

# 经典(超越)不等式

## 一、结论

(1) 对数形式:  $x \geq 1 + \ln x (x > 0)$ , 当且仅当  $x = 1$  时, 等号成立.

(2) 指数形式:  $e^x \geq x + 1 (x \in \mathbb{R})$ , 当且仅当  $x = 0$  时, 等号成立.

进一步可得到一组不等式链:  $e^x > x + 1 > x > 1 + \ln x (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1)$

上述两个经典不等式的原型是来自于泰勒级数:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1});$$

截取片段:

$$e^x \geq x + 1 (x \in \mathbb{R})$$

$\ln(1+x) \leq x (x > -1)$ , 当且仅当  $x = 0$  时, 等号成立;

进而:  $\ln x \leq x - 1 (x > 0)$  当且仅当  $x = 1$  时, 等号成立

## 二、典型例题

**例 1** (2023·陕西咸阳·校考模拟预测) 已知  $a = \frac{2}{5}, b = e^{-\frac{3}{5}}, c = \ln 5 - \ln 4$ , 则 ( )

A.  $a > b > c$

B.  $a > c > b$

C.  $b > a > c$

D.  $b > c > a$

**例 2** (2023·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = e^x - x - 1$ .

(1) 证明:  $f(x) \geq 0$ ;

(2) 证明:  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < e$ .

### 三、针对训练 举一反三

#### 一、单选题

1. (2023春·浙江·高三校联考开学考试) 设  $a = \frac{1}{2022}$ ,  $b = \tan \frac{1}{2022} \cdot e^{\frac{1}{2022}}$ ,  $c = \sin \frac{1}{2023} \cdot e^{\frac{1}{2023}}$ , 则 ( )
- A.  $c < b < a$                       B.  $c < a < b$                       C.  $a < c < b$                       D.  $a < b < c$
2. (2023秋·江苏苏州·高三常熟中学校考期末)  $a = e^{0.2}$ ,  $b = \log_3 8$ ,  $c = \log_6 7$ , 则 ( )
- A.  $a > b > c$                       B.  $b > a > c$                       C.  $a > c > b$                       D.  $c > a > b$
3. (2023·云南曲靖·统考一模) 已知  $a = e - 2$ ,  $b = 1 - \ln 2$ ,  $c = e^e - e^2$ , 则 ( )
- A.  $c > b > a$                       B.  $a > b > c$                       C.  $a > c > b$                       D.  $c > a > b$
4. (2023·全国·高三专题练习) 已知  $a = e^{\sin 1 - 1}$ ,  $b = \sin 1$ ,  $c = \cos 1$ , 则 ( )
- A.  $a < c < b$                       B.  $a < b < c$                       C.  $c < b < a$                       D.  $c < a < b$
5. (2023·全国·高三专题练习) 已知  $a > b + 1 > 1$  则下列不等式一定成立的是 ( )
- A.  $|b - a| > b$                       B.  $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$                       C.  $\frac{b+1}{a-1} < \frac{e^b}{\ln a}$                       D.  $a + \ln b < b + \ln a$
6. (2023·全国·高三专题练习) 已知实数  $a, b, c$  满足  $ac = b^2$ , 且  $a + b + c = \ln(a + b)$ , 则 ( )
- A.  $c < a < b$                       B.  $c < b < a$                       C.  $a < c < b$                       D.  $b < c < a$
7. (2023·全国·高三专题练习) 若正实数  $a, b$  满足  $\ln a + \ln b^2 \geq 2a + \frac{b^2}{2} - 2$ , 则 ( )
- A.  $a + 2b = \sqrt{2} + \frac{1}{4}$                       B.  $a - 2b = \frac{1}{2} - 2\sqrt{2}$                       C.  $a > b^2$                       D.  $b^2 - 4a < 0$
8. (2023·四川南充·四川省南充高级中学校考模拟预测) 已知  $a_1, a_2, a_3, a_4$  成等比数列, 且  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \ln(a_1 + a_2 + a_3)$ . 若  $a_1 > 1$ , 则
- A.  $a_1 < a_3, a_2 < a_4$                       B.  $a_1 > a_3, a_2 < a_4$                       C.  $a_1 < a_3, a_2 > a_4$                       D.  $a_1 > a_3, a_2 > a_4$

#### 二、填空题

9. (2022春·广东佛山·高二佛山市顺德区容山中学校考期中) 已知对任意  $x$ , 都有  $xe^{2x} - ax - x \geq 1 + \ln x$ , 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

#### 三、解答题

10. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = e^x - a$ .

- (1) 若函数  $f(x)$  的图象与直线  $y = x - 1$  相切, 求  $a$  的值;
- (2) 若  $a \leq 2$ , 证明  $f(x) > \ln x$ .