left(0,0,\sqrt{3}\right),C\left(1,0,0\right),E\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=\left(1,0,-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3}\right)$，

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-\sqrt{3}z=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}y-\sqrt{3}z=0\end{cases}\Rightarrow\vec{m}=\left(\sqrt{3},3,1\right),$$

$\because OE\perp$平面 ACP，$\therefore \vec{n}=(0,1,0)$ 为平面 ACP 的一个法向量，

$$\therefore\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{3}{\sqrt{13}\times1}=\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

由图可知二面角 $B-AC-P$ 为锐角，

$\therefore$二面角 $B-AC-P$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

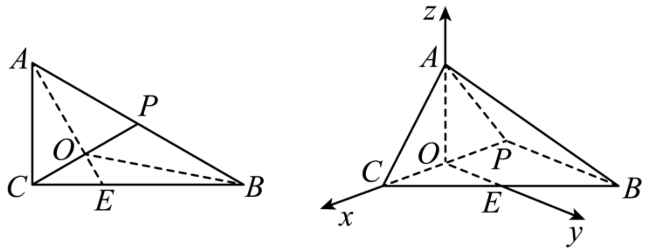


图1　　图2

20. 现有甲、乙、丙、丁等 6 人去参加新冠疫苗的接种排队，有 A、B、C、D 4 个不同的窗口供排队等候接种，每个窗口至少有一位同学等候.

（1）求甲、乙两人在不同窗口等候的概率；

（2）设随机变量 X 表示在窗口 A 排队等候的人数，求随机变量 X 的期望.

【答案】（1）$\dfrac{11}{13}$

（2）$\dfrac{3}{2}$

（2）先写出随机变量 X 的取值，再求出对应随机变量的概率，再根据期望公式进行求解 $E(X)$.

【小问 1 详解】

解：总数为 $\left(\mathrm{C}_6^3+\dfrac{\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{A}_2^2}\right)\mathrm{A}_4^4=1560$，

其中甲乙排在一起的情况为：$(\mathrm{C}_4^1+\mathrm{C}_4^2)\mathrm{A}_4^4=240$，

故甲、乙两人在不同窗口等候的概率为 $\dfrac{1560-240}{1560}=\dfrac{11}{13}$；

【小问 2 详解】

解：X 可取$1,2,3$，

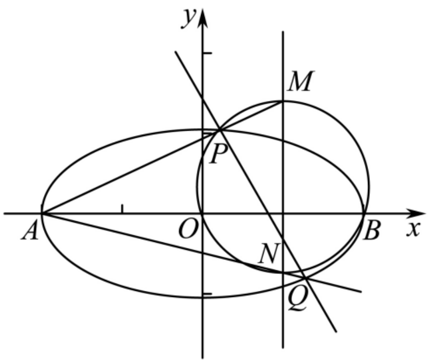
$$P\left(X=2\right)=\frac{C_6^2C_4^2A_3^3}{1560}=\frac{9}{26},$$

$$P\left(X=3\right)=\frac{C_6^3A_3^3}{1560}=\frac{1}{13},$$

$$P\left(X=1\right)=1-P\left(X=2\right)-P\left(X=3\right)=\frac{15}{26},$$

所以$E\left(X\right)=1\times\frac{15}{26}+2\times\frac{9}{26}+3\times\frac{1}{13}=\frac{3}{2}$.

21. 已知椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左右顶点为A、B，直线l：$x=1$.已知O为坐标原点，圆G过点O、B交直线l于M、N两点，直线AM、AN分别交椭圆于P、Q.



（1）记直线AM，AN的斜率分别为k_1、k_2，求$k_1\cdot k_2$的值；

（2）证明直线PQ过定点，并求该定点坐标.

【答案】（1）$k_1\cdot k_2=-\frac{1}{9}$

（2）证明见解析，$\left(\frac{10}{13},0\right)$

【小问 1 详解】

由已知可得MN为圆G的直径，所以$OM\perp ON$，则$k_{OM}\cdot k_{ON}=-1$，

根据题意不妨设$M\left(1,m\right)$，$N\left(1,n\right)$，$A\left(-2,0\right)$ 则$mn=-1$，所以

$$k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{m}{1-\left(-2\right)}\cdot\frac{n}{1-\left(-2\right)}=\frac{m}{3}\cdot\frac{n}{3}=-\frac{1}{9}，所以k_1\cdot k_2=-\frac{1}{9}.$$

【小问 2 详解】

证明：当直线 PQ 的斜率存在时，

设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+(4m^2-4)=0$，所以 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$，

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)=\dfrac{m^2-4k^2}{1+4k^2}$，

所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=-\dfrac{1}{9}\Rightarrow 9y_1y_2+x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=0$，

所以 $9\times\dfrac{m^2-4k^2}{1+4k^2}+\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}+2\left(-\dfrac{8km}{1+4k^2}\right)+4=0\Rightarrow 13m^2-16km-20k^2=0$，

$(13m+10k)(m-2k)=0$ 即 $m=-\dfrac{10}{13}k$，或 $m=2k$，

当 $m=-\dfrac{10}{13}k$ 时，直线 l 的方程为 $y=k\left(x-\dfrac{10}{13}\right)$，过定点 $\left(\dfrac{10}{13},0\right)$，

当 $m=2k$ 时，直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，过定点 $A(-2,0)$，舍去.

当直线 PQ 斜率不存在时，$M(1,1)$，$N(1,-1)$，$A(-2,0)$，

直线 AM 方程是 $y=\dfrac{1}{3}(x+2)$ 与椭圆方程 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立得 $P\left(\dfrac{10}{13},\dfrac{12}{13}\right)$，同理得 $Q\left(\dfrac{10}{13},-\dfrac{12}{13}\right)$，此时直线 PQ 的方程是 $x=\dfrac{10}{13}$，过定点 $\left(\dfrac{10}{13},0\right)$，

综上可知，直线 PQ 过定点，该定点坐标是 $\left(\dfrac{10}{13},0\right)$.

22. 已知函数 $f(x)=ae^x-e^{-x}-(a+1)x\,(a\in\mathrm{R})$，$f(x)$ 既存在极大值，又存在极小值.

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）当 $0<a<1$ 时，x_1、x_2 分别为 $f(x)$ 的极大值点和极小值点，且 $f(x_1)+kf(x_2)>0$，求实数 k 的取值范围.

【答案】（1）$(0,1)\cup(1,+\infty)$；

（2）$(-\infty,-1]$.

【小问 1 详解】

解：由 $f(x)=ae^{x}-e^{-x}-(a+1)x$ 可得 $f'(x)=ae^{x}+e^{-x}-(a+1)=\dfrac{ae^{2x}-(a+1)e^{x}+1}{e^{x}}$

$=\dfrac{(ae^{x}-1)(e^{x}-1)}{e^{x}}$，

因为函数 $f(x)$ 既存在极大值，又存在极小值，则 $f'(x)=0$ 必有两个不等的实根，则 $a>0$，

由 $f'(x)=0$ 可得 $x_1=0$，$x_2=-\ln a$，所以，$-\ln a\neq 0$，解得 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

因此，实数 a 的取值范围是 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

【小问 2 详解】

解：$\because 0<a<1$，则 $-\ln a>0$.

由 $f'(x)<0$ 可得 $0<x<-\ln a$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

由 $f'(x)>0$ 可得 $x<0$ 或 $x>-\ln a$，则函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(-\ln a,+\infty)$，

所以，$x_1=0$，$x_2=-\ln a$，则 $f(x_1)=a-1$，$f(x_2)=1-a+(a+1)\ln a$，

由题意可得 $a-1+k\left[1-a+(a+1)\ln a\right]>0$ 对任意的 $a\in(0,1)$ 恒成立，

由于此时 $f(x_2)<f(x_1)<0$，则 $k<0$，

所以，$k(a+1)\ln a>(k-1)(a-1)$，则 $\ln a<\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{a-1}{a+1}$，

构造函数 $g(x)=\ln x-\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$，其中 $0<x<1$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-2x\left(1-\dfrac{1}{k}\right)}{x(x+1)^2}=\dfrac{x^2+\dfrac{2}{k}x+1}{x(x+1)^2}$，

令 $x^2+\dfrac{2}{k}x+1=0$，则 $\Delta=\dfrac{4}{k^2}-4=\dfrac{4(1-k^2)}{k^2}$.

①当 $k\leq -1$ 时，$\Delta\leq 0$，所以 $g'(x)\geq 0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $\ln a<\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{a-1}{a+1}$，符合题意；

②当 $-1<k<0$ 时，$\Delta>0$，设方程 $x^2+\dfrac{2}{k}x+1=0$ 的两根分别为 x_3、x_4，

则 $x_3+x_4=-\frac{2}{k}>0$，$x_3x_4=1$，设 $0<x_3<1<x_4$，

则当 $x_3<x<1$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(x_3,1)$ 上单调递减，

所以当 $x_3<a<1$ 时，$g(a)>g(1)=0$，即 $\ln a>\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{a-1}{a+1}$，不合题意.

综上所述，k 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.