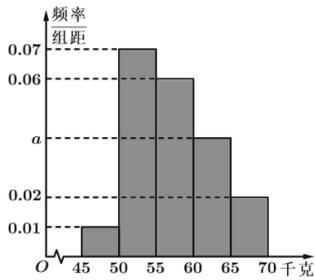


9. 为了解学生的身体状况，某校随机抽取了 100 名学生测量体重，经统计，这些学生的体重数据（单位：千克）全部介于 45 至 70 之间，将数据整理得到如图所示的频率分布直方图，则（ ）。



- A. 频率分布直方图中 a 的值为 0.04
 B. 这 100 名学生中体重不低于 60 千克的人数为 20
 C. 这 100 名学生体重的众数约为 52.5
 D. 据此可以估计该校学生体重的 75% 分位数约为 61.25

10. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ ，下列说法正确有（ ）。

- A. 对于 $\forall m \in \mathbf{R}$ ，直线 $(2m+1)x + (m+y)y - 7m - 4 = 0$ 与圆 O 有两个公共点
 B. 圆 O 与动圆 $C: (x-k)^2 + (y-\sqrt{3}k)^2 = 4$ 有四条公切线的充要条件是 $|k| > 2$
 C. 过直线 $x + y - 4 = 0$ 上任意一点 P 作圆 O 的两条切线 PA ， PB (A ， B 切点)，则四边形 $PAOB$ 的面积的最小值为 4
 D. 圆 O 上存在三点到直线 $x + y - 2 = 0$ 距离均为 1

11. 已知函数 $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，下列命题正确的有（ ）。

- A. $f_1(2x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上有 3 个零点
 B. 要得到 $f_1(2x)$ 的图象，可将函数 $y = \sqrt{2} \cos 2x$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
 C. $f_4(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ ，最大值为 1
 D. $f_3(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$

12. 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，斜率为 k 的直线不经过原点 O ，而且与椭圆相交于 A ， B 两点， M 为线段 AB

的中点。下列结论正确的是（ ）。

- A. 直线 AB 与 OM 垂直
 B. 若点 M 坐标为 $(1, 1)$ ，则直线方程为 $2x + y - 3 = 0$
 C. 若直线方程为 $y = x + 1$ ，则点 M 坐标为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$
 D. 若直线方程为 $y = x + 2$ ，则 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

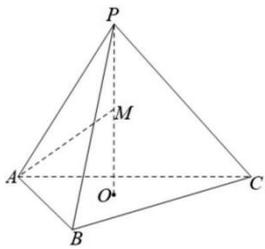
三、填空题（本大题共 4 小题，共 20 分）

13. 已知夹角为 60° 的非零向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, $(2\vec{a} - t\vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $t =$ _____.

14. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, $g(x)$, 满足 $f(2x+3)$ 为偶函数, $g(x+5)-1$ 为奇函数, 若 $f(1)+g(1)=3$, 则 $f(5)-g(9)=$ _____.

15. 设 x, y 均为非零实数, 且满足 $\frac{x \sin \frac{\pi}{5} + y \cos \frac{\pi}{5}}{x \cos \frac{\pi}{5} - y \sin \frac{\pi}{5}} = \tan \frac{9\pi}{20}$, 则 $\frac{y}{x} =$ _____.

16. 正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 PO , M 为 PO 中点, 过 AM 作与棱 BC 平行的平面, 将三棱锥分为上下两部分, 设上、下两部分的体积分别为 V_1, V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2} =$ _____.



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (本小题 10 分)

已知各项均不相等的等差数列 $\{a_n\}$ 的前五项和 $S_5 = 20$, 且 a_1, a_3, a_7 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 T_n 为数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前项和, 求 T_n .

18. (本小题 12 分)

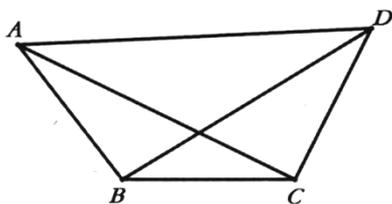
为了促进学生德、智、体、美、劳全面发展, 某校成立了生物科技小组, 在同一块试验田内交替种植 A, B, C 三种农作物 (该试验田每次只能种植一种农作物), 为了保持土壤肥度, 每种农作物都不连续种植, 共种植三次. 在每次种植 A 后, 会有 $\frac{1}{3}$ 的可能性种植 B , $\frac{2}{3}$ 的可能性种植 C ; 在每次种植 B 的前提下再种植 A 的概率为 $\frac{1}{4}$, 种植 C 的概率为 $\frac{3}{4}$, 在每次种植 C 的前提下再种植 A 的概率为 $\frac{2}{5}$, 种植 B 的概率为 $\frac{3}{5}$.

(1) 在第一次种植 B 的前提下, 求第三次种植 A 的概率;

(2) 在第一次种植 A 的前提下, 求种植 A 作物次数 X 的分布列及期望.

19. (本小题 12 分)

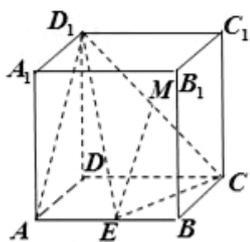
如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \theta (0 < \theta < \pi)$, $AB = BC = CD = 1$, $AC \perp CD$.



- (1) 试用 θ 表示 BD 的长;
 (2) 求 $AC^2 + BD^2$ 的最大值.

20. (本小题 12 分)

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD=1$, $AA_1=AB=2$. 点 E 是线段 AB 上的动点, 点 M 为 D_1C 的中点.



- (1) 当 E 点是 AB 中点时, 求证: 直线 $ME \parallel$ 平面 ADD_1A_1 ;
 (2) 若二面角 $A-D_1E-C$ 的余弦值为 $\frac{4\sqrt{15}}{15}$, 求线段 AE 的长.

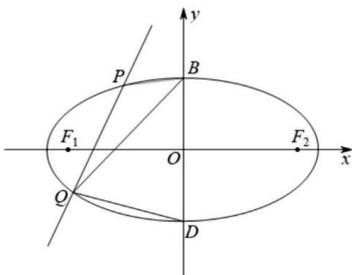
21. (本小题 12 分)

若 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 2a \ln x$.

- (1) 当 $a > 0$, $b = -a - 2$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 (2) 若 $b = -2$, 且 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $f(x_1) + f(x_2) > -3$.

22. (本小题 12 分)

如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$, A 为椭圆 C 上一点, $\triangle F_1AF_2$ 的面积最大值为 $\sqrt{3}$.



- (1) 求椭圆 C 的方程;
 (2) 若 B, D 分别为椭圆 C 的上、下顶点, 不垂直坐标轴的直线 l 交椭圆 C 于 P, Q (P 在上方, Q 在下方, 且均不与 B, D 重合) 两点, 直线 PB, QD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_2 = -3k_1$, 求 $\triangle PBQ$ 面积的最大值.