参考答案（数学）

一、单项选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	C	C	B	A	B	D

二、多项选择题

9	10	11	12
AC	ABD	ACD	BCD

三、填空题

13. 8； 14. 34； 15. $(16,625]$； 16. $y=-\frac{2}{3}(x-4)$；

四、解答题

17. 解 (1) 由正弦定理 得 $\sin \quad \sin \quad \sin B\sin(A \quad \frac{}{3}) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B$ ……………1 分

$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore \sin B\neq 0$，

$\therefore \sin A=\sin(A-\frac{}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$， ……………2 分

$\therefore \sin A=\frac{1}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\sin(A \quad \frac{\pi}{3}) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$ ……………3 分

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$， ……………4 分

$\therefore A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，解得 $A=\frac{\pi}{3}$ ……………5 分

(2) $\because A=\frac{\pi}{3}$，且 ΔABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，解得 $bc=6$， ……………6 分

$\therefore 16=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=b^2+c^2-6$，

$\therefore b^2+c^2=22$. ……………7 分

$\because D$ 为 BC 的中点，$\therefore 2\dot{AD}=\dot{AB}+\dot{AC}$， ……………8 分

两端同时平方，得 $4\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$，

$\therefore 4\overrightarrow{AD}^2=c^2+2bc\cos A+b^2=28$， ……………9 分

解得 $\overrightarrow{AD}^2=7$，$\therefore AD$ 的长为 $\sqrt{7}$. ……………10 分

18. ⑴ 解　由题得$\begin{cases} a_1 d \quad 3, \\ 10a_1 + 45d = 145, \end{cases}$ ……………2 分

$\therefore 2a_1 + \dfrac{27}{a_1} = 29$，$2a_1^{\ 2} - 29a_1 + 27 = 0$（或$9d^2 - 29d + 6 = 0$）， ……………3 分

解得$\begin{cases} a_1 \quad 1, \\ d = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = \dfrac{27}{2}, \\ d = \dfrac{2}{9}, \end{cases}$ ……………4 分

$\begin{cases} a_n \quad 3n \quad 2, \\ b_n = 3^{n-1} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{9}n + \dfrac{239}{18}, \\ b_n = \dfrac{2^{n-2}}{3^{2n-5}}, \end{cases}$ ……………6 分

⑵ 由题$c_n = (3n-2)\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$， ……………7 分

$\therefore T_n = 1\times1 + 4\times\frac{1}{3} + 7\times(\frac{1}{3})^2 + \cdots + (3n-2)\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$， ……………8 分

$\therefore \frac{1}{3}T_n = 1\times\frac{1}{3} + 4\times(\frac{1}{3})^2 + 7\times(\frac{1}{3})^3 + \cdots + (3n-5)\cdot(\frac{1}{3})^{n-1} + (3n-2)\cdot(\frac{1}{3})^n$， ……………9 分

$\therefore \frac{2}{3}T_n = 1 + 3\times(\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + \cdots + (\frac{1}{3})^{n-1}) - (3n-2)\cdot(\frac{1}{3})^n$ ……………10 分

$= 1 + 3\cdot\dfrac{\frac{1}{3} \quad (\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}} - (3n-2)\cdot(\frac{1}{3})^n = \frac{5}{2} - (3n+\frac{5}{2})\cdot(\frac{1}{3})^n$ ……………11 分

$\therefore T_n = \frac{15}{4} - (\frac{3n}{2} + \frac{5}{4})\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$ ……………12 分

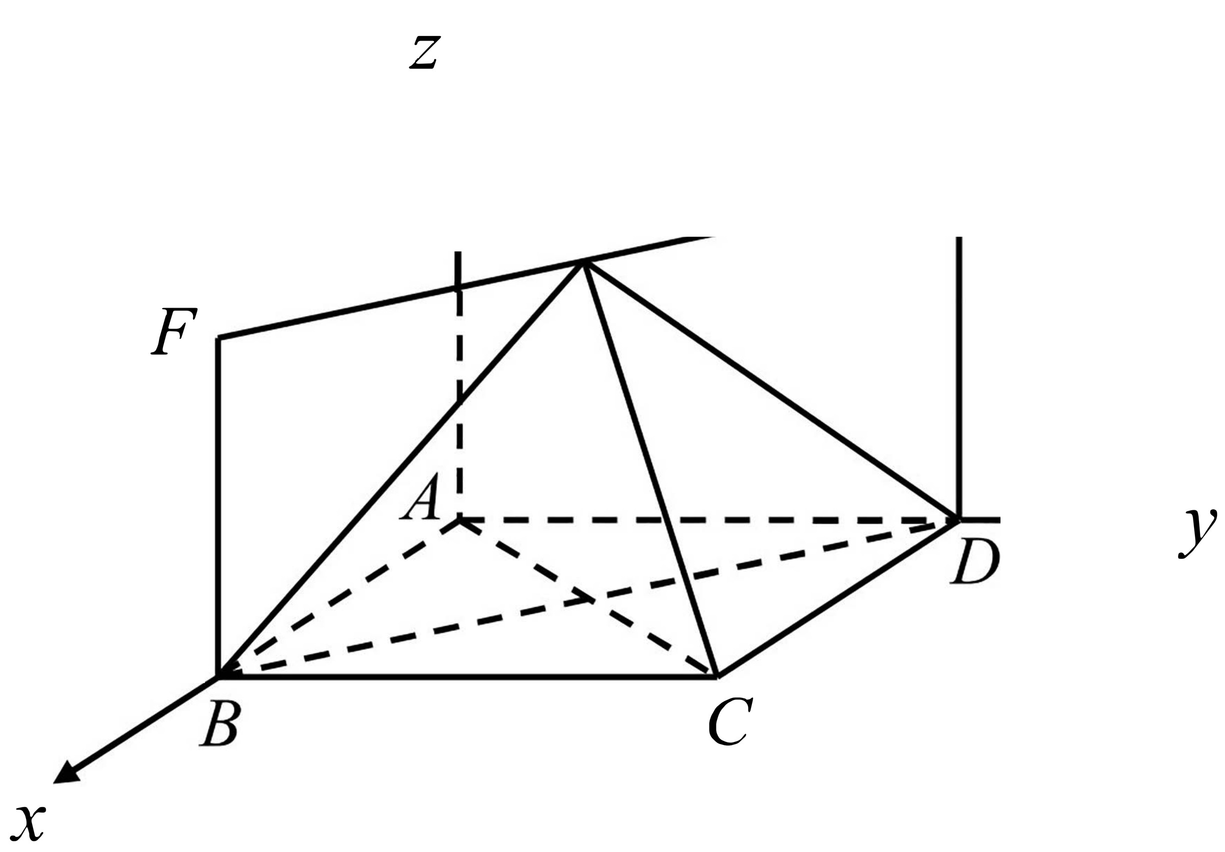
19. ⑴ 证明：$\because$ 四边形$BDEF$为矩形，$\therefore BF \perp BD$， ……………1 分

又$\because AC \perp BF$，AC与BD相交， ……………3 分

$\therefore BF \perp$ 平面$ABCD$； ……………4 分

⑵ 解：过A作BF的平行线AH，则$AH \perp$ 平面$ABCD$，

以A为原点建立空间直角坐标系$A-xyz$，如图所示.



不妨设 $BF=h\ (h>0)$，

则 $A(0,0,0)$，$B(4,0,0)$，$C(4,4,0)$，$D(0,4,0)$，$G(2,2,h)$， ……………6 分

∴ $\vec{BG}=(-2,2,h)$，$\vec{BC}=(0,4,0)$，

设平面 CBG 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-2x+2y+hz=0,\\4y=0,\end{cases}$ 令　　则 $\vec{}$ $(h,0,2)$ ……………7 分

∵ $AC\perp BF$，$AC\perp BD$，$BF\cap BD=B$，BF，$BD\subset$ 平面 BGD， ……………8 分

∴ $AC\perp$ 平面 BGD，平面 BGD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC}=(4,4,0)$， ……………9 分

由题意得 $\cos60^\circ=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{AC}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{AC}|}$ $\frac{4h}{\sqrt{h^2+4}\sqrt{16+16}}=\frac{1}{2}$，解得 $h=2$， ……………11 分

此时 $V=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot h=\frac{16}{3}$. ……………12 分

20. ⑴ 解：根据题意，得列联表如下：

	比较关注	不太关注	总计
男	240	160	400
女	150	50	200
总计	390	210	600

……………2 分

零假设为 H_0：性别与对新能源汽车关注度无关联， ……………3 分

由表中的数据计算得：$\chi^2=\frac{600(240\times50-160\times150)^2}{400\times200\times390\times210}\approx13.187>6.635$， ……………4 分

∴依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的 χ^2 独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为性别与对新能源汽车关注度有差异，此推断犯错误的概率不大于 0.01； ……………6 分

⑵ 根据⑴可知男女比例为 $2:1$，故 9 人中女性的人数为 3 人，男性为 6 人，

∴ X 的可能取值为 0，1，2，3． ……………7 分

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{5}{21}$，$P(X=1)=\frac{C_6^2\cdot C_3^1}{C_9^3}=\frac{15}{28}$，

$P(X=2)=\frac{C_6^1\cdot C_3^2}{C_9^3}=\frac{3}{14}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{84}$，

∴ X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

……………11 分

$E(X)=0\times\frac{5}{21}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{14}+3\times\frac{1}{84}=1$. ……………12 分

（或因为 X 服从超几何分布，所以 $E(X)=3\times\frac{3}{9}=1$．）

21. 解：(1) 设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$， $G(x_0,y_0)$，则 $x_1\neq x_2$， $x_0\neq 0$，

$$\because\begin{cases}3{x_1}^2+a^2{y_1}^2=3a^2,\\ 3{x_2}^2 \quad {y_2}^2 \quad 3a^2\end{cases}$$

$\therefore 3({x_1}^2-{x_2}^2)+a^2({y_1}^2-{y_2}^2)=0$， ……………1 分

整理得： $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{2y_0}{2x_0}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=k\cdot k_{OG}=-\frac{3}{a^2}$， ……………2 分

$\because k_{OG}=-\frac{3}{4k}$，即 $k_{OG}\cdot k=-\frac{3}{4}$， $\therefore a^2=4$， ……………3 分

$\therefore$椭圆 C 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$； ……………4 分

(2) 由题 $P(-2,0)$， $Q(2,0)$，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$， ……………5 分

由 $\begin{cases}3x^2 \quad 4y^2 \quad 12,\\ y=kx+m\end{cases}$ 得 $(4k^2 \quad 3)x^2 \quad 8kmx \quad 4m^2 \quad 12 \quad 0$

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3}$， $x_1\cdot x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}$， ……………7 分

$\because k_1\cdot k_2=-\frac{1}{4}$，

$$\therefore \frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{(x_1+2)(x_2+2)}$$

$$=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$$

$$\frac{k^2\frac{4m^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2m^2}{4k^2+3}+m^2}{\frac{4m^2-12}{4k^2+3}-\frac{16km}{4k^2+3}+4}$$

$$=\frac{3m^2-12k^2}{4m^2-16km+16k^2}=\frac{1}{4},$$

解得 $m=2k$（舍去）或 $m=-k$， ……………9 分

$\therefore x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$， $x_1\cdot x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$．

$\because QM=(x_1-2,y_1)$， $QN=(x_2-2,y_2)$，

$\therefore QM\cdot QN=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$

$$=(x_1-2)(x_2-2)+k^2(x_1-1)(x_2-1)$$

$=(k^2+1)x_1x_2-(k^2+2)(x_1+x_2)+k^2+4$

$=\dfrac{(4k^2-12)(k^2+1)}{4k^2+3}-\dfrac{8k^2(k^2+2)}{4k^2+3}+k^2+4$

$\dfrac{(4k^2-12)(k^2+1)-8k^2(k^2+2)+(k^2+4)(4k^2+3)}{4k^2+3}$

$\dfrac{-5k^2}{4k^2+3}<0$， ……………11 分

∴点 Q 在以 MN 为直径的圆内. ……………12 分

22. 解：(1) ∵ $f(x)=ae^x(1+\ln x)$，

∴ $f'(x)=ae^x(1+\ln x)+\dfrac{ae^x}{x}=ae^x\cdot\dfrac{x\ln x+x+1}{x}$. ……………1 分

令 $t(x)=x\ln x+x+1$，则 $t'(x)=\ln x+2$. ……………2 分

∵ $t'(x)$ 单调递增且 $t'(\dfrac{1}{e^2})=0$， ……………3 分

∴当 $x\in(0,\dfrac{1}{e^2})$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\dfrac{1}{e^2},+\infty)$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增， ……………4 分

∴ $t(x)\geq t(\dfrac{1}{e^2})=1-\dfrac{1}{e^2}>0$， ……………5 分

又∵ $a>0$，$e^x>0$，$x>0$，

∴ $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ……………6 分

(2) 设 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，则 $\varphi(\dfrac{1}{e})=0$，且 $\varphi'(x)=\dfrac{-\ln x}{x}$ ……………7 分

∴当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，

且当 $x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 时，$\varphi(x)<0$，当 $x\in(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$. ……………8 分

由题 $g(x)-f(x)>0$，即 $ae^x(1+\ln x)<x^2+x(1+\ln a)$，

整理得：$\dfrac{x+\ln a+1}{ae^x}>\dfrac{\ln x+1}{x}$

∴ $\dfrac{\ln(ae^x)+1}{ae^x}>\dfrac{\ln x+1}{x}$ 对任意的 $x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 恒成立， ……………9 分

∴ $\varphi(ae^x)>\varphi(x)$ 对任意的 $x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 恒成立.

$\therefore ae^x > x$ 对任意 $x \in (0,\frac{1}{e})$ 恒成立，即 $a > \frac{x}{e^x}$ 对任意 $x \in (0,\frac{1}{e})$ 恒成立.　　　　……………10 分

设 $G(x) = \frac{x}{e^x}$， $x \in (0,\frac{1}{e})$，则 $G'(x) = \frac{1-x}{e^x} > 0$，

$\therefore G(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递增，

$\therefore G(x) < G(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^{1+\frac{1}{e}}}$，　　　　……………11 分

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[\frac{1}{e^{1+\frac{1}{e}}},+\infty)$.　　　　……………12 分