高三数学考试参考答案

1. A 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.
由 $N=\{x|0<x<3\}$,得 $M\cap N=(1,3)$.

2. B 【解析】本题考查复数的运算、共轭复数、复平面,考查数学运算的核心素养.
因为 $z=2-\mathrm{i}$,所以 $\mathrm{i}\bar{z}=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})=-1+2\mathrm{i}$,则 $\mathrm{i}\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于第二象限.

3. B 【解析】本题考查等比数列的定义,考查逻辑推理的核心素养.
因为 $a_n+a_{n+1}=(-\frac{1}{2})^n+(-\frac{1}{2})^{n+1}=(-\frac{1}{2})^n(1-\frac{1}{2})=-(-\frac{1}{2})^{n+1}$,所以$\{a_n+a_{n+1}\}$的首项为$-\frac{1}{4}$,且$\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}}=-\frac{1}{2}$,所以$\{a_n+a_{n+1}\}$是公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

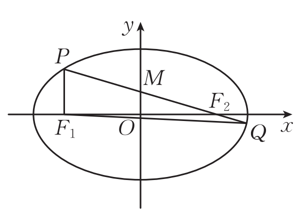
4. C 【解析】本题考查二项式定理,考查数学运算的核心素养.
$(2x-y)^5$ 的展开式中,x^2y^3 的系数为 $C_5^3\times 2^2\times(-1)^3=-40$.

5. C 【解析】本题考查台体的体积,考查应用意识.
依题意可得该牛皮鼓的体积可视为两个相同的圆台(上底面半径为 25 cm,下底面半径为 30 cm,高为 30 cm)的体积之和,所以该牛皮鼓的体积为 $2\times\frac{1}{3}\pi\times 30\times(25^2+25\times 30+30^2)=45500\pi\ \mathrm{cm}^3$.

6. D 【解析】本题考查对数大小的比较,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.
因为$\frac{3}{2}=\log_3 3\sqrt{3}<a=\log_3 6<\log_3 9=2$,$c=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{8}=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$,所以 $b>a>c$.

7. D 【解析】本题考查导数的几何意义及直线的倾斜角,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.
$y'=3x^2-4x$,则 l 的斜率为 $3k^2-4k$.因为 l 的倾斜角小于 $135°$,所以 l 的斜率小于-1 或不小于 0,则 $3k^2-4k<-1$ 或 $3k^2-4k\geqslant 0$,解得 $k\in(-\infty,0]\cup(\frac{1}{3},1)\cup[\frac{4}{3},+\infty)$.

8. D 【解析】本题考查椭圆的定义与性质,考查直观想象的核心素养.



如图,连接 F_1Q,由$\overrightarrow{MF_2}=2\overrightarrow{F_2Q}$,得$|PF_2|=4|F_2Q|$,设$|F_2Q|=t$,则$|PF_2|=4t$,$|PF_1|=2a-4t$,$|QF_1|=2a-t$.由余弦定理得$|QF_1|^2=|PF_1|^2+|PQ|^2-2|PF_1||PQ|\cos\angle F_1PQ$,即$(2a-t)^2=(2a-4t)^2+(5t)^2-2(2a-4t)\times 5t\times\frac{2a-4t}{4t}$,整理得 $t=\frac{5}{14}a$,则$|F_1F_2|=\sqrt{(4t)^2-(2a-4t)^2}=\sqrt{16at-4a^2}=\frac{2\sqrt{21}}{7}a$,故 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{2a}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

9. BCD 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质、三角恒等变换,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.
因为 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})$,所以 $f(x)$的最小正周期为 2π.因为 $f(\frac{5\pi}{4})=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$,$f(-\frac{5\pi}{4})$

$=\sin(-\pi)=0$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{4}$对称,$f(x)$的图象关于点$(-\frac{5\pi}{4},0)$对称.

$f(x)+f(-x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(-x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos x$.

10. ACD 【解析】本题考查统计中的极差、中位数、平均数、方差、百分位数,考查数据处理能力与推理论证能力.

对于 A 选项,如果删去的不是最大值或最小值,那么极差不变,所以 A 正确.

对于 B 选项,删除前有 6 个数据,中位数是按从小到大的顺序排列后中间两个数的平均数,因为任何两个数据都不相等,所以中位数不会等于 6 个数据中的任何一个,而删除后有 5 个数据,中位数是 6 个数据中的某一个,所以 B 错误.

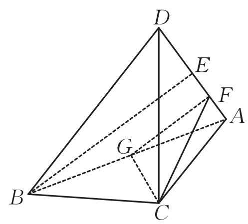
对于 C 选项,平均数不变意味着删去的数据刚好等于平均数,在方差公式中,分子不变,分母变小,所以方差变大,所以 C 正确.

对于 D 选项,平均数不变意味着删去的数据刚好等于平均数,在按从小到大的顺序排列的 6 个数据中,因为 $6\times20\%=1.2$,$5\times20\%=1$,所以原数据的 20%分位数是第 2 个数,新数据的 20%分位数是前 2 个数的平均数,且该数值小于第 2 个数,所以 D 正确.

11. BC 【解析】本题考查抽象函数与具体函数的奇偶性,考查逻辑推理与数学抽象的核心素养.

令 $x=y=0$,得 $f(0)=0$,令 $y=0$,得 $f(x)=xf(0)=0$,则 $f(-x)=f(x)=-f(x)=0$,所以 $f(x)$既是奇函数又是偶函数. 由 $g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)=(x+1)[(x+1)^2-1]$,得 $g(x)=x^3-x$,因为 $g(-x)=-g(x)$,所以 $g(x)$是奇函数.

12. ACD 【解析】本题考查立体几何初步中的体积、距离、二面角,考查空间想象能力与运算求解能力.



如图,取 AB 的中点 G,连接 CG,因为平面 $ABC\perp$平面 ABD,且平面 $ABC\cap$平面 $ABD=AB$,所以 $CG\perp$平面 ABD. 取 AD 的中点 E,连接 BE,因为 $AB=BD$,所以 $BE\perp AD$,则 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=2\sqrt{2}$. 因为 $CG=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=\sqrt{6}$,A 正确. 取 AE 的中点 F,连接 FG,CF,则 $FG/\!/BE$,所以 $FG\perp AD$. 因为 $CG\perp$平面 ABD,所以 $CG\perp AD$,又 $CG\cap FG=G$,所以 $AD\perp$平面 CFG,则 $AD\perp CF$,则 $CF=\sqrt{CG^2+FG^2}=\frac{\sqrt{35}}{2}$,$\angle CFG$ 为二面角 $B-AD-C$ 的平面角,

且 $\tan\angle CFG=\frac{CG}{FG}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$,B 错误,C 正确. 设$\triangle ABD$,$\triangle ABC$ 的外心分别为 K,M,则 $GK\perp AB$,又平面 $ABD\perp$平面 ABC,所以 $GK\perp$平面 ABC. 设三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心为 O,则 $OK\perp$平面 ABD,$OM\perp$平面 ABC,所以四边形 $OMGK$ 为矩形,则 $OK=MG=\frac{1}{3}CG=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心到平面 ABD 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，D 正确.

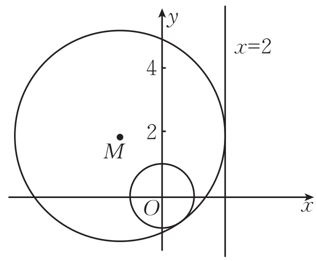
13. $4\sqrt{2}$ **【解析】本题考查双曲线的性质，考查数学运算的核心素养.**

依题意可得 $2c=6$，$2a=2$，则 $c=3$，$a=1$，所以该双曲线的虚轴长为 $2b=2\sqrt{c^2-a^2}=4\sqrt{2}$.

14. $\frac{2}{3}$ **【解析】本题考查投影向量与平面向量的基本定理，考查直观想象的核心素养.**

在矩形 $ABCD$ 中，因为向量$\overrightarrow{AE}$在向量$\overrightarrow{AD}$上的投影向量为$\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，又$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$，所以 $\lambda-\mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

15. $y^2=1-2x$ **【解析】本题考查圆与圆的位置关系、直线与圆的位置关系，考查直观想象与数学运算的核心素养.**



设 $M(x,y)$，点 M 到直线 $x=2$ 的距离为 d，如图，M 只能在直线 $x=2$ 的左侧，则 $d=2-x$，依题意可得 $|MO|+1=d$，即 $\sqrt{x^2+y^2}=(2-x)-1$，化简可得 $y^2=1-2x$，故圆 M 的圆心的轨迹方程为 $y^2=1-2x$.

16. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **【解析】本题考查三角恒等变换与导数的应用，考查数学建模与数学运算的核心素养.**

设 $\tan\theta=x$，则 $x>1$，$\tan 2\theta-\tan\theta=\frac{2x}{1-x^2}-x=\frac{x+x^3}{1-x^2}$.

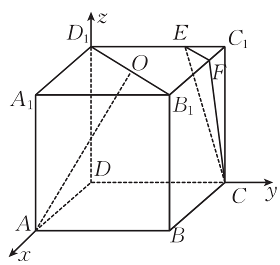
设函数 $f(x)=\frac{x+x^3}{1-x^2}(x>1)$，则 $f'(x)=\frac{-x^4+4x^2+1}{(1-x^2)^2}=-\frac{(x^2-\sqrt{5}-2)(x^2+\sqrt{5}-2)}{(1-x^2)^2}(x>1)$.

当 $1<x^2<\sqrt{5}+2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x^2>\sqrt{5}+2$ 时，$f'(x)<0$.

所以当 $x^2=\sqrt{5}+2$ 时，$f(x)$取得最大值，即 $\tan 2\theta-\tan\theta$ 取得最大值，

此时$\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}=\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{1-(\sqrt{5}+2)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

17. (1)证明：因为$\overrightarrow{ED_1}=2\overrightarrow{C_1E}$，$\overrightarrow{FB_1}=2\overrightarrow{C_1F}$，所以$\frac{ED_1}{C_1E}=\frac{FB_1}{C_1F}=2$，



所以 $EF\parallel B_1D_1$，……………………………………………… 2 分

因为 $B_1D_1\not\subset$平面 CEF，$EF\subset$平面 CEF，所以 $B_1D_1\parallel$平面 CEF.

……………………………………………………………… 4 分

(2)解：如图，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系 $Dxyz$，设 $AB=3$，

则 $A(3,0,0)$，$C(0,3,0)$，$O(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$，$E(0,2,3)$，$F(1,3,3)$，……………… 5 分

$\overrightarrow{CE}=(0,-1,3)$，$\overrightarrow{EF}=(1,1,0)$. ……………………………………… 6 分

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=-y+3z=0,\\\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=x+y=0,\end{cases}$ ………………………… 7 分

令 $x=3$，得 $\boldsymbol{m}=(3,-3,-1)$， ………………………………………………………… 8 分

因为 $\overrightarrow{AO}=(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AO},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AO}||\boldsymbol{m}|}=\frac{-12}{\frac{3\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{19}}=-\frac{8}{\sqrt{114}}$. …… 9 分

所以直线 AO 与平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{8}{\sqrt{114}}$，其平方为 $\frac{64}{114}=\frac{32}{57}$. …………… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问中，未写“$B_1D_1\not\subset$ 平面 CEF，$EF\subset$ 平面 CEF”扣 1 分.

【2】第(2)问中，建系方式不唯一，平面 CEF 的法向量不唯一，如果建系的方式相同，那么只要所求法向量与 $\boldsymbol{m}=(3,-3,-1)$ 共线即可.

18. 解：(1)在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，因为 $A+B=11C$，所以 $C=\frac{\pi}{12}$， ………………… 1 分

则 $\sin C=\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. ………………………………… 3 分

因为 $\cos A=\frac{4}{5}$，所以 $\sin A=\frac{3}{5}$， ………………………………………………………… 4 分

由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$，则 $BC=\frac{AB\sin A}{\sin C}=\frac{12}{5}$. ………………………………… 6 分

(2)由(1)知 $C=\frac{\pi}{12}$，则 $A=2C=\frac{\pi}{6}$， ………………………………………………………… 7 分

在 $\triangle ADE$ 中，由余弦定理得 $DE^2=AE^2+AD^2-2AE\cdot AD\cos A$， ……………………… 8 分

代入数据，得 $7=3+AD^2-2\sqrt{3}AD\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $AD=4$($AD=-1$ 舍去)， …………… 10 分

所以 $\triangle BDE$ 的面积为 $\frac{1}{2}AE\cdot AD\cdot\sin A-\frac{1}{2}AE\cdot AB\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times[4-(\sqrt{6}-\sqrt{2})]$

$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. ……………………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问中，若 BC 最后的结果计算错误，但得到 $BC=\frac{AB\sin A}{\sin C}$，只扣 1 分.

【2】第(2)问中，最后的结果写为 $\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，不扣分.

19. 解：(1)用 M 表示事件“测试者提出的两个问题相同”，N 表示事件“测试者对机器产生误判”，则 $P(N)=P(NM)+P(N\overline{M})=P(M)P(N|M)+P(\overline{M})P(N|\overline{M})$ ………… 3 分

$=0.6\times0.1+(1-0.6)\times0.35=0.2$. ………………………………………………………… 5 分

(2)设 X 为 4 名测试者中产生误判的人数，由(1)可知，$X\sim B(4,0.2)$，……………………… 7 分

若机器通过本轮的图灵测试，则 4 名测试者中至少有 2 名产生误判， ……………………… 8 分

所以机器 A 通过图灵测试的概率 $P=1-P(X=0)-P(X=1)=1-C_4^0\times0.2^0\times(1-0.2)^4-C_4^1\times0.2\times(1-0.2)^3=0.1808$. ………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问中，得到“$P(N)=P(M)P(N|M)+P(\overline{M})P(N|\overline{M})$”，但未写“$P(N)=P(NM)+P(N\overline{M})$”，不扣分.

【2】第(2)问中，得到“$P=1-C_4^0\times0.2^0\times(1-0.2)^4-C_4^1\times0.2\times(1-0.2)^3=0.1808$”，但未写“4 名测试者中至少有 2 名产生误判”，不扣分. 第(2)问还可以用直接法求解，解析如下：

设 X 为 4 名测试者中产生误判的人数，由(1)可知，$X\sim B(4,0.2)$， ……………………… 7 分

若机器 A 通过本轮的图灵测试，则 4 名测试者中至少有 2 名产生误判， ……………… 8 分

所以机器 A 通过图灵测试的概率 $P=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=C_4^2\times0.2^2\times(1-0.2)^2+C_4^3\times0.2^3\times(1-0.2)+C_4^4\times0.2^4=0.1808$. ………………………………… 12 分

20. (1)证明：当 $n=1$ 时，$S_2+S_1=4$，则 $a_2+2a_1=4$，因为 $a_1=1$，所以 $a_2=2$. …………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，由 $S_{n+1}+S_n=(n+1)^2$，得 $S_n+S_{n-1}=n^2$，两式相减得 $a_{n+1}+a_n=2n+1$. ……………………………………………………………………………………………… 2 分

又 $a_1+a_2=3=2\times1+1$，所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_{n+1}+a_n=2n+1$. ……………………… 3 分

(2)解：$a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)=(2n+3)-(2n+1)=2$， ……………… 4 分

所以$\{a_n\}$的奇数项是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，偶数项是以 2 为首项，2 为公差的等差数列， …………………………………………………………………………………… 5 分

所以$\{a_n\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，故 $a_n=n$. ………………………………… 6 分

(3)解：$T_n=0-\frac{1}{2^3}-\frac{2}{2^4}-\cdots-\frac{n-1}{2^{n+1}}$， …………………………………………………… 7 分

则$\frac{1}{2}T_n=-\frac{1}{2^4}-\frac{2}{2^5}-\cdots-\frac{n-1}{2^{n+2}}$，…………………………………………………… 8 分

则 $T_n-\frac{1}{2}T_n=-(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}})+\frac{n-1}{2^{n+2}}$， ……………………………………… 9 分

所以$\frac{1}{2}T_n=-\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2^{n+2}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{n-1}{2^{n+2}}=\frac{n+1}{2^{n+2}}-\frac{1}{4}$， ……………………………………… 11 分

故 $T_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(2)问中，得到 $a_{n+1}+a_n=2n+1$ 后，还可以通过下面的方法得到数列$\{a_n\}$的通项公式：由 $a_{n+1}+a_n=2n+1$，得 $a_{n+1}-(n+1)=-(a_n-n)$，因为 $a_1-1=0$，所以 $a_n-n=0$，即 $a_n=n$.

【2】第(3)问还可以用裂项相消法求解，过程如下：

因为 $b_n=\frac{1-a_n}{2^{n+1}}=\frac{n+1-2n}{2^{n+1}}=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}$， ………………………………………… 9 分

所以 $T_n=\frac{2}{2^2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2^3}-\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$. ………………………… 12 分

21.(1)证明:将点$(2,-2\sqrt{6})$代入$y^2=2px$,得$24=4p$,即$p=6$. ………………………… 1分

联立$\begin{cases}y^2=12x,\\ y=kx+m(k\neq 0),\end{cases}$得$ky^2-12y+12m=0$, ………………………… 2分

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1y_2=\dfrac{12m}{k}$, ………………………… 3分

$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{12}\cdot\dfrac{y_2^2}{12}=\dfrac{(y_1y_2)^2}{144}=\dfrac{m^2}{k^2}$. ………………………… 4分

因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,所以$\dfrac{m^2}{k^2}+\dfrac{12m}{k}=0$恒成立,则$m=-12k$, ………………………… 5分

所以l_1的方程为$y=k(x-12)$,故直线l_1过定点$(12,0)$. ………………………… 6分

(2)解:联立$\begin{cases}y^2=12x,\\ y=2x+m,\end{cases}$得$4x^2+(4m-12)x+m^2=0$,

则$\begin{cases}x_1+x_2=-m+3,\\ x_1x_2=\dfrac{m^2}{4},\end{cases}$ ………………………… 7分

且$\Delta=(4m-12)^2-16m^2=48(3-2m)>0$,即$m<\dfrac{3}{2}$, ………………………… 8分

$|AB|=\sqrt{1+2^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+2^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{9-6m}$, ………………………… 9分

设l_2:$y=2x+n$,同理可得$|MN|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{9-6n}$. ………………………… 10分

因为直线l_2在l_1的右侧,所以$n<m$,则$d=\dfrac{m-n}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,即$n=m-5$. ………………………… 11分

所以$|MN|-|AB|=\sqrt{5}[\sqrt{9-6(m-5)}-\sqrt{9-6m}]=10$,

即$\sqrt{39-6m}=2\sqrt{5}+\sqrt{9-6m}$,解得$m=\dfrac{31}{24}$,

因为$\dfrac{31}{24}<\dfrac{3}{2}$,所以$m=\dfrac{31}{24}$. ………………………… 12分

评分细则:

【1】第(1)问中,联立$\begin{cases}y^2=12x,\\ y=kx+m(k\neq 0),\end{cases}$消去$y$得$k^2x^2+(2km-12)x+m^2=0$,也可以求得$m=-12k$,从而得到直线$l_1$过定点$(12,0)$.

【2】第(2)问中,还可以用$|AB|=\sqrt{1+(\dfrac{1}{2})^2}\,|y_1-y_2|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$,得到$|AB|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{9-6m}$.解析中,未写$\dfrac{31}{24}<\dfrac{3}{2}$,但是得到$m=\dfrac{31}{24}$,不扣分.

22.解:(1)当$a=1$时,$f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1$,则$f'(x)=x-\sin x$. ………………………… 1分

令函数$g(x)=x-\sin x$,则$g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,可得$g(x)$单调递增. ………………………… 2分

又$g(0)=0$,所以当$x\in(0,+\infty)$时,$g(x)>0$,当$x\in(-\infty,0)$时,$g(x)<0$. ………………………… 3分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$. …………………… 4 分

(2)若 $a=0$，则 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$，此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故 $a\neq 0$. …………………… 5 分

$f'(x)=x-a\sin ax$，令函数 $h(x)=x-a\sin ax$，则 $h'(x)=1-a^2\cos ax=1-a^2\cos|a|x$.
…………………………………………………………………………………………… 6 分

令函数 $\varphi(x)=1-a^2\cos|a|x(a\neq 0)$，可知 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增. ………… 7 分

①当 $\varphi(0)=1-a^2\geqslant 0$ 且 $a\neq 0$，即 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 且 $a\neq 0$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)\geqslant 0$，此时 $h(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增，则 $h(x)\geqslant h(0)=0$，此时 $x=0$ 不可能是 $f(x)$ 的极大值点. …… 8 分

②当 $\varphi(0)=1-a^2<0$，即 $a<-1$ 或 $a>1$ 时，由 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增，可知存在 $m\in(0,\frac{\pi}{|a|})$，使得当 $x\in[0,m)$ 时，$\varphi(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,m)$ 上单调递减， ………… 9 分

从而 $h(x)\leqslant h(0)=0$，即 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $[0,m)$ 上单调递减. ……………………… 10 分

由 $f(-x)=\cos(-ax)+\frac{1}{2}(-x)^2-1=\cos ax+\frac{1}{2}x^2-1=f(x)$，可得 $f(x)$ 为偶函数，$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. ……………………………… 11 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. ……………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问中，最后没有回答函数的单调区间，而是写为“$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增”不扣分.

【2】第(2)问中，在说明 $a\neq 0$ 后，也可以先讨论 $a>0$，再根据函数的奇偶性，确定 $a<0$ 中满足条件的 a 的范围，最后求两种情况的 a 的取值集合的并集，即得满足题意的 a 的取值范围.