高三数学参考答案及评分意见

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	C	A	D	A	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	ACD	AC	ABD	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 180　　14. $\dfrac{4\sqrt{21}\pi}{3}$　　15. $\sqrt{3}$　　16. $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

解：（1）在 ΔABC 中，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得

$a^2=4+2+2\times 2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10$，所以 $a=\sqrt{10}$. ……………………………………3 分

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……………5 分

（2）因为 $AC\perp AD$，所以 $\angle CAD=90^0$，

由 $\sin C=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，得 $\tan C=\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………7 分

在 $\mathbf{Rt}\Delta ACD$ 中，$\tan C=\dfrac{AD}{AC}$，得 $AD=AC\tan C=\dfrac{2}{3}$， ……………………………8 分

因为 $\angle BAD=45^0$，所以 $S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{3}$.

…………………………………………………………10 分

18.（12 分）

解：（1）证明：在四棱锥 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\because AB // CD$，$CD \not\subset 平面ABB_1A_1$，

$AB \subset 平面ABB_1A_1$，$\therefore CD // 平面ABB_1A_1$. …………………………………………2 分

$\because AA_1 // DD_1, DD_1 \not\subset 平面ABB_1A_1, AA_1 \subset 平面ABB_1A_1$，

$\therefore DD_1 // 平面ABB_1A_1$. ……………………………………………… 3 分

又$\because DC \cap DD_1 = D, \therefore 平面ABB_1A_1 // 平面CDD_1C_1$，

$\because CD_1 \subset 平面CDD_1C_1, \therefore CD_1 // 平面ABB_1A_1$. …………………………………………5 分

（2）$\because AA_1 \perp 平面ABCD, AB \perp AD$，可得 AA_1, AB, AD 两两垂直，

以 AD, AB, AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

$\because CD_1$ 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle D_1CD$，$\therefore \angle D_1CD = 60^0$.

$\because CD = 2, \therefore DD_1 = 2\sqrt{3}$. 又$\because AB = 2CD = 4, AD = 3$，

$\therefore A(0,0,0), B(0,4,0), C(3,2,0), B_1\left(0,4,2\sqrt{3}\right), D_1\left(3,0,2\sqrt{3}\right)$. …………………7 分

设平面 ACD_1 的法向量 $\boldsymbol{m} = (x, y, z)$，$\because \overrightarrow{AC} = (3,2,0), \overrightarrow{AD_1} = \left(3,0,2\sqrt{3}\right)$，

$\therefore \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0$，

所以$\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 3x + 2\sqrt{3}z = 0 \end{cases}$，令 $z = -\sqrt{3}$，得 $x = 2, y = -3$，

可得 $\boldsymbol{m} = \left(2, -3, -\sqrt{3}\right)$. ……………………………………………………9 分

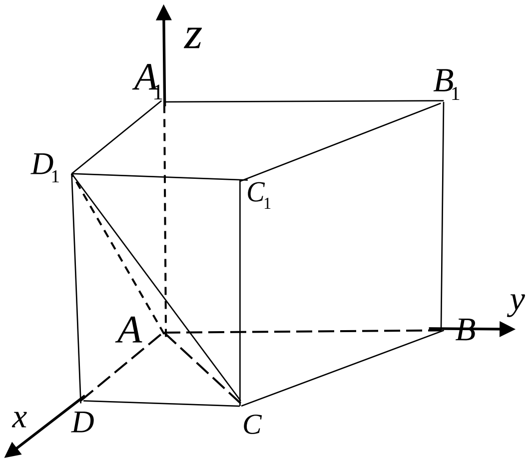
设平面 BCC_1B_1 的法向量 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$，$\because \overrightarrow{BB_1} = \left(0,0,2\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BC} = (3,-2,0)$，

所以$\begin{cases} 2\sqrt{3}z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$，令 $x = 2$，得 $y = 3, z = 0$，

可得 $\boldsymbol{n} = (2,3,0)$. ……………………………………………………11 分

因为$\left|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{5\sqrt{13}}{52}$，

所以平面ACD_1与平面BCC_1B_1夹角余弦值为$\dfrac{5\sqrt{13}}{52}$. ……………………………12 分



19.（12 分）

解：（1）函数 $f\left(x\right)$的定义域是$\left(0,+\infty\right)$，可得 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}=\dfrac{x-m}{x^2}$. ………………1 分

当$m\le 0$时，可知 $f'\left(x\right)>0$，所以 $f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增； ……………………2 分

当$m>0$时，由 $f'\left(x\right)=0$得$x=m$，可得$x\in\left(0,m\right)$时有 $f'\left(x\right)<0$，

$x\in\left(m,+\infty\right)$时有 $f'\left(x\right)>0$，所以 $f\left(x\right)$在$\left(0,m\right)$上单调递减，

$f\left(x\right)$在$\left(m,+\infty\right)$上单调递增. ……………………………………………………………4 分

综上可得，当$m\le 0$时， $f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；

当$m>0$时， $f\left(x\right)$在$\left(0,m\right)$上单调递减，在$\left(m,+\infty\right)$上单调递增. ………………5 分

（2）证明：当$m>0$时，要证$mf\left(x\right)\ge 2m-1$成立，

只需证 $f\left(x\right)\ge\dfrac{2m-1}{m}=2-\dfrac{1}{m}$成立，

只需证 $f\left(x\right)_{\min}\ge 2-\dfrac{1}{m}$即可. ……………………………………………………………6 分

因为$m>0$，由（1）知， $f\left(x\right)_{\min}=f\left(m\right)=1+\ln m$.

令 $g(m)=1+\ln m-\left(2-\frac{1}{m}\right)=\ln m+\frac{1}{m}-1$， ……………………………………8 分

由 $g'(m)=\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}=\frac{m-1}{m^2}$，可得 $m\in(0,1)$ 时有 $g'(m)<0$，$m\in(1,+\infty)$ 时有

$g'(m)>0$，所以 $g(m)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

可知 $g(m)_{\min}=g(1)=0$，有 $g(m)\geq 0$． ……………………………………11 分

所以有 $1+\ln m\geq 2-\frac{1}{m}$，从而当 $m>0$ 时，$mf(x)\geq 2m-1$ 成立. ………………12 分

20.（12 分）

解：（1）由题意得：$\frac{S_n}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=-\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{S_{n+1}-a_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=-\frac{1}{2}$，即 $\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=\frac{1}{2}$． ……………………………………2 分

又 $a_1=1$，所以 $\frac{S_1}{a_1}=1$，

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，

所以 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{n+1}{2}$，即 $S_n=\frac{n+1}{2}a_n$， ……………………………………3 分

所以 $S_{n+1}=\frac{n+2}{2}a_{n+1}$，两式相减得 $a_{n+1}=\frac{n+2}{2}a_{n+1}-\frac{n+1}{2}a_n$，即 $\frac{n}{2}a_{n+1}=\frac{n+1}{2}a_n$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\cdots=\frac{a_1}{1}=1$， ……………………………………5 分

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$． ……………………………………6 分

（2）由（1）可得：$b_n=\frac{1}{2n}$，$\frac{b_n-b_{n+1}}{\sqrt{b_n}}=\frac{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}}{\sqrt{\frac{1}{2n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(n+1)}$．…………7 分

因为 $\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\times\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\times\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),$$ ……………………………………………10 分

所以$\frac{b_1-b_2}{\sqrt{b_1}}+\frac{b_2-b_3}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{b_n-b_{n+1}}{\sqrt{b_n}}$

$$<\sqrt{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right]=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\sqrt{2}.$$

……………………………………………12 分

21.（12 分）

解：（1）由题意可知，X_1 的可能取值为$0,1,2$， ……………………………1 分

所以由概率乘法公式得：$P\left(X_1=0\right)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$，$P\left(X_1=1\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$，

$P\left(X_1=2\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

所以 X_1 的分布列为：

X_1	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

……………………………………3 分

（2）由全概率公式可知：

$P\left(X_{n+1}=1\right)=P\left(X_n=1\right)P\left(X_{n+1}=1|X_n=1\right)+P\left(X_n=2\right)P\left(X_{n+1}=1|X_n=2\right)$

$+P\left(X_n=0\right)P\left(X_{n+1}=1|X_n=0\right)$ ……………………………………4 分

$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)P\left(X_n=1\right)+\left(\frac{2}{3}\times1\right)P\left(X_n=2\right)+\left(1\times\frac{2}{3}\right)P\left(X_n=0\right)$

$=\frac{5}{9}P\left(X_n=1\right)+\frac{2}{3}P\left(X_n=2\right)+\frac{2}{3}P\left(X_n=0\right)$，

所以$a_{n+1}=\frac{5}{9}a_n+\frac{2}{3}b_n+\frac{2}{3}\left(1-a_n-b_n\right)$，即$a_{n+1}=-\frac{1}{9}a_n+\frac{2}{3}$.……………………5 分

所以$a_{n+1}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{9}\left(a_n-\frac{3}{5}\right)$. ……………………………………………6 分

又$a_1=P\left(X_1=1\right)=\dfrac{5}{9}$，

所以数列$\left\{a_n-\dfrac{3}{5}\right\}$是以$a_1-\dfrac{3}{5}$为首项，以$-\dfrac{1}{9}$为公比的等比数列，

所以$a_n-\dfrac{3}{5}=\left(-\dfrac{2}{45}\right)\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n$，即$a_n=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n$.……………7 分

（3）由全概率公式得：

$$P\left(X_{n+1}=2\right)=P\left(X_n=1\right)P\left(X_{n+1}=2\mid X_n=1\right)+P\left(X_n=2\right)P\left(X_{n+1}=2\mid X_n=2\right)$$

$$+P\left(X_n=0\right)P\left(X_{n+1}=2\mid X_n=0\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times P\left(X_n=1\right)+\left(\frac{1}{3}\times1\right)\times P\left(X_n=2\right)+0\times P\left(X_n=0\right),$$

所以$b_{n+1}=\dfrac{2}{9}a_n+\dfrac{1}{3}b_n$. ……………………………………………………………………8 分

又$a_n=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n$，

所以$b_{n+1}=\dfrac{2}{9}\times\left[\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n\right]+\dfrac{1}{3}b_n$，

所以$b_{n+1}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{3}\times\left[b_n-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n\right]$. ……………………………9 分

又$b_1=P\left(X_1=2\right)=\dfrac{2}{9}$，

所以$b_1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{2}{9}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{45}=0$， ……………………………………10 分

所以$b_n-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n=0$，$b_n=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n$， ……………………………………11 分

所以$E\left(X_n\right)=a_n+2b_n+0\times\left(1-a_n-b_n\right)=a_n+2b_n=1$. ……………………………………12 分

22.（12 分）

解：（1）设P点坐标为$\left(x,y\right)$，则由题意得：$\left|y+\dfrac{1}{4}\right|=\sqrt{x^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2}$， ……………2 分

整理得：$y=x^2$.

即W的方程为$y=x^2$. ……………………………………………………………3 分

（2）如图，不妨设三个顶点中有两个在y轴右侧（包括y轴），且设A、B、C

三点的坐标分别为$\left(x_1,y_1\right)$、$\left(x_2,y_2\right)$、$\left(x_3,y_3\right)$，BC的斜率为$k\left(k>0\right)$，则有

$y_3-y_2=k\left(x_3-x_2\right)$，$y_1-y_2=-\dfrac{1}{k}\left(x_1-x_2\right)$. ……………………………………………4 分

又A、B、C三点在抛物线W上，

所以$y_1={x_1}^2$，$y_2={x_2}^2$，$y_3={x_3}^2$，

代人上面两式得：$x_3=k-x_2$，$x_1=-\dfrac{1}{k}-x_2$. ……………………………………………5 分

由于$|AB|=|BC|$，

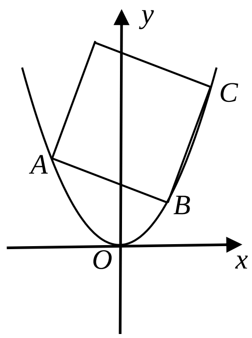
即$\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{\left(x_3-x_2\right)^2+\left(y_3-y_2\right)^2}$，

所以$\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left(x_2-x_1\right)=\sqrt{1+k^2}\left(x_3-x_2\right)$，$x_2-x_1=k\left(x_3-x_2\right)$，……………………7 分

所以$\dfrac{1}{k}+2x_2=k\left(k-2x_2\right)$，$k^2-\dfrac{1}{k}=\left(2k+2\right)x_2\geq 0$，

所以$k^3\geq 1$，$k\geq 1$，且有$x_2=\dfrac{k^3-1}{k\left(2k+2\right)}$. ……………………………………………9 分

所以正方形边长为



$\sqrt{1+k^2}\left(x_3-x_2\right)=\sqrt{1+k^2}\left(k-2x_2\right)$

$=\sqrt{1+k^2}\left[k-\dfrac{k^3-1}{k\left(k+1\right)}\right]$

$=\dfrac{\left(k^2+1\right)}{k}\cdot\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k+1}\geq\dfrac{2k}{k}\cdot\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+k\right)^2}}{k+1}=\sqrt{2}$. ……………………………………………11 分

当且仅当$k=1$时，即B点为原点时等号成立.

所以正方形面积的最小值为2. ……………………………………………12 分