

数学试题

【注意事项】

1. 本试卷全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、班级、考号用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔填写在答题卡上,并检查条形码粘贴是否正确。
3. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡对应题目标号的位置上,填空题和解答题必须用 0.5 毫米黑色墨水签字笔书写在答题卡对应框内,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题卷上答题无效。

第 I 卷 选择题(60分)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2x - 3 = 0, x \in R\}$, 则满足 $A \cup B = \{-3, 0, 1\}$ 的集合 B 的个数为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 若复数 z 满足 $|z| = |\bar{z} + 2i|$, 其中 i 是虚数单位, 则复数 z 的虚部为

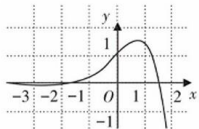
- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

3. 已知 $-\pi < \alpha < 0$, 则“ $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ ”是“ $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ ”的

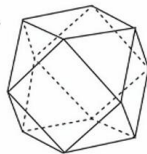
- A. 充分不必要条件 B. 充要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则它的解析式可能是

- A. $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$ B. $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$
C. $f(x) = e^x \cos x$ D. $f(x) = e^x \sin x$



5. “阿基米德多面体”也称半正多面体, 是由边数不全相同的正多边形围成的多面体, 它体现了数学的对称美. 将正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥, 如此截去八个三棱锥, 得到一个有八个面为正三角形, 六个面为正方形的“阿基米德多面体”, 如图所示.



若该多面体的棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则其体积为

- A. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{17}{24}$ D. $\frac{5}{8}$

6. 已知直线 l 过点 $P(-1, 0)$, 且 l 与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 有两个公共点, 则 l 斜率的取值范围是

- A. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
B. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
D. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-1, 0), B(0, 1), C(3, 0), D(0, 4)$, 若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$, 则 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}$ 的取值范围是

- A. $\left(-\infty, \frac{71}{8}\right]$ B. $\left[\frac{71}{8}, +\infty\right)$
C. $\left(-\infty, -\frac{49}{8}\right]$ D. $\left[-\frac{49}{8}, +\infty\right)$

8. 已知 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 且满足 $\tan x \cdot f(x) > f'(x)$, $a = \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{6}\right), b = \sqrt{2} f\left(\frac{\pi}{4}\right), c = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 则下面大小关系正确的是

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

二、选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 函数 $f(x) = \sin x \left(\sqrt{3} \cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}$, 则下列结论正确的有

- A. 函数 $f(x)$ 的最大值为 1
B. 函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in Z$
C. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调
D. 设 $g(x) = \sin 2x$, 将 $g(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 再向下平移 1 个单位可得到 $f(x)$ 的图象

10. 若实数 a, b 满足 $ab > a^2$, 则下列选项中一定成立的有

- A. $a^2 < b^2$ B. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$
C. $e^{b-a} > 1$ D. $\ln \frac{b}{a} > 0$

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差 $d \neq 0$, a_2 为 a_1, a_4 的等比中项, 数列 $\{b_n + 1\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n = \log_5(S_n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \frac{1}{b_n + (-1)^n}$, 则下列选项正确的是

A. $a_n = n$

B. $b_n = 4 \cdot 5^{n-1}$

C. 数列 $\{c_{2n}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{5}{96} \left(1 - \left(\frac{1}{25} \right)^n \right)$

D. 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 $T_{2n} < \frac{55}{96}$

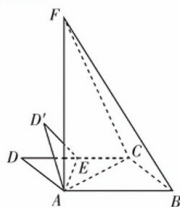
12. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3}$, $AD = 1$, $AF \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AF = 3$, 点 E 为线段 DC 上(除端点外)的一点, 沿直线 AE 将 $\triangle DAE$ 向上翻折成 $\triangle D'AE$, 则下列说法正确的是

A. 三棱锥 $A - BCF$ 的体积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B. 当点 E 固定在线段 DC 某位置时, 点 D' 在某圆上运动

C. 当点 E 在线段 DC 上运动时, 点 D' 在某球面上运动

D. 当点 E 在线段 DC 上运动时, 三棱锥 $D' - BCF$ 的体积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$



第 II 卷 非选择题(90分)

三、填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 边长为 2 的正三角形 ABC 中, $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____.

14. 从 3 位女生, 4 位男生中选 3 人参加垃圾分类宣传活动, 且至少有 1 位男生入选, 则不同的选法共有 _____ 种(用数字填写).

15. 已知函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x+1) = \frac{1}{2}f(x)$, 且当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = x^2$. 若函数 $g(x) = f(x) - \log_a(x+2)$ 恰有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

16. 已知直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点(A, B 与坐标原点 O 均不重合, 点 A 在第一象限), 且 $OA \perp OB$, 设抛物线 C 的焦点为 F , 记 $\triangle AOB, \triangle AOF, \triangle BOF$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 若满足 $S_1 = 8S_2 + 3S_3$, 则直线 l 的方程为 _____.

四、解答题(本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (10分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \sin B = b \sin(A - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}b$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = 4$, D 为 BC 的中点, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 AD 的长.

18. (12分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 已知 $b_1 = a_1$, $b_2 = 3$, $q = d$, $S_{10} = 145$.

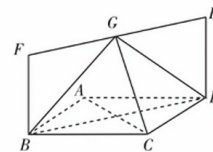
(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $d > 1$ 时, 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分) 如图所示, 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, 四边形 $BDEF$ 为矩形, $AC \perp BF$, G 为 EF 的中点.

(1) 求证: $BF \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 试探究二面角 $C - BG - D$ 的大小能否为 60° ? 若可以, 求出此时三棱锥 $G - BCD$ 的体积 V ; 若不可以, 请说明理由.



20. (12分) 某电视台的某个栏目组为了做好新能源汽车的品牌推介, 利用网络平台对年龄(单位: 岁)在 $[20, 60]$ 内的人群进行了调查, 并从参与调查者中随机选出 600 人, 把这 600 人分为对新能源汽车比较关注和不太关注两类, 并制成如下表格:

年龄/岁	[20, 30)		[30, 40)		[40, 50)		[50, 60]	
性别	男	女	男	女	男	女	男	女
人数	40	10	120	70	160	100	80	20
比较关注所占比例	20%	50%	60%	70%	70%	80%	60%	80%

(1) 填写列联表, 并根据列联表判断: 依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的 χ^2 独立性检验, 能否认为性别与对新能源汽车关注度有差异;

	比较关注	不太关注	总计
男			
女			
总计			

(2) 为了进一步了解不同性别的消费者对新能源汽车的关注情况, 采用按比例抽取的分层随机抽样的方法从这 600 人中选出 9 人进行访谈, 最后从这 9 人中随机选出 3 人参与电视直播节目, 记 3 人中女性的人数为 X , 求 X 的分布列与数学期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

α	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (12分) 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$, 斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l 与 C 相交于 M, N 两点.

(1) 若 G 为线段 MN 的中点, 且直线 OG 的斜率 $k_{OG} = -\frac{3}{4k}$, 求椭圆 C 的方程;

(2) 在(1)的条件下, 设 P, Q 分别为椭圆 C 的左, 右顶点, 直线 PM, PN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{4}$, 试判断以线段 MN 为直径的圆与点 Q 的位置关系, 并说明理由.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = ae^x(1 + \ln x)$, $g(x) = x^2 + x(1 + \ln a)$, $a > 0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设函数 $h(x) = g(x) - f(x)$, 若对任意的 $x \in (0, \frac{1}{e})$, 都有 $h(x) > 0$, 求实数 a 的取值范围.