2023～2024 学年度上期高中 2021 级入学联考
文科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	B	B	A	C	A	C	D	B	D	C	C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．4　　14．3　　15．$\dfrac{\sqrt{3}}{2(\pi-\sqrt{3})}$　　16．$\sqrt{3}$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）

解：（1）设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，

若 $3a_2$， $2a_3$， a_4 成等差数列，

则 $3a_2+a_4=4a_3$，即 $3a_2+a_2q^2=4a_2q$， ……………………………2 分

化简可得 $q^2-4q+3=0$，

又 $\because a_{n+1}>a_n$， ……………………………4 分

解得 $q=3$ 或 $q=1$（舍去），

$\therefore a_n=a_2q^{n-2}=3^{n-1}$； ……………………………6 分

（2）设数列 $\{a_n+n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

则 $S_n=3^0+1+3^1+2+3^2+3+\cdots+3^{n-1}+n$ ……………………………8 分

$=3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}+1+2+3+\cdots+n$

$=\dfrac{1\times(1-3^n)}{1-3}+\dfrac{n\cdot(1+n)}{2}$ ……………………………11 分

$=\dfrac{3^n}{2}+\dfrac{n^2+n-1}{2}=\dfrac{3^n+n^2+n-1}{2}$. ……………………………12 分

18．（12 分）

解：（1）由题设可知 $\angle ABD=\dfrac{\pi}{6}$， $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，

在 $\triangle ABE$ 中， $\angle AEB=\pi-\angle ABD-\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$，即 $BD\perp AC$， ……………………………3 分

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，又因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp BD$， ……………………………4 分

又因为 $PA\cap AC=A$， PA， $AC\subset$ 平面 PAC，

所以 $BD\perp$ 平面 PAC； ……………………………6 分

（2）由 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 PA 是三棱锥 $P-BCD$ 的高，

所以 $V_{C-PBD}=V_{P-BCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times PA=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle BCA}\times PA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}$. …………12 分

19．（12 分）

解：（1）由众数的定义可知，这100人当天体育锻炼时间的众数为$[30,40)$的组中值，即 35，

…………………………2 分

设这100人当天体育锻炼时间的平均数为$\overline{x}$；

则$\overline{x}=5\times0.10+15\times0.18+25\times0.22+35\times0.25+45\times0.20+55\times0.05=29.2$；…………………………6 分

（2）根据已知条件，2×2列联表如下：

	非“运动达人”	“运动达人”	合计
男性	30	15	45
女性	45	10	55
合计	75	25	100

…………………………8 分

根据2×2列联表中的数据有

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(30\times10-45\times15)^2}{45\times55\times75\times25}\approx3.030<3.841$，…………………11 分

所以没有 95% 的把握认为“运动达人”与性别有关．…………………………12 分

20．（12 分）

解：（1）因为$x\in\mathbf{R}$，$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x+1}$，设切点为$(x_0,x_0\mathrm{e}^{x_0+1})$，…………………………1 分

所以切线斜率为$(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0+1}$，切线为$y-x_0\mathrm{e}^{x_0+1}=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0+1}(x-x_0)$，…………………………4 分

将点$(0,0)$代入切线解得$x_0=0$，故切线方程为$y=\mathrm{e}x$；…………………………5 分

（2）令$g(x)=f(x-1)-ax+1-2\sin x=(x-1)\mathrm{e}^x-ax-2\sin x+1$，$x\in[0,+\infty)$，

则原不等式即为$g(x)\geqslant0$，显然$g(0)=0$，…………………………6 分

又$g'(x)=x\mathrm{e}^x-a-2\cos x$，且$g'(0)=-a-2$，…………………………7 分

再令$h(x)=x\mathrm{e}^x-a-2\cos x$，则$h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+2\sin x$，

当$0\leqslant x<\pi$时，$(x+1)\mathrm{e}^x>0$，$2\sin x\geqslant0$，所以$h'(x)>0$恒成立，

当$x\geqslant\pi$时，$h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+2\sin x\geqslant(\pi+1)\mathrm{e}^{\pi}+2\sin x>(\pi+1)\mathrm{e}^{\pi}-2>0$，…………………………9 分

所以当$x\geqslant0$时，恒有$h'(x)>0$，所以$h(x)$在区间$[0,+\infty)$上为增函数，…………………………10 分

即$g'(x)=x\mathrm{e}^x-a-2\cos x$在区间$[0,+\infty)$上为增函数，

因为当$a\leqslant-2$时，有$g'(x)>g'(0)=-a-2\geqslant0$，

所以$g(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，所以$g(x)>g(0)=0$，不等式恒成立．…………………12 分

21．（12 分）

解：（1）椭圆 C 的上顶点与右顶点的距离为 $\sqrt{3}$，即 $a^2+b^2=3$， ··························1 分

将 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 代入方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1$， ··························3 分

联立以上两式可得 $a^2=2$，$b^2=1$ 或 $a^2=\frac{3}{2}$，$b^2=\frac{3}{2}$（不合题意，舍去）， ·········4 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$； ··························5 分

（2）当直线 l 与 x 轴重合时，结论显然成立； ··························6 分

当直线 l 与 x 轴不重合时，设其方程为 $x=ty+3$；

联立 $\begin{cases}x=ty+3\\x^2+2y^2=2\end{cases}$，得 $(t^2+2)y^2+6ty+7=0$，

由 $\Delta\geqslant 0$，即 $(6t)^2-28(t^2+2)\geqslant 0$，解得 $t\geqslant\sqrt{7}$ 或 $t\leqslant-\sqrt{7}$， ··························7 分

设 A，B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

所以 $y_1+y_2=\frac{-6t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\frac{7}{t^2+2}$， ··························8 分

若存在点 Q 使得 $\angle PQA+\angle PQB=\pi$，即存在点 Q 使得 $k_{QA}+k_{QB}=0$，

设点 Q 的坐标为 $(m,0)$，因为 $\frac{y_1}{x_1-m}+\frac{y_2}{x_2-m}=0$，即 $y_1(x_2-m)+y_2(x_1-m)=0$，

即 $y_1(ty_2+3-m)+y_2(ty_1+3-m)=0$，整理得 $2ty_1y_2+(3-m)(y_1+y_2)=0$， ······10 分

代入得 $m=\frac{2}{3}$，所以点 Q 的坐标为 $(\frac{2}{3},0)$．

综上，x 轴上存在点 Q $(\frac{2}{3},0)$ 满足题意． ··························12 分

22．（10 分）

解：（1）曲线 C 的极坐标方程可化为 $2\rho^2\sin^2\theta+3\rho\cos\theta=3$， ··························2 分

又因为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

代入极坐标方程得 $2y^2+3x=3$； ··························5 分

（2）将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}t+m\\y=\frac{t}{2}\end{cases}$ 代入 $2y^2+3x=3$，

得关于参数 t 的方程 $\frac{t^2}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}t+3m-3=0$，若 l 与 C 有公共点，判别式 $\Delta\geqslant 0$， ·········8 分

即 $(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2-4\times\frac{1}{2}(3m-3)\geqslant 0$，解得 $m\leqslant\frac{17}{8}$． ··························10 分

23．（10 分）

解：（1）由题知，当 $m=2$ 时，原不等式即 $|x+1|+|x-2|\leqslant 5$ ， ……………………………1 分

当 $x\leqslant -1$ 时，不等式为 $-x-1-x+2\leqslant 5$ ，解得 $-2\leqslant x\leqslant -1$ ； ……………………………2 分

当 $-1<x<2$ 时，不等式为 $x+1-x+2\leqslant 5$ ，恒成立； ……………………………3 分

当 $x\geqslant 2$ 时，不等式为 $x+1+x-2\leqslant 5$ ，解得 $2\leqslant x\leqslant 3$ ， ……………………………4 分

综上，不等式 $f(x)\leqslant 5$ 的解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$ ； ……………………………5 分

（2）依题意 $f(x)>-m$ ，即 $|x+1|+|x-m|>-m$ 恒成立， ……………………………6 分

又因为 $|x+1|+|x-m|\geqslant|x+1-x+m|=|1+m|$ ，

当且仅当 $(x+1)(x-m)\leqslant 0$ 时不等式取等号，即 $f(x)_{\min}=|1+m|$ ， ……………………………8 分

所以 $|1+m|>-m$ ，解得 $m>-\dfrac{1}{2}$. ……………………………10 分

解析：

1．D

由复数模的定义得$|z|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，选 D．

2．B

因为$A\bigcup B=\{x\,|\,x>-1\}$，所以$\complement_U(A\bigcup B)=\{x\,|\,x\leqslant -1\}$，选 B．

3．B

其外接球直径$2r=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$，所以$S=\pi(2r)^2=3\pi$，选 B．

4．A

因为$a=\ln 0.9<\ln 1=0$，而$0<2^{-0.1}<2^0$，所以$0<c<1$，所以$a<c<b$，选 A．

5．C

由题知被标记的鱼大约占总体的3%，所以鲤鱼大约有$100\div 3\%\approx 3\,333$条，选 C．

6．A

函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，由题知$f(x)$是定义域在$\mathbf{R}$上的奇函数，

所以$f(-x)=-f(x)$，即$(-x+a)(2^{-x}+2^x)=-(x+a)(2^x+2^{-x})$，化简得$a=0$，选 A．

7．C

由斜率的定义有$\tan\theta=2$，所以$\sin 2\theta=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{4}{5}$，选 C．

8．D

方程$x^2-2x+y^2=2$可化为$(x-1)^2+y^2=3$，

则圆心C为$C(1,0)$，半径为$\sqrt{3}$，

因为$|PC|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，在$\triangle PAC$中，$\angle PAC=\dfrac{\pi}{2}$，$AC=\sqrt{3}$，

所以$\angle APC=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\angle APB=2\angle APC=\dfrac{2\pi}{3}$，选 D．

9．B

当$k\leqslant 0$时，$f(x)$在区间$(1,\mathrm{e})$上是减函数（不符合题意）；

当$k>0$时，$f'(x)=k\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}\geqslant 0$，即$\dfrac{1}{k}\leqslant x\mathrm{e}^x$，

令$g(x)=x\mathrm{e}^x$，有$g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x>0$，

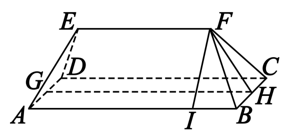
所以$g(x)=x\mathrm{e}^x$在区间$(1,\mathrm{e})$是增函数，$\dfrac{1}{k}\leqslant g(x)_{\min}=g(1)=\mathrm{e}$，

所以$k\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，选 B．

10．D

分别作AD，BC的中点G，H，连接GH，FH，

过点F作AB的垂线FI，垂足为I，



因为$FB=FC$，所以$FH\perp BC$，所以$FH=\sqrt{5}$，

根据对称性易得$\triangle FBC\cong\triangle EAD$，

所以$S_{\triangle FBC}=\dfrac{1}{2}BC\times FH=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle FBI$中，$FI=\sqrt{FB^2-BI^2}=\sqrt{5}$，

$S_{梯形FEAB}=\dfrac{1}{2}(EF+AB)\times FI=\dfrac{1}{2}\times(4+8)\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$，

又 $S_{矩形ABCD}=AB\times BC=32$，

所以 $S_{FE-ABCD}=2S_{\triangle FBC}+2S_{梯形FEAB}+S_{矩形ABCD}=32+16\sqrt{5}$，选 D.

11．C

令 $2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})=-1$，解得 $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 或 $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

令 $2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})=2$，解得 $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

结合图象可知 $m=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，同时 $n\in[\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,-\dfrac{\pi}{2}+(2k+2)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $n-m$ 的最小值为 $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi-\dfrac{\pi}{6}-2k\pi=\dfrac{2\pi}{3}$．选 C.

12．C

抛物线的焦点 F 为 $(\dfrac{1}{2},0)$，由重心的性质有 $x_A+x_B+x_C=3x_F=\dfrac{3}{2}$，

又由抛物线的定义知 $|FA|=x_A+\dfrac{1}{2}$，

同理可得 $|FA|+|FB|+|FC|=x_A+x_B+x_C+\dfrac{3}{2}=3x_F+\dfrac{3}{2}$，

又因为 $x_F=\dfrac{1}{2}$，所以 $|FA|+|FB|+|FC|=3$，选 C.

13．4

因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,0)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(1,-\sqrt{2})\cdot(4,0)=4$．

14．3

因为 $\dfrac{1}{\sqrt{m}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以解得 $m=3$．

15．$\dfrac{\sqrt{3}}{2(\pi-\sqrt{3})}$

设等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

$\triangle ABC$ 对应的勒洛三角形的面积为 $\dfrac{1}{2}\pi a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2=\dfrac{1}{2}a^2(\pi-\sqrt{3})$，

所以取自 $\triangle ABC$ 及其内部的概率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2(\pi-\sqrt{3})}$．

16．$\sqrt{3}$

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}$，

即 $4+bc=b^2+c^2$，即 $4+bc=b^2+c^2$，

因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，即 $4+bc\geqslant 2bc$，即 $bc\leqslant 4$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$．