台山一中 2024 届高三第一次月考数学试题

2023-08

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|-2<x\leq 1\}$，$B=\{x|\lg(x+2)<1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1\}$

【答案】B

【详解】因为 $A=\{x\in\mathbf{N}|-2<x\leq 1\}=\{0,1\}$，

$B=\{x|\lg(x+2)<1\}=\{x|0<x+2<10\}=\{x|-2<x<8\}$，

所以 $A\cap B=\{0,1\}$.

故选：B.

2. 已知 i 为虚数单位，若复数 $z=\dfrac{4-\mathrm{i}^2}{2-\mathrm{i}}$，则 $\overline{z}=$（　　）

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $2-\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　　D. $\dfrac{6}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

【答案】B

【详解】因为 $z=\dfrac{4-\mathrm{i}^2}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{5}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{5(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{5(2+\mathrm{i})}{5}=2+\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=2-\mathrm{i}$.

故选：B.

3. “$a\leq\dfrac{9}{4}$”是“方程 $x^2+3x+a=0(x\in\mathbf{R})$ 有正实数根”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【详解】由方程 $x^2+3x+a=0$ 有正实数根，则等价于函数 $f(x)=x^2+3x+a$ 有正零点，

由二次函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-\dfrac{3}{2}<0$，则函数 $f(x)$ 只能存在一正一负的两个零点，

则 $\begin{cases}\Delta=9-4a>0\\ f(0)<0\end{cases}$，解得 $a<0,(-\infty,0)\subset\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$，

故选：B.

4. 已知 $t>0$，则函数 $y=\dfrac{t^2-4t+1}{t}$ 的最小值为

A. -2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】A

【详解】$y=\frac{t^2-4t+1}{t}=t+\frac{1}{t}-4\geq 2\sqrt{t?\frac{1}{t}}-4=-2$，当且仅当$t=\frac{1}{t}$，即$t=1$时，等号成立.

选 A。

【点睛】本题考查利用基本不等式求最值，考查基本分析求解能力，属基础题.

5. $\left(x^2-x+1\right)\left(1+x\right)^9$展开式中含$x^5$的系数是（　　）

A. 28　　B. -28　　C. 84　　D. -84

【答案】C

【详解】$\left(1+x\right)^9$展开式的通项为$T_{r+1}=\mathrm{C}_9^r\cdot 1^{9-r}\cdot x^r=\mathrm{C}_9^r\cdot x^r$，$r=0,1,2,\cdots,9$.

当x^2-x+1选取x^2时，由已知可得，应选取$\left(1+x\right)^9$展开式中含x^3的项，

由$r=3$，可得$T_4=\mathrm{C}_9^3\cdot x^3=84x^3$；

当x^2-x+1选取$-x$时，由已知可得，应选取$\left(1+x\right)^9$展开式中含x^4的项，

由$r=4$，可得$T_5=\mathrm{C}_9^4\cdot x^4=126x^4$；

当x^2-x+1选取1时，由已知可得，应选取$\left(1+x\right)^9$展开式中含x^5的项，

由$r=5$，可得$T_6=\mathrm{C}_9^5\cdot x^5=126x^5$.

所以，$\left(x^2-x+1\right)\left(1+x\right)^9$展开式中含$x^5$的系数是$1\times 84-1\times 126+1\times 126=84$.

故选：C.

6. 2023 年武汉马拉松于 4 月 16 日举行，组委会决定派小王、小李等 6 名志愿者到甲乙两个路口做引导员，每位志愿者去一个路口，每个路口至少有两位引导员，若小王和小李不能去同一路口，则不同的安排方案种数为（　　）

A. 40　　B. 28　　C. 20　　D. 14

【答案】B

【详解】若小王在 1 号路口，小李在 2 号路口，则剩余 4 个人分到两个路口，

两个路口为$1+3$人分布，共有$\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^3\mathrm{A}_2^2=8$种方案，

两个路口为$2+2$人分布，共有$\frac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2\mathrm{A}_2^2}{\mathrm{A}_2^2}=6$种方案，

此时共有$8+6=14$种方案；

同理若小王在 2 号路口，小李在 1 号路口，也共有$8+6=14$种方案.

所以一共有 28 种不同的安排方案种数.故选：B

7. 设$a=\frac{5}{11},b=\ln\frac{21}{11},c=\sin\frac{5}{11}$，则（　　）

A. $c<a<b$　　　B. $c<b<a$　　　C. $a<b<c$　　　D. $b<c<a$

【答案】A

【详解】当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，记$f\left(x\right)=x-\sin x$，则$f'\left(x\right)=1-\cos x\geq 0$，故$f(x)$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，故

$f(x)>f\left(0\right)=0$，因此得当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$x>\sin x$，故$\frac{5}{11}>\sin\frac{5}{11}$，即$a>c$；

$b-a=\ln\frac{21}{11}-\frac{5}{11}=\ln\left(1+2\times\frac{5}{11}\right)-\frac{5}{11}$，设$g(x)=\ln(1+2x)-x\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$，则$b-a=g\left(\frac{5}{11}\right)$，因为

$g'(x)=\frac{2}{1+2x}-1=\frac{1-2x}{1+2x}$，

当$0<x<\frac{1}{2}$时，$g'(x)>0$．所以$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，所以$g\left(\frac{5}{11}\right)>g(0)=0$，即$b>a$，所以$b>a>c$．

故选：A

8. 设函数$f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x),-1\leq x<k,\\ x^3-3x+1,k\leq x\leq\sqrt{3}\end{cases}$的值域为$A$，若$A\subseteq[-1,1]$，则$f(x)$的零点个数最多是（　　）

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

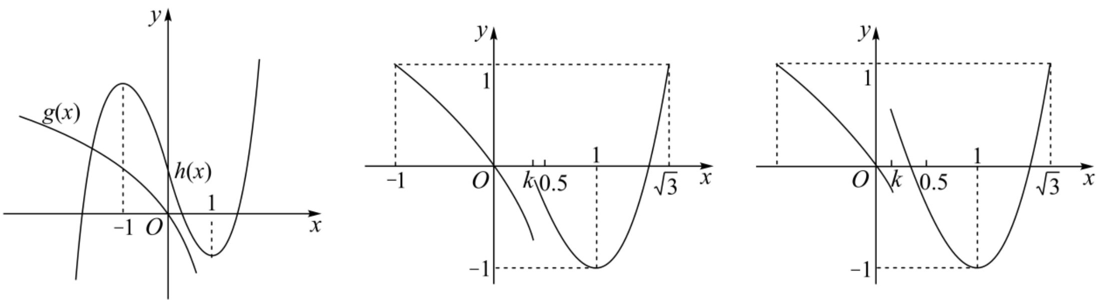
【答案】C

【详解】解：令$g(x)=\log_2(1-x)$，则$g(x)=\log_2(1-x)$在$(-\infty,1)$上单调递减；

令$h(x)=x^3-3x+1$，则$h'(x)=3x^2-3$．由$h'(x)>0$，得$x>1$或$x<-1$；

由$h'(x)<0$，得$-1<x<1$，所以$h(x)$在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$(-1,1)$上单调递减，

于是，$h(x)$的极大值为$h(-1)=3$，极小值为$h(1)=-1$．在同一坐标系中作出函数$g(x)$和$h(x)$的图象，如下图：



显然$f(-1)=g(-1)=1$；由$g(x)=-1$，得$x=\frac{1}{2}$；由$f(x)$的解析式，得$-1<k\leq 1$．

（1）若$-1<k<0$，当$k\leq x<0$时，$f(x)>f(0)=1$，不符合题意；

（2）若$\frac{1}{2}<k\le 1$，当$\frac{1}{2}<x<k$时，$f(x)<f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，不符合题意；

（3）若$0\le k\le\frac{1}{2}$，

①当$-1\le x<k$时，$-1<f(x)\le 1$；

②当$k\le x\le\sqrt{3}$时，$f(1)\le f(x)\le \max\{f(k),f(\sqrt{3})\}\le 1$，即$-1\le f(x)\le 1$.

由①②，$0\le k\le\frac{1}{2}$时符合题意.

此时，结合图象可知，当$k=0$时，$f(x)$在$[-1,k)$上没有零点，在$[k,\sqrt{3}]$上有2个零点；

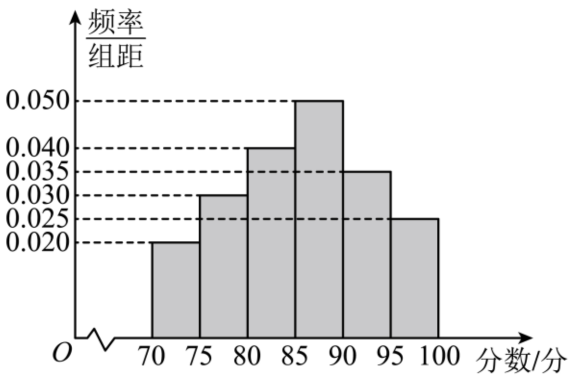
当$0<k\le\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$[-1,k)$上有1个零点，在$[k,\sqrt{3}]$上有1个或2个零点，

综上，$f(x)$最多有3个零点.

故选：C.

二、多选题（本大题共4小题，共20分.在每小题有多项符合题目要求）

9. 《国家学生体质健康标准》是国家学校教育工作的基础性指导文件和教育质量基本标准，它适用于全日制普通小学、初中、普通高中、中等职业学校、普通高等学校的学生. 某高校组织4000名大一新生进行体质健康测试，现抽查200名大一新生的体测成绩，得到如图所示的频率分布直方图，其中分组区间为$[70,75)$，$[75,80)$，$[80,85)$，$[85,90)$，$[90,95)$，$[95,100)$. 则下列说法正确的是（　　）



A. 估计该样本的众数是87.5

B. 估计该样本的均值是80

C. 估计该样本的中位数是86

D. 若测试成绩达到85分方可参加评奖，则有资格参加评奖的大一新生约为2200人

【答案】ACD

【详解】对于A项，由频率分布直方图可得，最高小矩形为$[85,90)$，所以可估计该样本的众数是$\frac{85+90}{2}=87.5$，故A项正确；

对于B项，由频率分布直方图，可估计该样本的均值是$0.020\times5\times72.5+0.030\times5\times77.5+0.040\times5\times82.5$

$+0.050\times5\times87.5+0.035\times5\times92.5+0.025\times5\times97.5=85.625$，故 B 项错误；

对于 C 项，由频率分布直方图可得，成绩在 $[70,85)$ 之间的频率为 $0.020\times5+0.030\times5+0.040\times5=0.45$，

在 $[70,90)$ 之间的频率为 $0.020\times5+0.030\times5+0.040\times5+0.050\times5=0.7$，

所以可估计该样本的中位数在 $[85,90)$ 内.

设中位数为 x，则由 $0.45+\dfrac{x-85}{90-85}\times0.25=0.5$ 可得，$x=86$，故 C 项正确；

对于 D 项，由频率分布直方图可得，测试成绩达到 85 分的频率为 $0.050\times5+0.035\times5+0.025\times5=0.55$，所以可估计有资格参加评奖的大一新生约为 $4000\times0.55=2200$ 人，故 D 项正确.

故选：ACD.

10. 已知非零实数 a，b 满足 $a>|b|+1$，则下列不等关系一定成立的是（　　）

A. $a^2>b^2+1$

B. $2^a>2^{b+1}$

C. $a^2>4b$

D. $\left|\dfrac{a}{b}\right|>b+1$

【答案】ABC

【详解】解：对于非零实数 a，b 满足 $a>|b|+1$，则 $a^2>(|b|+1)^2$，

即 $a^2>b^2+2|b|+1>b^2+1$，故 A 一定成立；

因为 $a>|b|+1\geq b+1\Rightarrow 2^a>2^{b+1}$，故 B 一定成立；

又 $(|b|-1)^2\geq0$，即 $b^2+1\geq2|b|$，所以 $a^2>4|b|\geq4b$，故 C 一定成立；

对于 D：令 $a=5$，$b=3$，满足 $a>|b|+1$，此时 $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{5}{3}<b+1=4$，故 D 不一定成立.

故选：ABC

11. 下列关于概率统计说法中正确的是（　　）

A. 两个变量 x,y 的相关系数为 r，则 r 越小，x 与 y 之间的相关性越弱

B. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,1)$，若 $P(\xi>1)=p$，则 $P(-1<\xi<0)=\dfrac{1}{2}-p$

C. 在回归分析中，R^2 为 0.98 的模型比 R^2 为 0.89 的模型拟合的更好

D. 某人在 10 次答题中，答对题数为 X，$X\sim B(10,0.8)$，则答对 8 题的概率最大

【答案】BCD

【详解】对于 A，两个变量 x,y 的相关系数为 r，$|r|$ 越小，x 与 y 之间的相关性越弱，故 A 错误，

对于 B，随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,1)$，由正态分布概念知若 $P(\xi>1)=p$，则 $P(-1<\xi<0)=\dfrac{1}{2}-p$，故 B 正

确，

对于 C，在回归分析中，R^2 越接近于1，模型的拟合效果越好，所以 R^2 为0.98的模型比 R^2 为0.89的模型拟合的更好，故 C 正确，

对于 D，某人在10次答题中，答对题数为 X，$X \sim B(10,0.8)$，则数学期望 $E(X)=10\times 0.8=8$，说明答对8题的概率最大，故 D 正确.

故选：BCD

12. 已知函数 $f(x)=e^{x-1}+e^{1-x}+x^2-2x$，若不等式 $f(2-ax)<f\left(x^2+3\right)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值可能是（　　）

A. -4　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{2}$

【答案】BC

【详解】由函数 $f(x)=e^{x-1}+e^{1-x}+x^2-2x$，

令 $t=x-1$，则 $x=t+1$，可得 $g(t)=e^t+e^{-t}+t^2-1$，

可得 $g(-t)=e^{-t}+e^t+(-t)^2-1=e^t+e^{-t}+t^2-1=g(t)$，

所以 $g(t)$ 为偶函数，即函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，

又由 $g'(t)=e^t-e^{-t}+2t$，令 $\varphi(t)=g'(t)=e^t-e^{-t}+2t$，

可得 $\varphi'(t)=e^t+e^{-t}+2>0$，所以 $\varphi(t)$ 为单调递增函数，且 $\varphi(0)=0$，

当 $t>0$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，即 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调递增；

当 $t<0$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，即 $x<1$ 时，$f(x)$ 单调递减，

由不等式 $f(2-ax)<f\left(x^2+3\right)$，可得 $|2-ax-1|<\left|x^2+3-1\right|$，即 $|1-ax|<x^2+2$

所以不等式 $|1-ax|<x^2+2$ 恒成立，即 $-x^2-2<ax-1<x^2+2$ 恒成立，

所以 $\begin{cases}x^2+ax+1>0\\x^2-ax+3>0\end{cases}$ 的解集为R，所以 $a^2-4<0$ 且 $(-a)^2-12<0$，

解得 $-2<a<2$，结合选项，可得 BC 适合.

故选：BC.

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20 分）

13. 若命题“$\exists x\in[1,3], x^2+ax+1>0$”是假命题，则实数 a 的最大值为______.

【答案】$-\frac{10}{3}$

【详解】由题知命题的否定“$\forall x\in[1,3], x^2+ax+1\le 0$”是真命题．令 $f(x)=x^2+ax+1(x\in[1,3])$，则

$\begin{cases} f(1)=a+2\le 0, \\ f(3)=3a+10\le 0, \end{cases}$ 解得 $a\le -\frac{10}{3}$，故实数 a 的最大值为 $-\frac{10}{3}$.

故答案为：$-\frac{10}{3}$.

14. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=4,(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{a}=0$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为__________.

【答案】$\frac{\pi}{3}$

【详解】由 $(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{a}=0\Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}^2=0\Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{a}=4$，

$\cos\langle\vec{b},\vec{a}\rangle=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{4}{4\times 2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\langle\vec{b},\vec{a}\rangle=\frac{\pi}{3}$，

故答案为：$\frac{\pi}{3}$

15. 已知 F_1，F_2 为椭圆 C 的两个焦点，P 为 C 上一点，若 $|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|$，则 C 的离心率为______.

【答案】$\frac{1}{2}$.

【详解】P 为椭圆 C 上一点，由椭圆的定义知，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，

因为 $|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|=4c$，

所以 $2a=4c$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查椭圆的离心率的求解及椭圆的定义，属于基础题.

16. 某校决定从高一、高二两个年级分别抽取 100 人、60 人参加演出活动，高一 100 人中女生占 $\frac{3}{5}$，高二 60 人中女生占 $\frac{3}{4}$，则从中抽取 1 人恰好是女生的概率为______.

【答案】$\frac{21}{32}$

【详解】用 $A,\overline{A}$ 分别表示取的一人是来自高一和高二，B 表示抽取一个恰好是女生，则由已知可知：

$P(A)=\frac{100}{160}=\frac{5}{8},P(\overline{A})=\frac{60}{160}=\frac{3}{8}$,且 $P(B|A)=\frac{3}{5},P(B|\overline{A})=\frac{3}{4}$,

所以 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{21}{32}$

故答案为：$\frac{21}{32}$

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$=60°，$c=\dfrac{3}{7}a$.

（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）若 a=7，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】（1）$\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

（2）$6\sqrt{3}$

【小问 1 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\angle A=60°$，$c=\dfrac{3}{7}a$，

所以由正弦定理得 $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

【小问 2 详解】

因为 $a=7$，所以 $c=\dfrac{3}{7}\times 7=3$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $7^2=b^2+3^2-2b\times 3\times\dfrac{1}{2}$，

解得 $b=8$ 或 $b=-5$（舍）.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 8\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

18. 设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，已知 $f(x)=x+f'(0)\cos 2x+a(a\in\mathbf{R})$，且 $f(x)$ 的图像经过点 $(0,2)$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调区间.

【答案】（1）$x-y+2=0$

（2）单调递增区间为 $\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right)$ 和 $\left(\dfrac{5\pi}{12},\pi\right]$；单调递减区间为 $\left(\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right)$

【小问 1 详解】

$f(x)=x+f'(0)\cos 2x+a(a\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=1-2f'(0)\sin 2x$，得 $f'(0)=1$.

由题意 $f(0)=2$，可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-2=x$，即 $x-y+2=0$.

【小问 2 详解】

由已知得 $f(0)=f'(0)+a=2$.

又由（1）知 $f'(0)=1$，所以 $a=1$.

故 $f(x)=x+\cos 2x+1$.

$f'(x)=1-2\sin 2x, x\in[0,\pi]$，

由 $f'(x)>0$，得 $0\le x<\frac{\pi}{12}$，或 $\frac{5\pi}{12}<x\le\pi$；由 $f'(x)<0$，得 $\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$.

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{\pi}{12}\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{12},\pi\right]$；单调递减区间为 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right)$.

19. 已知图 1 是由等腰直角三角形 ABE 和菱形 $BCDE$ 组成的一个平面图形，其中菱形边长为 4，$\angle A=90°$，$\angle D=60°$. 将三角形 ABE 沿 BE 折起，使得平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$（如图 2）.

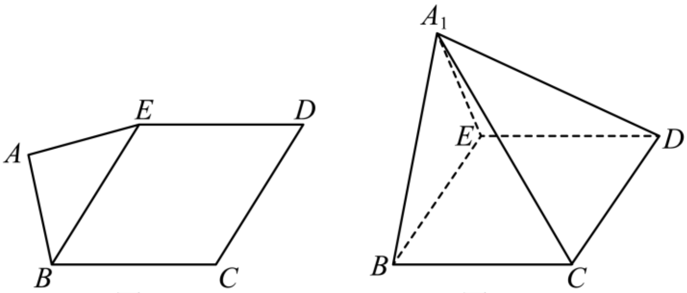


图1　　图2

（1）求证：$A_1C\perp CD$；

（2）求二面角 $B-A_1C-D$ 的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{21}}{7}$

【小问 1 详解】

证明：取 BE 的中点 O，连接 A_1O，OC.

$\because A_1B=A_1E$，$\therefore A_1O\perp BE$.

又$\because$平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$，且平面 $A_1BE\cap$平面 $BCDE=BE$，$A_1O\subset$ 平面 A_1BE，

$\therefore A_1O\perp$ 平面 $BCDE$.

$\because CD\subset$ 平面 $BCDE$，$\therefore A_1O\perp CD$.

$\because$在菱形 $BCDE$ 中，$\angle D=60°$，$\therefore \triangle BCE$ 为等边三角形，

$\because BE$ 的中点为 O，$\therefore OC\perp BE$，

$\because BE\ /\!/\ CD$，$\therefore OC\perp CD$

$\because A_1O\cap OC=O$，$A_1O,OC\subset$ 平面 A_1OC，

$\therefore CD\perp$ 平面 A_1OC，$\because A_1C\subset$ 平面 A_1OC，$\therefore CD\perp A_1C$.

【小问 2 详解】

由（1）$A_1O\perp$平面$BCDE$，$\because OB,OC\subset$平面$BCDE$，$\therefore A_1O\perp OB,A_1O\perp OC$，

$\because OC\perp BE$，

$\therefore$如图, 以OB，OC，OA_1所在的直线分别为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系，则

$B(2,0,0),C(0,2\sqrt{3},0),D(-4,2\sqrt{3},0),A_1(0,0,2)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1C}=(0,2\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CD}=(-4,0,0)$．

设平面BA_1C的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}=2\sqrt{3}y-2z=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$，不妨设$y=1$，则$\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$．

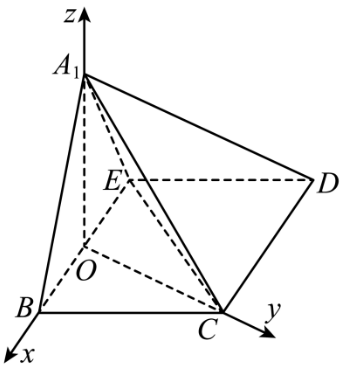
设平面DA_1C的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(a,b,c)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{A_1C}=2\sqrt{3}b-2c=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CD}=-4a=0\end{cases}$，令$c=\sqrt{3}$，则$\overrightarrow{n_2}=(0,1,\sqrt{3})$，

设二面角$B-A_1C-D$的大小为θ，由图可知θ为钝角，

$\therefore |\cos\theta|=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{3+1+3}\times\sqrt{1+3}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．

$\therefore$二面角$B-A_1C-D$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．



20. 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{4}{5}$，且满足$a_{n+1}=\dfrac{4a_n}{a_n+3}$，设$b_n=\dfrac{1}{a_n}-1$．

（1）求证：数列$\{b_n\}$为等比数列；

（2）若$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}>140$，求满足条件的最小正整数$n$．

【答案】（1）证明见解析

（2）140

【小问 1 详解】

$$\because \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\dfrac{1}{a_{n+1}}-1}{\dfrac{1}{a_n}-1}=\frac{\dfrac{a_n+3}{4a_n}-1}{\dfrac{1}{a_n}-1}=\frac{3(1-a_n)}{4(1-a_n)}=\frac{3}{4},$$

$b_1=\dfrac{1}{a_1}-1=\dfrac{1}{4}$，所以数列$\{b_n\}$为首项为$b_1=\dfrac{1}{4}$，公比为$\dfrac{3}{4}$等比数列.

【小问 2 详解】

由（1）可得$\left(\dfrac{1}{a_1}-1\right)+\left(\dfrac{1}{a_2}-1\right)+\left(\dfrac{1}{a_3}-1\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{a_n}-1\right)$

$$=\frac{\dfrac{1}{4}\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)}{1-\dfrac{3}{4}}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

即$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}-n=1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$\therefore \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=n+1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

而$n+1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$随着$n$的增大而增大

要使$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}>140$，即$n+1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n>140$，则$n\geq 140$，

$\therefore n$的最小值为 140.

21. 已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与 y 轴的正半轴相交于点 M,点 F_1,F_2 为椭圆的焦点,且$\triangle MF_1F_2$是边长为 2 的等边三角形,若直线 l:$y=kx+2\sqrt{3}$ 与椭圆 E 交于不同的两点 A,B.

（1）直线 MA,MB 的斜率之积是否为定值?若是,请求出该定值,若不是,请说明理由;

（2）求$\triangle ABM$ 的面积的最大值.

【答案】（1）$\dfrac{1}{4}$；（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

【详解】（1）因为ΔMF_1F_2是边长为 2 的等边三角形,

所以$2c=2$，$b=\sqrt{3}c$，$a=2$，所以$a=2,b=\sqrt{3}$，

所以椭圆E：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，点$M\left(0,\sqrt{3}\right)$.

将直线$l:y=kx+2\sqrt{3}$代入椭圆E的方程，

整理得：$\left(3+4k^2\right)x^2+16\sqrt{3}kx+36=0$，（*）

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则由（*）式可得

$\Delta=\left(16\sqrt{3}k\right)^2-4\left(3+4k^2\right)\times 36=48\left(4k^2-9\right)>0$，

所以$k\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$，$x_1+x_2=-\frac{16\sqrt{3}k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{36}{3+4k^2}$，

所以直线MA,MB的斜率之积$k_{MA}\bullet k_{MB}=\frac{y_1-\sqrt{3}}{x_1}\bullet\frac{y_2-\sqrt{3}}{x_2}$

$$=\frac{\left(kx_1+\sqrt{3}\right)\left(kx_2+\sqrt{3}\right)}{x_1x_2}=k^2+\frac{\sqrt{3}k\left(x_1+x_2\right)}{x_1x_2}=k^2+\frac{\sqrt{3}k\left(\frac{-16\sqrt{3}k}{3+4k^2}\right)+3}{36}=k^2+\frac{9-36k^2}{36}=\frac{1}{4}$$

所以直线MA,MB的斜率之积是定值$\frac{1}{4}$.

（2）记直线$l:y=kx+2\sqrt{3}$与y轴的交点为$N\left(0,2\sqrt{3}\right)$，

则$S_{\Delta ABM}=\left|S_{\Delta ANM}-S_{\Delta BNM}\right|=\frac{1}{2}\left|MN\right|\left|x_2-x_1\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{-16\sqrt{3}k}{3+4k^2}\right)^2-4\cdot\frac{36}{3+4k^2}}=\frac{6\sqrt{4k^2-9}}{3+4k^2}=\frac{6}{\sqrt{4k^2-9}+\frac{12}{\sqrt{4k^2-9}}}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

当且仅当$4k^2-9=12$，即$k=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$时等号成立.

所以ΔABM的面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22. “英才计划”最早开始于 2013 年，由中国科协、教育部共同组织实施，到 2022 年已经培养了 6000 多名具有创新潜质的优秀中学生，为选拔培养对象，某高校在暑假期间从武汉市的中学里挑选优秀学生参加数学、物理、化学、信息技术学科夏令营活动.

（1）若化学组的 12 名学员中恰有 5 人来自同一中学，从这 12 名学员中选取 3 人，ξ表示选取的人中来自该中学的人数，求ξ的分布列和数学期望；

（2）在夏令营开幕式的晚会上，物理组举行了一次学科知识竞答活动．规则如下：两人一组，每一轮竞答中，每人分别答两题，若小组答对题数不小于 3，则取得本轮胜利，假设每轮答题结果互不影响．已知甲、乙两位同学组

成一组，甲、乙答对每道题的概率分别为 p_1， p_2，且 $p_1+p_2=\frac{4}{3}$，如果甲、乙两位同学想在此次答题活动中取得6轮胜利，那么理论上至少要参加多少轮竞赛？

【答案】（1）分布列见解析，$E(\xi)=\frac{5}{4}$　　（2）11轮

【小问1详解】

由题意可知 ξ 的可能取值有0、1、2、3，

$P(\xi=0)=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{7}{44}$， $P(\xi=1)=\frac{C_5^1C_7^2}{C_{12}^3}=\frac{21}{44}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_7^1C_5^2}{C_{12}^3}=\frac{7}{22}$， $P(\xi=3)=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{22}$

所以，随机变量 ξ 的分布列如下表所示：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

所以 $E(\xi)=0\times\frac{7}{44}+1\times\frac{21}{44}+2\times\frac{7}{22}+3\times\frac{1}{22}=\frac{5}{4}$.

【小问2详解】

他们在每轮答题中取得胜利的概率为

$Q=C_2^1p_1(1-p_1)C_2^2p_2^2+C_2^2p_1^2C_2^1p_2(1-p_2)+C_2^2p_1^2C_2^2p_2^2$

$=2p_1p_2(p_1+p_2)-3(p_1p_2)^2=\frac{8}{3}p_1p_2-3(p_1p_2)^2$，

由 $0\le p_1\le1$， $0\le p_2\le1$， $p_1+p_2=\frac{4}{3}$，得 $\frac{1}{3}\le p_1\le1$，

则 $p_1p_2=p_1\left(\frac{4}{3}-p_1\right)=\frac{4}{3}p_1-p_1^2=-\left(p_1-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{9}$，因此 $p_1p_2\in\left[\frac{1}{3},\frac{4}{9}\right]$，

令 $t=p_1p_2\in\left[\frac{1}{3},\frac{4}{9}\right]$， $Q=\frac{8}{3}t-3t^2=-3\left(t-\frac{4}{9}\right)^2+\frac{16}{27}$，于是当 $t=\frac{4}{9}$ 时， $Q_{\max}=\frac{16}{27}$.

要使答题轮数取最小值，则每轮答题中取得胜利的概率取最大值 $\frac{16}{27}$.

设他们小组在 n 轮答题中取得胜利的次数为 X，则 $X\sim B\left(n,\frac{16}{27}\right)$， $E(X)=\frac{16}{27}n$，

由 $E(X)\ge6$，即 $\frac{16}{27}n\ge6$，解得 $n\ge10.125$.

而 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $n_{\min}=11$，所以理论上至少要进行11轮答题.