经典(超越)不等式

一、结论

(1) 对数形式:$x\geqslant 1+\ln x(x>0)$, 当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立.

(2) 指数形式:$e^x\geqslant x+1(x\in R)$, 当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立.

进一步可得到一组不等式链:$e^x>x+1>x>1+\ln x(x>0$ 且 $x\neq 1)$

上述两个经典不等式的原型是来自于泰勒级数:

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$;

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$;

截取片段:

$e^x\geqslant x+1(x\in R)$

$\ln(1+x)\leqslant x(x>-1)$,当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立;

进而:$\ln x\leqslant x-1(x>0)$ 当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立

二、典型例题

例 1 (2023·陕西咸阳·校考模拟预测) 已知 $a=\dfrac{2}{5}, b=e^{-\frac{3}{5}}, c=\ln 5-\ln 4$,则 (　　)

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

【答案】C

【详解】$f(x)=e^x-1-x$

$f'(x)=e^x-1$,则 $x\in(0,+\infty), f'(x)>0, x\in(-\infty,0), f'(x)<0$,故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, $(0,+\infty)$ 单调递增,则 $f(x)\geqslant f(0)=0$

则 $e^x-1-x\geqslant 0$,即 $e^x\geqslant 1+x$

由 $e^x\geqslant 1+x$, $\therefore e^{-\frac{3}{5}}>\dfrac{2}{5}$,故 $b>a$

同理可证 $\ln(1+x)\leqslant x$

又 $\because \ln(1+x)\leqslant x$, $\therefore \ln 5-\ln 4=\ln\left(1+\dfrac{1}{4}\right)<\dfrac{1}{4}$,则 $b>a>c$

故选:C.

【反思】对于指数形式:$e^x\geqslant x+1(x\in R)$, 当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立,该不等式是可以变形使用的:

$$e^x\geqslant x+1(x\in R)\xrightarrow{-x\text{替换}x}e^{-x}\geqslant -x+1,\text{即}\ \frac{1}{e^x}\geqslant 1-x\begin{cases}\xrightarrow{\text{当}x<1}e^x\leqslant\dfrac{1}{1-x}\\ \xrightarrow{\text{当}x>1}e^x\geqslant\dfrac{1}{1-x}\end{cases}$$

注意使用时 x 的取值范围;

同样的还可以如下处理:$e^x\geqslant x+1(x\in R)$ 两边同时取对数:$x\geqslant\ln(x+1)\ (x>-1)$,同样可以变形使用:

$$x\geqslant\ln(x+1)\ (x>-1)\xrightarrow{"x-1"\text{替换}"x"}x-1\geqslant\ln x(x>0)\xrightarrow{\text{左右两边同乘以“}-1\text{”}}1-x\leqslant -\ln x(x>0);$$

$$1-x\leqslant -\ln x(x>0)\Leftrightarrow 1-x\leqslant \ln\frac{1}{x}(x>0)\xrightarrow{\text{用“}\frac{1}{x}\text{”替换“}x\text{”}}1-\frac{1}{x}\leqslant \ln x\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\leqslant \ln x$$

注意使用时 x 的取值范围.

另外,选择填空题中,涉及到超越不等式可以直接使用,但是注意,解答题中一定要先证后用.

例 2 (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x)=e^x-x-1$.

(1) 证明:$f(x)\geqslant 0$;

(2) 证明:$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【详解】(1)$f'(x)=e^x-1$,

令 $f'(x)>0$,得 $x>0$;令 $f'(x)<0$,得 $x<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$,所以 $f(x)\geqslant 0$.

(2) 由 (1) 知,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)>f(0)=0$,即 $e^x-x-1>0$, 即 $e^x>x+1$,即 $x>\ln(x+1)$,

令 $x=\frac{1}{2^n}$,得 $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2^n}$,

所以 $\ln\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1$,

故 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$.

【反思】注意在解答题中 $e^x\geqslant 1+x$,$x\geqslant 1+\ln x(x>0)$ 等超越不等式,及其变形式,不能直接使用,需要证明后才可以使用,才可以进一步变形得到有利于解题的不等式.

三、针对训练 举一反三

一、单选题

1. (2023 春·浙江·高三校联考开学考试) 设 $a=\frac{1}{2022}$,$b=\tan\frac{1}{2022}\cdot e^{\frac{1}{2022}}$,$c=\sin\frac{1}{2023}\cdot e^{\frac{1}{2023}}$,则 (　　)

A. $c<b<a$　　B. $c<a<b$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

【答案】B

【详解】设 $f(x)=e^x-(x+1)$,则 $f'(x)=e^x-1$,在 $(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,在 $(-\infty,0)$ 时,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$,即 $e^x-(x+1)\geqslant 0$,所以 $e^x\geqslant x+1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 均成立. 取 $x=\frac{1}{2022}$,

有 $e^{\frac{1}{2022}}>\frac{1}{2022}+1=\frac{2023}{2022}$,所以 $\frac{1}{2023}e^{\frac{1}{2022}}>\frac{1}{2022}$.

再取 $x=-\frac{1}{2023}$，可得 $e^{-\frac{1}{2023}}>1-\frac{1}{2023}=\frac{2022}{2023}$，两边取倒数，即 $e^{\frac{1}{2023}}<\frac{2023}{2022}$，

所以 $\frac{1}{2023}e^{\frac{1}{2023}}<\frac{1}{2022}$，

又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，设 $F(x)=x-\sin x$，$G(x)=\tan x-x$，则 $F'(x)=1-\cos x>0$，

$G'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}>0$，即 $F(x)$ 和 $G(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 均递增，

所以 $F(x)>F(0)=0$，$G(x)>G(0)=0$，即 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x<x<\tan x$，所以

$\sin\frac{1}{2023}\cdot e^{\frac{1}{2023}}<\frac{1}{2023}e^{\frac{1}{2023}}<\frac{1}{2022}<\frac{1}{2023}e^{\frac{1}{2022}}<\tan\frac{1}{2023}\cdot e^{\frac{1}{2022}}$，

由 $\tan x$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，可得 $\tan\frac{1}{2023}\cdot e^{\frac{1}{2022}}<\tan\frac{1}{2022}\cdot e^{\frac{1}{2022}}$，即 $c<a<b$.

故选：B

2. (2023秋·江苏苏州·高三常熟中学校考期末)$a=e^{0.2}$，$b=\log_7 8$，$c=\log_6 7$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

【答案】C

【详解】令 $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}(x>0)$

则 $f'(x)=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$，显然 $f'(x)<0$

即 $f(x)$ 单调递减，所以 $\frac{\ln 7}{\ln 6}>\frac{\ln 8}{\ln 7}$，即 $\log_6 7>\log_7 8$，$c>b$.

令 $g(x)=e^x-x-1(x\geqslant 0)$

则 $g'(x)=e^x-1\geqslant 0$，即 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $e^x\geqslant x+1$，

所以 $e^{0.2}>0.2+1=\frac{6}{5}$

令 $h(x)=\frac{x}{6}-\frac{\ln x}{\ln 6}$

则 $h'(x)=\frac{1}{6}-\frac{1}{x\ln 6}$

当 $h'(x)>0$ 时，$x>\frac{6}{\ln 6}$，即 $h(x)$ 在 $\left(\frac{6}{\ln 6},+\infty\right)$ 上单调递增

又 $h(6)=0$，所以当 $x>6$ 时，$h(x)>h(6)=0$

所以 $h(7)>h(6)=0$，即 $\frac{7}{6}-\frac{\ln 7}{\ln 6}>0$

即 $\log_6 7<\frac{7}{6}$，

又 $\frac{7}{6}<\frac{6}{5}$，所以 $\log_6 7<\frac{7}{6}<\frac{6}{5}<e^{0.2}$，即 $c<a$.

综上：$a>c>b$.

故选：C.

3. (2023·云南曲靖·统考一模) 已知 $a=\mathrm{e}-2$，$b=1-\ln 2$，$c=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{2}$，则（　　）

A. $c>b>a$　　B. $a>b>c$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

【答案】D

【详解】令 $f(x)=x-1-\ln x, x>0$，

则 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}-1-\ln e=\mathrm{e}-2=a$，$f(2)=2-1-\ln 2=1-\ln 2=b$，

$\because f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(\mathrm{e})>f(2)$，即 $a>b$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^{x}-x$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(\mathrm{e})>g(2)$，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}>\mathrm{e}^{2}-2$，

所以 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{2}>\mathrm{e}-2$，即 $c>a$.

综上，$c>a>b$.

故选：D.

4. (2023·全国·高三专题练习) 已知 $a=\mathrm{e}^{\sin 1-1}, b=\sin 1, c=\cos 1$，则（　　）

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

【答案】C

【详解】解：当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$，$\sin x>\cos x$，又 $1\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$，所以 $\sin 1>\cos 1$，故 $b>c$

记 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$，

令 $f'(x)<0$，得 $x<0$，令 $f'(x)>0$，得 $x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即 $\mathrm{e}^{x}-x-1\geqslant 0$，当 $x=0$ 时取等号.

所以 $a=\mathrm{e}^{\sin 1-1}>(\sin 1-1)+1=\sin 1=b$，

所以 $c<b<a$.

故选：C.

5. (2023·全国·高三专题练习) 已知 $a>b+1>1$ 则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $|b-a|>b$　　B. $a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$　　C. $\dfrac{b+1}{a-1}<\dfrac{\mathrm{e}^{b}}{\ln a}$　　D. $a+\ln b<b+\ln a$

【答案】C

【详解】取 $a=10, b=8$，则 $|b-a|<b$，故 A 选项错误；

取 $a=3$，$b=\dfrac{1}{3}$，$a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$，则 B 选项错误；

取 $a=3$, $b=1$, 则 $a+\ln b=3$, $b+\ln a=1+\ln 3<1+\ln e^2=3$, 即 $a+\ln b>b+\ln a$,

故 D 选项错误;

关于 C 选项, 先证明一个不等式: $e^x \geqslant x+1$, 令 $y=e^x-x-1$, $y'=e^x-1$,

于是 $x>0$ 时 $y'>0$, y 递增; $x<0$ 时 $y'<0$, y 递减;

所以 $x=0$ 时, y 有极小值, 也是最小值 $e^0-0-1=0$,

于是 $y=e^x-x-1\geqslant 0$, 当且仅当 $x=0$ 取得等号,

由 $e^x\geqslant x+1$, 当 $x>-1$ 时, 同时取对数可得, $x\geqslant \ln(x+1)$,

再用 $x-1$ 替换 x, 得到 $x-1\geqslant \ln x$, 当且仅当 $x=1$ 取得等号,

由于 $a>b+1>1$, 得到 $e^b>b+1$, $\ln a<a-1$, $\therefore \dfrac{a-1}{\ln a}>1>\dfrac{b+1}{e^b}$, 即 $\dfrac{b+1}{a-1}<\dfrac{e^b}{\ln a}$,

C 选项正确.

故选: C.

6. (2023·全国·高三专题练习) 已知实数 a, b, c 满足 $ac=b^2$, 且 $a+b+c=\ln(a+b)$, 则 (　　)

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

【答案】A

【详解】设 $f(x)=\ln x-x+1$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$,

当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore f(x)\leqslant f(1)=0$, 即 $\ln x\leqslant x-1$,

所以 $\ln(a+b)\leqslant a+b-1$, 所以 $a+b+c\leqslant a+b-1$, 即 $c\leqslant -1$,

又 $ac=b^2>0$, 所以 $a<0$, 由 $a+b>0$, 所以 $b>-a>0$,

所以 $b^2>a^2$, 即 $ac>a^2$, 所以 $c<a$, 所以 $c<a<b$.

故选: A.

7. (2023·全国·高三专题练习) 若正实数 a, b 满足 $\ln a+\ln b^2\geqslant 2a+\dfrac{b^2}{2}-2$, 则 (　　)

A. $a+2b=\sqrt{2}+\dfrac{1}{4}$　　B. $a-2b=\dfrac{1}{2}-2\sqrt{2}$　　C. $a>b^2$　　D. $b^2-4a<0$

【答案】B

到各不等式取等号的条件, 解得 a,b 的值, 然后逐一检验即可做出正确判断.

【详解】先证明熟知的结论: $x-1\geqslant \ln x$ 恒成立, 且当且仅当 $x=1$ 时取等号.

设 $f(x)=x-1-\ln x$, 则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$,

在 $(0,1)$ 上, $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减; 在 $(1,+\infty)$ 上, $f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)_{\min}=f(1)=1-1-0=0$,

$\therefore f(x)=x-1\geqslant \ln x$ 恒成立, 且当且仅当 $x=1$ 时取等号.

由 $2a+\dfrac{b^2}{2}-2\geqslant 2\sqrt{2a\times\dfrac{b^2}{2}}-2=2\left(\sqrt{ab^2}-1\right)\geqslant 2\ln\sqrt{ab^2}=\ln a+\ln b^2$,

由已知 $\ln a+\ln b^2\leqslant 2a+\frac{b^2}{2}-2$，

$\therefore \ln a+\ln b^2=2a+\frac{b^2}{2}-2$，且 $\begin{cases}2a=\frac{b^2}{2}\\ \sqrt{ab^2}=1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$，

经检验只有 B 正确，

故选：B.

8. (2023·四川南充·四川省南充高级中学校考模拟预测) 已知 a_1,a_2,a_3,a_4 成等比数列，且 $a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$．若 $a_1>1$，则

A. $a_1<a_3,a_2<a_4$　　B. $a_1>a_3,a_2<a_4$　　C. $a_1<a_3,a_2>a_4$　　D. $a_1>a_3,a_2>a_4$

【答案】B

【详解】令 $f(x)=x-\ln x-1$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，所以当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，因此 $f(x)\geqslant f(1)=0$，$\therefore x\geqslant \ln x+1$，

若公比 $q>0$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4>a_1+a_2+a_3>\ln(a_1+a_2+a_3)$，不合题意；

若公比 $q\leqslant -1$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=a_1(1+q)(1+q^2)\leqslant 0$，

但 $\ln(a_1+a_2+a_3)=\ln[a_1(1+q+q^2)]>\ln a_1>0$，

即 $a_1+a_2+a_3+a_4\leqslant 0<\ln(a_1+a_2+a_3)$，不合题意；

因此 $-1<q<0, q^2\in(0,1)$，

$\therefore a_1>a_1q^2=a_3, a_2<a_2q^2=a_4<0$，选 B.

二、填空题

9. (2022春·广东佛山·高二佛山市顺德区容山中学校考期中) 已知对任意 x，都有 $xe^{2x}-ax-x\geqslant 1+\ln x$，则实数 a 的取值范围是 ______.

【答案】$(-\infty,1]$

【详解】根据题意可知，$x>0$，

由 $x\cdot e^{2x}-ax-x\geqslant 1+\ln x$，可得 $a\leqslant e^{2x}-\frac{\ln x+1}{x}-1(x>0)$ 恒成立，

令 $f(x)=e^{2x}-\frac{\ln x+1}{x}-1$，则 $a\leqslant f(x)_{\min}$，

现证明 $e^x\geqslant x+1$ 恒成立，设 $g(x)=e^x-x-1$，

$g'(x)=e^x-1$，当 $g'(x)=0$ 时，解得：$x=0$，

当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递增，故 $x=0$ 时，函数 $g(x)$ 取得最小值，$g(0)=0$，

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $e^x-x-1\geqslant 0\Leftrightarrow e^x\geqslant x+1$ 恒成立，

$f(x)=e^{2x}-\frac{\ln x+1}{x}-1=\frac{x\cdot e^{2x}-\ln x-1}{x}-1$，

$=\dfrac{e^{\ln x+2x}-\ln x-1}{x}-1\geqslant\dfrac{\ln x+2x+1-\ln x-1}{x}-1=1$,

所以 $f(x)_{\min}=1$，即 $a\leqslant1$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

故答案为：$(-\infty,1]$

三、解答题

10. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x)=e^x-a$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=x-1$ 相切，求 a 的值；

(2) 若 $a\leqslant2$，证明 $f(x)>\ln\ x$.

【答案】(1)$a=2$

(2) 证明见解析

(1)

解：$f(x)=ex-a$，$\therefore f'(x)=ex$，令 $f'(x)=1$，得 $x=0$，

而当 $x=0$ 时，$y=-1$，即 $f(0)=-1$，所以 $f(0)=e^0-a=-1$，解得 $a=2$.

(2)

证明　$\because a\leqslant2$，$\therefore f(x)=ex-a\geqslant ex-2$，

令 $\varphi(x)=ex-x-1$，则 $\varphi'(x)=ex-1$，令 $\varphi'(x)=0\Rightarrow x=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore \varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=0$，即 $\varphi(x)\geqslant0$，即 $ex\geqslant x+1$，

$\therefore ex-2\geqslant x-1$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，令 $h'(x)=0\Rightarrow x=1$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=0$，即 $h(x)\leqslant h(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，

$\therefore \ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，

$\therefore ex-2\geqslant x-1\geqslant\ln\ x$，两等号不能同时成立，

$\therefore ex-2>\ln\ x$，即证 $f(x)>\ln\ x$.