多面体的外接球和内切球

一、结论

1、球与多面体的接、切

定义1:若一个多面体的各顶点都在一个球面上,则称这个多面体是这个球的内接多面体,这个球是多面体的外接球。

定义2:若一个多面体的各面都与一个球的球面相切,则称这个多面体是这个球的外切多面体,这个球是多面体的内切球。

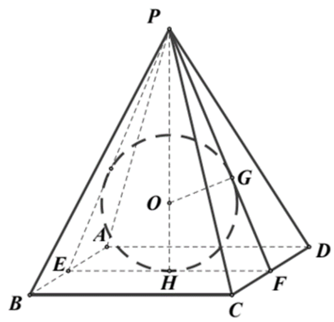
类型一 球的内切问题(等体积法)

例如:在四棱锥 $P-ABCD$ 中,内切球为球 O,求球半径 r.

方法如下:

$V_{P-ABCD}=V_{O-ABCD}+V_{O-PBC}+V_{O-PCD}+V_{O-PAD}+V_{O-PAB}$

即:$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PBC}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PCD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PAD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PAB}\cdot r$,可求出 r.



类型二 球的外接问题

1. 公式法

正方体或长方体的外接球的球心为其体对角线的中点

2. 补形法(补长方体或正方体)

①墙角模型(三条线两个垂直)

题设:三条棱两两垂直(重点考察三视图)

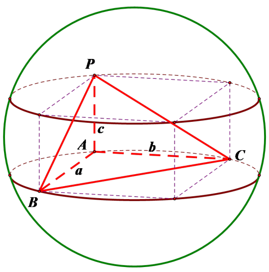


图1

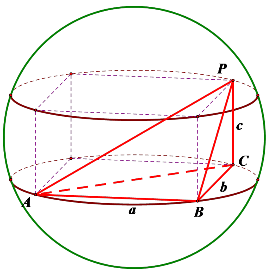


图2

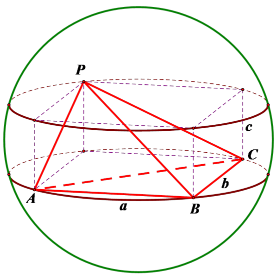
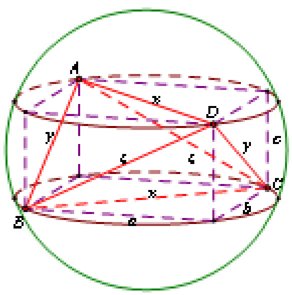


图3

②对棱相等模型(补形为长方体)

题设:三棱锥(即四面体)中,已知三组对棱分别相等,求外接球半径($AB=CD$,$AD=BC$,$AC=BD$)

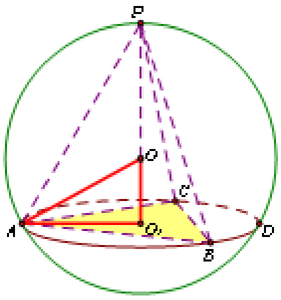


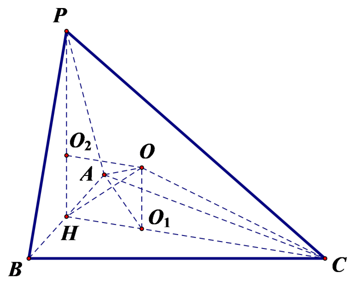
3. 单面定球心法(定+算)

步骤:①定一个面外接圆圆心:选中一个面如图:在三棱锥 $P-ABC$ 中,选中底面 ΔABC,确定其外接圆圆心 O_1(正三角形外心就是中心,直角三角形外心在斜边中点上,普通三角形用正弦定理定外心 $2r=\frac{a}{\sin A}$);

②过外心 O_1 做(找)底面 ΔABC 的垂线,如图中 $PO_1\perp$ 面 ABC,则球心一定在直线(注意不一定在线段 PO_1 上)PO_1 上;

③计算求半径 R:在直线 PO_1 上任取一点 O 如图:则 $OP=OA=R$,利用公式 $OA^2=O_1A^2+OO_1^2$ 可计算出球半径 R.





4. 双面定球心法(两次单面定球心)

如图:在三棱锥 $P-ABC$ 中:

①选定底面 ΔABC,定 ΔABC 外接圆圆心 O_1

②选定面 ΔPAB,定 ΔPAB 外接圆圆心 O_2

③分别过 O_1 做面 ABC 的垂线,和 O_2 做面 PAB 的垂线,两垂线交点即为外接球球心 O.

二、典型例题

例 1 (2023春·湖南湘潭·高二统考期末)棱长为1的正方体的外接球的表面积为(　　)

A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. 3π　　C. 12π　　D. 16π

【答案】B

【详解】解:易知,正方体的体对角线是其外接球的直径,设外接球的半径为 R,

则 $2R=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$,故 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi$.

故选:B.

【反思】本例属于正方体外接球问题,其外接球半径公式可直接记忆.

例 2 (2023春·湖南长沙·高三长沙一中校考阶段练习)在四面体 $PABC$ 中,$PA\perp AB$,$PA\perp AC$,$\angle BAC=120°$,$AB=AC=AP=2$,则该四面体的外接球的表面积为(　　)

A. 12π　　B. 16π　　C. 18π　　D. 20π

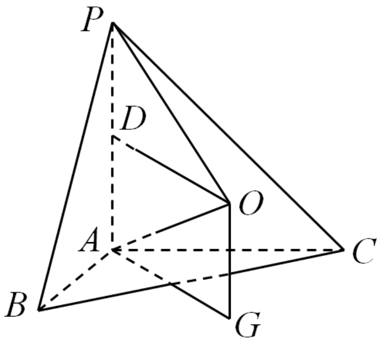
【答案】D

【详解】因为 $PA\perp AB$,$PA\perp AC$,$AB\cap AC=A$,$AB,AC\subset$ 平面 ABC,

所以 $PA\perp$ 平面 ABC.

设底面 $\triangle ABC$ 的外心为 G,外接球的球心为 O,则 $OG\perp$ 平面 ABC,所以 $PA\,/\!/\,OG$.

设 D 为 PA 的中点,



因为 $OP=OA$,所以 $DO\perp PA$.

因为 $PA\perp$ 平面 ABC, $AG\subset$ 平面 ABC,

所以 $PA\perp AG$,所以 $OD /\!/ AG$.

因此四边形 $ODAG$ 为平行四边形,所以 $OG=AD=\dfrac{1}{2}PA=1$.

因为 $\angle BAC=120^{\circ}$, $AB=AC=2$,

所以 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC}=\sqrt{4+4-2\times2\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=2\sqrt{3}$,

由正弦定理,得 $2AG=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\Rightarrow AG=2$.

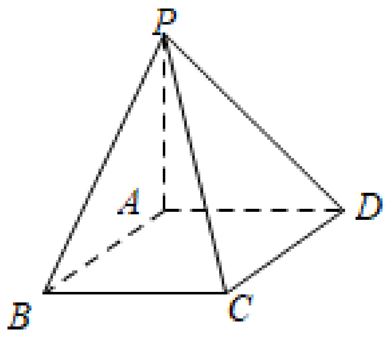
所以该外接球的半径 R 满足 $R^2=(OG)^2+(AG)^2=5$,

故该外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=20\pi$.

故选:D.

【反思】本例属于单面定球心问题①用正弦定理求出 ΔABC 外心 G;②过 G 做平面 ABC 的垂线,则外接球球心 O 在此垂线上;③通过计算算出半径.

例 3 (2023 秋·湖南娄底·高三校联考期末)《九章算术》是我国古代数学名著,它在几何学中的研究比西方早 1000 多年.在《九章算术》中,将底面为矩形且一侧棱垂直于底面的四棱锥称为阳马.如图 $P-ABCD$ 是阳马,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,$PA=5$,$AB=3$,$BC=4$.则该阳马的外接球的表面积为( )



A. $\dfrac{125\sqrt{2}\pi}{3}$　　B. 50π　　C. 100π　　D. $\dfrac{500\pi}{3}$

【答案】B

【详解】因 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\subset$ 平面 $ABCD$, $AD\subset$ 平面 $ABCD$,

则 $PA\perp AB$, $PA\perp AD$,又因四边形 $ABCD$ 为矩形,则 $AB\perp AD$.

则阳马的外接球与以 PA, AB, AD 为长宽高的长方体的外接球相同.

又 $PA=5$, $AB=3$, $AD=BC=4$.则外接球的直径为长方体体对角线,故外接球半径为:$R=$

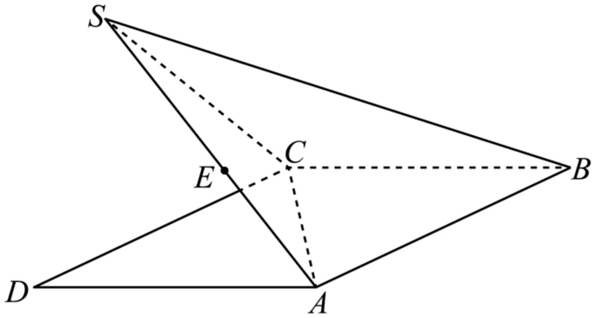
$\dfrac{\sqrt{PA^2+AB^2+AD^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$,

则外接球的表面积为：$S=4\pi R^2=4\pi\cdot\dfrac{50}{4}=50\pi$.

故选：B

【反思】本例属于墙角型模型，通过补形，将原图形补成长方体模型，借助长方体模型求外接球半径.

例 4 (2023·全国·高三专题练习) 已知菱形 $ABCD$ 的各边长为 2，$\angle D=60^\circ$. 如图所示，将 ΔACD 沿 AC 折起，使得点 D 到达点 S 的位置，连接 SB，得到三棱锥 $S-ABC$，此时 $SB=3$. E 是线段 SA 的中点，点 F 在三棱锥 $S-ABC$ 的外接球上运动，且始终保持 $EF\perp AC$，则点 F 的轨迹的周长为（　　）

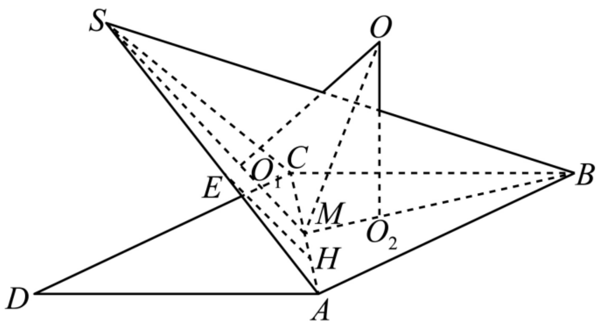


A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$　　C. $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\pi$　　D. $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\pi$

【答案】C

【详解】取 AC 中点 M，则 $AC\perp BM$，$AC\perp SM$，$BM\cap SM=M$，

$\therefore AC\perp$ 平面 SMB，$SM=MB=\sqrt{3}$，又 $SB=3$，$\therefore \angle SBM=\angle MSB=30^\circ$，作 $EH\perp AC$ 于 H，设点 F 轨迹所在平面为 α，则平面 α 经过点 H 且 $AC\perp\alpha$，设三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心为 O，$\triangle SAC$，$\triangle BAC$ 的中心分别为 O_1，O_2，易知 $OO_1\perp$ 平面 SAC，$OO_2\perp$ 平面 BAC，且 O，O_1，O_2，M 四点共面，由题可得 $\angle OMO_1=\dfrac{1}{2}\angle O_1MO_2=60^\circ$，$O_1M=\dfrac{1}{3}SM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解 $Rt\Delta OO_1M$，得 $OO_1=\sqrt{3}O_1M=1$，又 $O_1S=\dfrac{2}{3}SM=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，则三棱锥 $S-ABC$ 外接球半径 $r=\sqrt{OO_1^2+O_1S^2}=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$，易知 O 到平面 α 的距离 $d=MH=\dfrac{1}{2}$，



故平面 α 截外接球所得截面圆的半径为 $r_1=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$，

$\therefore$ 截面圆的周长为 $l=2\pi r_1=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\pi$，即点 F 轨迹的周长为 $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\pi$.

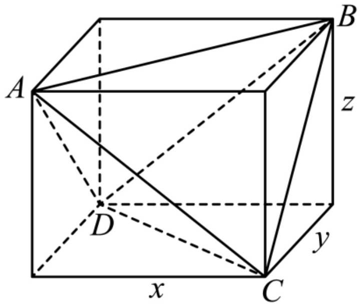
故选：C

【反思】此题典型的双面定球心。①定 ΔABC 外心 O_2；②定 ΔASC 外心 O_1，③再分别过 O_1，O_2 做平面 ASC 和 ABC 的垂线，两条垂线的交点，记为外接球球心.

例 5 (2023·浙江·校联考模拟预测)在三棱锥 $ABCD$ 中,对棱 $AB=CD=2\sqrt{2}$, $AD=BC=\sqrt{5}$, $AC=BD=\sqrt{5}$,则该三棱锥的外接球体积为______,内切球表面积为______.

【答案】 $\frac{9}{2}\pi$ $\frac{2}{3}\pi$##$\frac{2\pi}{3}$

【详解】因为三棱锥 $A-BCD$ 每组对棱棱长相等,所以可以把三棱锥 $ABCD$ 放入长方体中,设长方体的长、宽、高分别为 x、y、z,如下图所示:

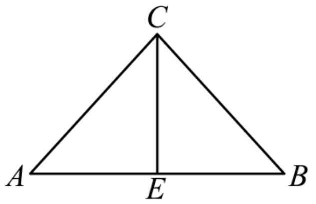


则 $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{5}$, $\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{5}$,解得 $x=y=2$, $z=1$,

外接球直径 $2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3$,其半径为 $R=\frac{3}{2}$,

三棱锥 $A-BCD$ 的体积 $V=xyz-\frac{1}{6}xyz\times4=\frac{1}{3}xyz=\frac{4}{3}$,

在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=\sqrt{5}$, $AB=2\sqrt{2}$,取 AB 的中点 E,连接 CE,如下图所示:



则 $CE\perp AB$,且 $CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{3}$,所以, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\sqrt{6}$,

因为三棱锥 $A-BCD$ 的每个面的三边分别为 $\sqrt{5}$、$\sqrt{5}$、$2\sqrt{2}$,

所以,三棱锥 $A-BCD$ 的表面积为 $S=4S_{\triangle ABC}=4\sqrt{6}$,

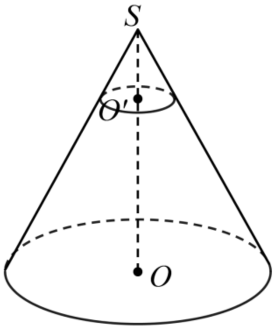
设三棱锥 $A-BCD$ 的内切球半径为 r,则 $V=\frac{1}{3}Sr$,可得 $r=\frac{3V}{S}=\frac{4}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,

所以该三棱锥的外接球体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{9}{2}\pi$,内切球表面积为 $4\pi r^2=\frac{2}{3}\pi$.

故答案为: $\frac{9}{2}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$.

【反思】本例属于对棱相等模型,可补形为长方体,再借助长方体模型,求外接球半径.

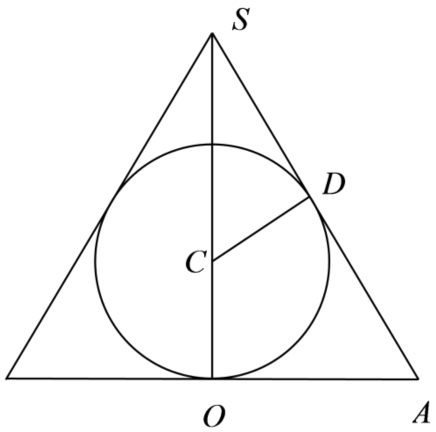
例 6 (2022 春·山西·高二校联考期末)如图所示,用一个平行于圆锥 SO 的底面的平面截这个圆锥,截得的圆台,上、下底面的面积之比为 $1:9$,截去的圆锥的底面半径是 3,圆锥 SO 的高为 18. 则截得圆台的体积为______;若圆锥 SO 中有一内切球,则内切球的表面积为______.



【答案】 468π $(486-162\sqrt{5})\pi$##$486\pi-162\sqrt{5}\pi$

【详解】由题意得:截得的圆台,上、下底面半径之比为1:3,截去的圆锥的底面半径是3,故下底面半径为9,则圆锥SO的体积为$V=\frac{1}{3}\times 9^2\pi\times 18=486\pi$,由相似知识得:$\frac{SO'}{SO}=\frac{1}{3}$,故$SO'=6$,故截去的圆锥体积为$V_1=\frac{1}{3}\times 3^2\pi\times 6=18\pi$,故截得圆台的体积为$486\pi-18\pi=468\pi$,

画出内切球的截面图,如下:



则有$Rt\triangle SCD\sim Rt\triangle SAO$,设内切球半径为$R$,则$CD=CO=R$,$SC=18-R$,由勾股定理得:$AS=\sqrt{18^2+9^2}=9\sqrt{5}$,由$\frac{CD}{OA}=\frac{SC}{AS}$得:$\frac{R}{9}=\frac{18-R}{9\sqrt{5}}$,解得:$R=\frac{9\sqrt{5}-9}{2}$,

故内切球的表面积为$4\pi R^2=4\pi\left(\frac{9\sqrt{5}-9}{2}\right)^2=(486-162\sqrt{5})\pi$.

故答案为:468π,$(486-162\sqrt{5})\pi$

【反思】本例内切球问题,主要采用独立截面法,独立出大圆的截面,然后利用相似求解内切球半径。

三、针对训练 举一反三

一、单选题

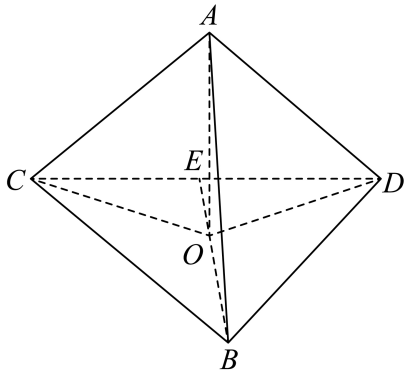
题目 1 (2023·陕西西安·统考一模)在三棱锥$A-BCD$,平面$ACD\perp$平面BCD,$\triangle ACD$是以CD为斜边的等腰直角三角形,$\triangle BCD$为等边三角形,$AC=4$,则该三棱锥的外接球的表面积为( )

A. $\frac{32\pi}{3}$ B. $\frac{64\pi}{3}$ C. $\frac{128\pi}{3}$ D. $\frac{256\pi}{3}$

【答案】C

【详解】解:过点B作CD的垂线,垂足为E,因为$\triangle ACD$是以CD为斜边的等腰直角三角形,

所以$\triangle ACD$的外接圆的圆心为E，设$\triangle BCD$的外接圆圆心为O，其半径为R，
则O在BE上，所以$OC=OB=OD$，由面面垂直的性质可知，$BE\perp$平面ACD，
所以$OC=OD=OA$，即O为该三棱锥的外接球的球心，$CD=4\sqrt{2}$
由正弦定理可知，$\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=2R, R=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，
故该三棱锥的外接球的表面积为$S=4\pi R^2=4\pi\times\dfrac{16\times 2}{3}=\dfrac{128\pi}{3}$.



故选：C

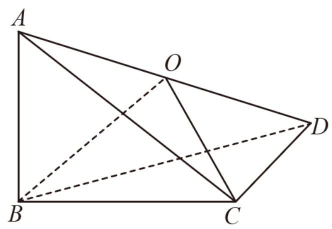
题目 2 (2023·湖南·模拟预测)在三棱锥$A-BCD$中，$AB\perp$平面BCD，$BC\perp CD$，$CD=2AB=2BC=4$，则三棱锥$A-BCD$的外接球的表面积与三棱锥$A-BCD$的体积之比为（　　）

A. $\dfrac{3\pi}{4}$　　B. $\dfrac{3\pi}{2}$　　C. 2π　　D. 9π

【答案】D

【详解】

取AD的中点O，连接OB, OC，

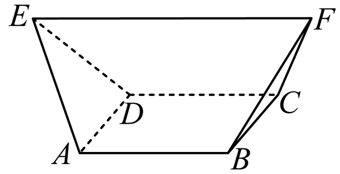


因为$AB\perp$面BCD，$BD\subset$面BCD，$CD\subset$面BCD，
所以$AB\perp BD$，$AB\perp CD$，
所以$OB=OA=OD$，
所以$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{20}$，$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{4+20}=2\sqrt{6}$，
因为$CD\perp BC$，$AB\cap BC=B$，$AB\subset$面ABC，$BC\subset$面ABC，
所以$CD\perp$面ABC，
又因为$AC\subset$面ABC，
所以$CD\perp CA$，
所以$OC=OA=OD$，所以$OA=OB=OC=OD=\dfrac{1}{2}AD=\sqrt{6}$，
所以O为三棱锥$A-BCD$的外接球的圆心，半径$R=\sqrt{6}$，
所以球的表面积为$S=4\pi R^2=24\pi$，
三棱锥$A-BCD$的体积为$V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AB=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\times 2=\dfrac{8}{3}$，
故$\dfrac{S}{V}=\dfrac{24\pi}{\frac{8}{3}}=9\pi$.

故选：D

题目 3 (2023·山西临汾·统考一模)《九章算术·商功》提及一种称之为“羡除”的几何体，刘徽对此几何体作注：“羡除，隧道也其所穿地，上平下邪．似两鳖臑夹一堑堵，即羡除之形.”羡除即为：三个面为梯形或平行四

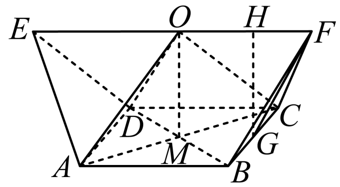
边形(至多一个侧面是平行四边形),其余两个面为三角形的五面几何体.现有羡除 $ABCDEF$ 如图所示,底面 $ABCD$ 为正方形,$EF=4$,其余棱长为2,则羡除外接球体积与羡除体积之比为 (　　)



A. $2\sqrt{2}\pi$　　　　B. $4\sqrt{2}\pi$　　　　C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$　　　　D. 2π

【答案】A

【详解】连接 AC、BD 交于点 M,取 EF 的中点 O,连接 OM,则 $OM\perp$ 平面 $ABCD$.取 BC 的中点 G,连接 FG,作 $GH\perp EF$,垂足为 H,如图所示,



由题意得,$OA=OB=OC=OD$,$OE=OF=2$,$HF=\frac{1}{4}EF=1$,$FG=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\sqrt{3}$,

$\therefore HG=\sqrt{FG^2-HF^2}=\sqrt{2}$,

$\therefore OM=HG=\sqrt{2}$,

又 $\because AM=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$,

$\therefore OA=\sqrt{OM^2+AM^2}=2$,

$\therefore OA=OB=OC=OD=OE=OF=2$,即:这个羡除的外接球的球心为 O,半径为2,

$\therefore$ 这个羡除的外接球体积为 $V_1=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32\pi}{3}$.

$\because AB\,/\!/\,EF$,$AB\not\subset$ 面 $CDEF$,$EF\subset$ 面 $CDEF$,

$\therefore AB\,/\!/$ 面 $CDEF$,即:点 A 到面 $CDEF$ 的距离等于点 B 到面 $CDEF$ 的距离,

又 $\because \triangle OED\cong\triangle OCD$,

$\therefore V_{A-OED}=V_{B-OCD}=V_{O-BCD}$,

$\therefore$ 这个羡除的体积为 $V_2=V_{A-OED}+V_{BCF-ADO}=V_{O-BCD}+3V_{O-BCD}=4V_{O-BCD}=4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore$ 羡除的外接球体积与羡除体积之比为 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{32\pi}{3}}{\frac{8\sqrt{2}}{3}}=2\sqrt{2}\pi$.

故选:A.

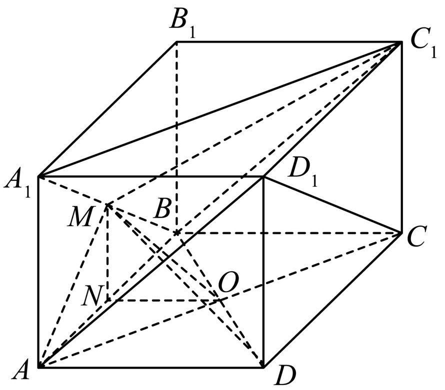
题目 4 (2023春·江西·高二校联考开学考试)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=AA_1=3$,$AD=2$,点 M 为平面 ABB_1A_1 内一动点,且 $C_1M\,/\!/$ 平面 ACD_1,则当 C_1M 取最小值时,三棱锥 $M-ABD$ 的外接球的表面积为 (　　)

A. 13π　　　　B. 16π　　　　C. 26π　　　　D. 32π

【答案】A

【详解】根据题意易知,$A_1C_1\,/\!/\,AC$,且 $AC\subset$ 平面 ACD_1,$A_1C_1\not\subset$ 平面 ACD_1,所以 $A_1C_1\,/\!/$ 平面 ACD_1,同理可得 $BC_1\,/\!/$ 平面 ACD_1;

又 $A_1C_1\cap BC_1=C_1$, $A_1C_1,BC_1\subset$ 平面 A_1BC_1,所以平面 A_1BC_1 // 平面 ACD_1;
又因为点 M 在平面 ABB_1A_1 内且 C_1M // 平面 ACD_1,所以点 M 在平面 ABB_1A_1 与平面 ACD_1 的交线 A_1B 上,
易知 $A_1C_1=BC_1=\sqrt{13}$,所以当 C_1M 取最小值时,M 为线段 A_1B 的中点,如下图所示:



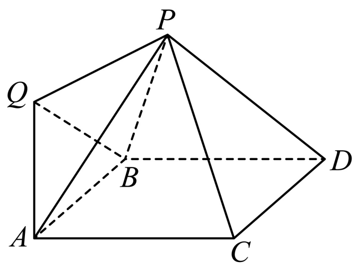
取 AB 的中点为 N, AC,BD 交于点 O,连接 MN,NO;
则 $MN=\frac{3}{2},NO=1$,所以 $MO=\frac{\sqrt{13}}{2}$,而 $AO=BO=DO=\frac{\sqrt{13}}{2}$,
所以 O 即为三棱锥 $M-ABD$ 的外接球球心,半径 $R=AO=MO=\frac{\sqrt{13}}{2}$,
则表面积 $S=4\pi R^2=13\pi$.
故选:A

题目 5 (2023·四川南充·校考模拟预测) 在平面中,若正 $\triangle ABC$ 内切圆的面积为 S_1,内切圆与外接圆之间的圆环面积为 S_2,则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$. 在空间中,若正四面体 $PABC$ 内切球的体积为 V_1,内切球之外与外接球之内的几何体的体积为 V_2,则 $\frac{V_1}{V_2}=$ (　　)

A. $\frac{1}{63}$　　B. $\frac{1}{26}$　　C. $\frac{1}{15}$　　D. $\frac{1}{7}$

【答案】B
【详解】设正四面体 $PABC$ 的内切球与外接球的半径分别为 R_1, R_2,点 P 到底面 ABC 的距离为 H,底面 ABC 的面积为 S,
由等体积法得 $R_1=\frac{3\times\frac{1}{3}SH}{4S}=\frac{1}{4}H$,
设 $AB=a$,正 $\triangle ABC$ 的中心为 O,
则 $OA=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $H=\sqrt{a^2-OA^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,
由 $(H-R_2)^2+OA^2=R_2^2$,得 $R_2=\frac{\sqrt{6}}{4}a=\frac{3}{4}H=3R_1$,
故 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3-R_1^3)}=\frac{1}{26}$.
故选:B.

题目 6 (2023 秋·浙江湖州·高三安吉县高级中学校考期末) 如图所示的多面体由正四棱锥 $P-ABCD$ 和三棱锥 $Q-PAB$ 组成,其中 $AB=2$. 若该多面体有外接球且外接球的体积是 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$,则该多面体体积的最大值是 (　　)



A. $3\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}+1$　　C. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$

【答案】D

【详解】设正四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的半径为 R，则 $\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$，解得 $R=\sqrt{2}$，

连接 AC,BD 交于点 O，连接 PO，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则 $OA=OB=OC=OD=\sqrt{2}=R$，

$\therefore O$ 为四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的球心，

则 $PO=\sqrt{2}$,$PA=\sqrt{PO^2+OA^2}=2$，故 $\triangle PAB$ 的是以边长为 2 的等边三角形，

过 O 作平面 PAB 的垂线 OE，垂足为 E，连接 QE,OQ，

由三棱锥 $O-PAB$ 的体积可得：$\dfrac{1}{3}\times OE\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$，解得 $OE=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

由题意可知：点 Q 在四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的球面上，则 $OQ=\sqrt{2}$，

$\because EQ+OE\leqslant OQ$，即 $EQ\leqslant OQ-OE=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

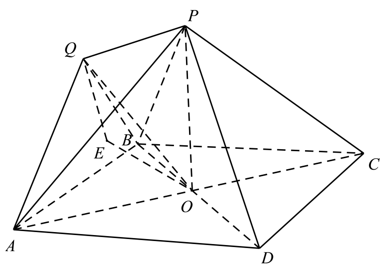
当且仅当 O,E,Q 三点共线，则 $QE\perp$ 面 PAB 时等号成立，

可得三棱锥 $Q-PAB$ 的高的最大值为 $\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore$ 三棱锥 $Q-PAB$ 的体积 $V_{Q-PAB}\leqslant\dfrac{1}{3}\times\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}$，

故该多面体体积 $V=V_{Q-PAB}+V_{P-ABCD}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}+\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times 2\times 2=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$.

故选：D.



题目 7 (2023·陕西榆林·统考一模) 已知四面体 $ABCD$ 外接球的球心 O 与正三角形 ABC 外接圆的圆心重合，若该四面体体积的最大值为 $2\sqrt{3}$，则该四面体外接球的体积为（　　）

A. 8π　　B. $\dfrac{32\pi}{3}$　　C. 16π　　D. $\dfrac{64\pi}{3}$

【答案】B

【详解】设球 O 的半径为 R，可得 $AB=BC=AC=\sqrt{3}R$.

当 $DO\perp$ 平面 ABC 时，四面体 $ABCD$ 的体积最大，

此时 $V_{D-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot R=\dfrac{\sqrt{3}}{4}R^3$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}R^3=2\sqrt{3}$，得 $R^3=8$，

则该四面体外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$.

故选：B

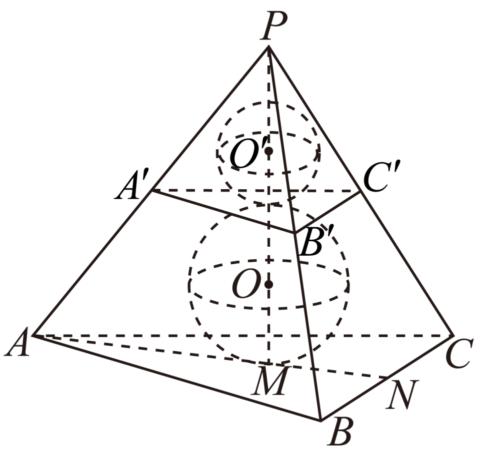
题目 8 (2023春·河南新乡·高三校联考开学考试)已知体积为3的正三棱锥 $P-ABC$，底面边长为 $2\sqrt{3}$，其内切球为球 O，若在此三棱锥中再放入球 O'，使其与三个侧面及内切球 O 均相切，则球 O' 的半径为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

【答案】D

【详解】设内切球 O 的半径为 r，球 O' 的半径为 R. 设此棱锥的高为 h，底面 $\triangle ABC$ 的中心为 M，

因为底面边长为 $2\sqrt{3}$，底面 $\triangle ABC$ 的高 $AN=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3=3\sqrt{3}$，

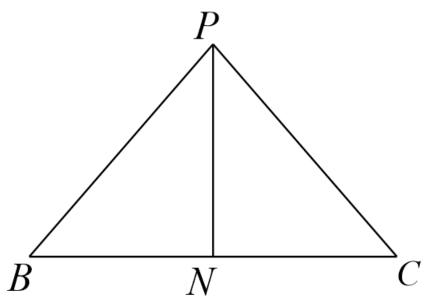


所以三棱锥的体积 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times h\times3\sqrt{3}=3$，求得 $h=\sqrt{3}$，

在底面 $\triangle ABC$ 中 $AM=\frac{2}{3}AN=2$，

则侧棱长为 $PA=\sqrt{h^2+AM^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$，

每个侧面的三边长为 $BC=2\sqrt{3}, PB=PC=\sqrt{7}$，则侧面的高 $PN=\sqrt{PB^2-BN^2}=\sqrt{7-3}=2$，



所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}BC\cdot PN=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$，所以三棱锥 $P-ABC$ 的表面积为 $3\times2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

由等积法知 $V=\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times r=3$，得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

用一平行于底面 ABC 且与球 O 上部相切的平面 $A'B'C'$ 截此三棱锥，下部得到一个高为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的棱台，

那么截得的小棱锥 $P-A'B'C'$ 的高为 $h-2r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即为 $P-ABC$ 高的 $\frac{1}{3}$，则此小棱锥的内切球半径即为球 O' 的半径，

根据相似关系，截得的棱锥的体积为 $3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{9}$，表面积为 $9\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\sqrt{3}$，

根据等体积法，$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times R=\frac{1}{9}$，解得 $R=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

故选:D.

题目 9 (2022春·河南信阳·高一信阳高中校考阶段练习) 正棱锥有以下四个命题: ①所有棱长都相等的三棱锥的外接球、内切球、棱切球(六条棱均与球相切)体积比是 $3\sqrt{6}:\frac{\sqrt{6}}{9}:\sqrt{2}$；②侧面是全等的等腰三角形顶点在底面射影为底面中心的四棱锥是正四棱锥；③经过正五棱锥一条侧棱平分其表面积的平面必经过其内切球球心；④正六棱锥的侧面不可能是正三角形，其中真命题是 (　　)

A. ①④　　B. ③④　　C. ①③④　　D. ②③④

【答案】C

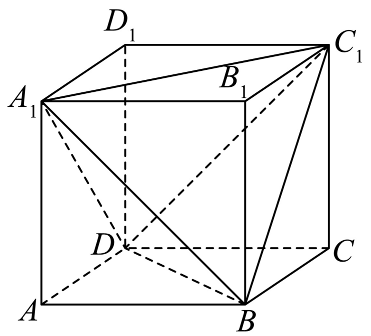
【详解】对①：如图，将三棱锥转化为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，设正方体的的边长为 a，则三棱锥的边长为 $\sqrt{2}a$，

三棱锥的外接球即为正方体的外接球，故半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

三棱锥的棱切球即为正方体的内切球，故半径 $R_1=\frac{1}{2}a$，

三棱锥的体积 $V=a^3-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a\times a\times a=\frac{1}{3}a^3$，设三棱锥的内切球的半径为 r，则有 $\frac{1}{3}a^3=4\times\frac{1}{3}\times r\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，

故三棱锥的外接球、内切球、棱切球的体积比是 $R^3:r^3:R_1^3=27:1:3\sqrt{3}$，①为假命题；

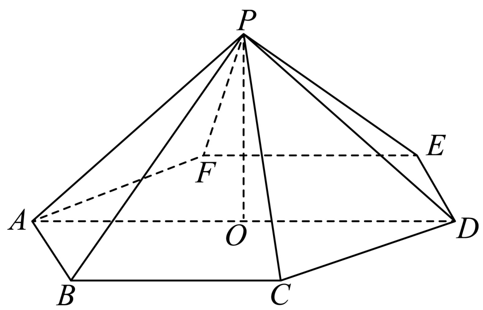


对②：侧面是全等的等腰三角形顶点在底面射影为底面中心的四棱锥是正四棱锥，②为真命题；

对③：正五棱锥的内切球的球心在顶点与底面中心的连线上，由对称可得，若平面经过正五棱锥一条侧棱且平分其正五棱锥的表面积，则该平面必过顶点与底面中心的连线，即过正五棱锥一条侧棱平分其表面积的平面必经过其内切球球心，③为真命题；

对④：如图所示：O 为正六棱锥 $P-ABCDEF$ 的中心，连接 PO,AD，则 $PO\perp$ 平面 $ABCDEF$，且 $AD\subset$ 平面 $ABCDEF$，故 $PO\perp AD$，

若正六棱锥的侧面是正三角形，则 $AO=PA$，故 $PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=0$，此时不能构成锥体，④为真命题.



故选：C.

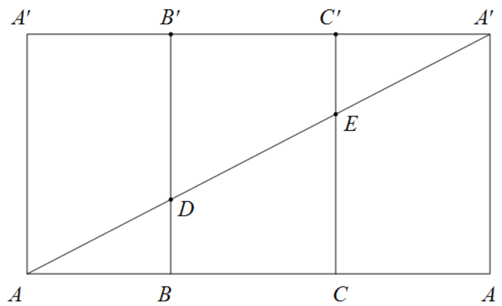
题目 10 (2021秋·辽宁·高二沈阳二中校联考开学考试)在正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，D 是侧棱 BB' 上一点，E 是侧棱 CC' 上一点，若线段 $AD+DE+EA'$ 的最小值是 $2\sqrt{7}$ ，且其内部存在一个内切球(与该棱柱的所有面均相切)，则该棱柱的外接球表面积为（　　）

A. 4π　　B. 5π　　C. 6π　　D. 8π

【答案】B

【详解】设正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的底面边长为 a，高为 h，

对三个侧面进行展开如图，



要使线段 $AD+DE+EA'$ 的最小值是 $2\sqrt{7}$，则连接 AA'(左下角 A，右上角 A')，

此时 D,E 在连接线上，故 $\sqrt{(3a)^2+h^2}=2\sqrt{7}$ ①，

因为正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 内部存在一个半径为 r 的内切球，

所以 $\begin{cases} h=2r \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{1}{3}=r \end{cases}$ 整理得 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，

将 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ 代入①可得 $a=\sqrt{3}, h=1$，

所以正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的底面外接圆半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{2}{3}=1$，

所以正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的外接球半径为 $\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

所以该棱柱的外接球表面积为 $4\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=5\pi$

故选：B

题目 11 (2022秋·黑龙江哈尔滨·高二校考期中)古希腊阿基米德被称为“数学之神”．在他的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱里内切着一个球，这个球的直径恰好等于圆柱的高，则球的表面积与圆柱的表面积的比值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

【答案】B

【详解】设球半径为 R,则圆柱底面半径为 R,圆柱的高为 $2R$,

则 $S_{球}=4\pi R^2$,

$S_{圆柱}=S_{侧}+2S_{底}=2\pi R\cdot 2R+2\times\pi R^2=6\pi R^2$

所以 $\dfrac{S_{球}}{S_{圆柱}}=\dfrac{2}{3}$,

故选:B.

二、填空题

题目 12 (2023·全国·模拟预测) 已知在三棱锥 $P-ABC$ 中,$\triangle ABC$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形,平面 $PBC\perp$ 平面 ABC,若三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $\dfrac{20\pi}{3}$,则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 ______.

【答案】1

【详解】第一步:找到三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大时点 P 的位置

过点 P 作 $PE\perp BC$ 于点 E.

因为平面 $PBC\perp$ 平面 ABC,平面 $PBC\cap$ 平面 $ABC=BC$,$PE\subset$ 面 PBC,

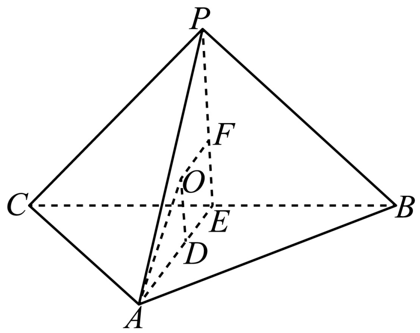
所以 $PE\perp$ 平面 ABC,

所以 $V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}PE$,

所以要使三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大,则需 PE 的值最大.

易知点 P,B,C 在同一个圆上,则当 E 为 BC 的中点时,PE 的值最大,此时 $\triangle PBC$ 为等腰三角形,且 $PB=PC$.

第二步:利用外接球球心的位置构造矩形



如图,设外接球的球心为 O,$\triangle ABC$,$\triangle PBC$ 的外接圆圆心分别为 D,F,连接 AE,

易知 D,F 分别在线段 AE,PE 上,连接 OD,OF.

显然,$OD\perp$ 平面 ABC,$OF\perp$ 平面 PBC.

因为 E 是 BC 的中点,$\triangle ABC$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形,所以 $AE\perp BC$.

因为平面 $PBC\perp$ 平面 ABC,$AE\subset$ 平面 ABC,平面 $PBC\cap$ 平面 $ABC=BC$,

所以,$AE\perp$ 平面 PBC.

因为 $EF\subset$ 平面 PBC,所以 $AE\perp EF$.

又 $OF\perp$ 平面 PBC,所以 $AE/\!/OF$,所以 $DE/\!/OF$.

同理可得,$OD/\!/EF$,所以四边形 $ODEF$ 为平行四边形.

又 $AE\perp EF$,所以四边形 $ODEF$ 为矩形.

第三步:求出 PE,即可得解

由 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$,得 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times AB^2=\sqrt{3}$,得 $AB=2$,

所以 $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{3}$，则 $AD=\frac{2}{3}AE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

设球 O 的半径为 R，则由已知可得，$4\pi R^2=\frac{20\pi}{3}$，所以 $R^2=\frac{5}{3}$.

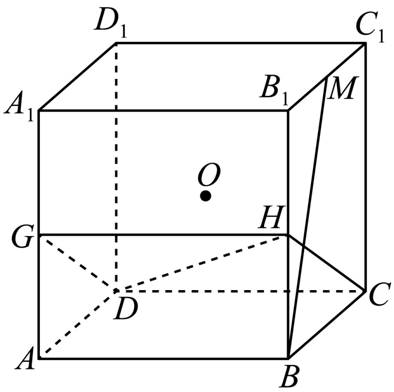
连接 OA，则 $OA=R$，则 $OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=EF$，

所以 $PE=3EF=\sqrt{3}$，从而 $(V_{P-ABC})_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=1$.

题目 13 (2023·全国·唐山市第十一中学校考模拟预测) 已知 N 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球球面上的动点，M 为 B_1C_1 的中点，$DN\perp MB$，若动点 N 的轨迹长度为 $\frac{8\sqrt{5}\pi}{5}$，则正方体的体积是 ______.

【答案】64

【详解】如图所示：



正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，设 $AB=2a$，则内切球的半径 $R=a$，

其中 M 为 B_1C_1 的中点，取 BB_1 的中点 H，连接 CH，

则有：$CH\perp MB, DC\perp MB$，

又 $CH\cap DC=C, CH, DC\subseteq$ 平面 DCH，

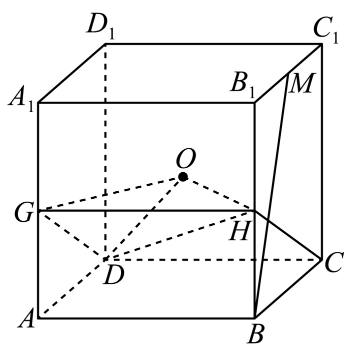
所以 $MB\perp$ 平面 DCH，

所以动点 N 的轨迹是平面 DCH 截内切球 O 的交线，

即平面 $DCHG$ 截内切球 O 的交线，

因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=2a$，

如图所示：



连接 OD, OG, OH，则有 $OG=OH=\sqrt{2}a$ 且 $OG\perp OH$，

$GH=2a$，$GD=\sqrt{5}a$ 且 $GH\perp GD$，

设 O 到平面 $DCHG$ 的距离为：d，

则在三棱锥 $O-DGH$ 中，有 $V_{O-GDH}=V_{D-OGH}$，

所以 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times GH\times GD\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times OG\times OG\times a$，

即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2a\times\sqrt{5}a\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{2}a\times a$，

解得：$d=\frac{\sqrt{5}}{5}a$，

截面圆的半径 $r=\sqrt{R^2-d^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$，

所以动点 N 的轨迹长度为：$c=2\pi r=\frac{4\sqrt{5}\pi}{5}a$，

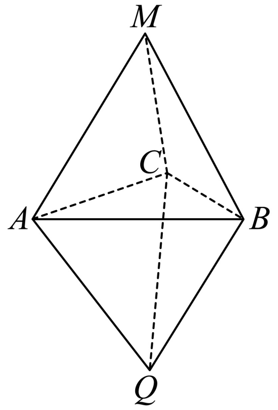
即 $\frac{4\sqrt{5}\pi}{5}a=\frac{8\sqrt{5}\pi}{5}$,解得 $a=2$,

所以 $AB=4$,正方体的体积: $V=4^3=64$,

故答案为: 64.

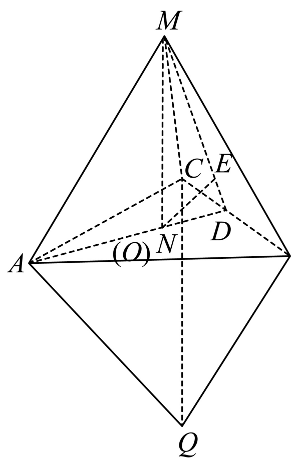
三、双空题

题目 14 (2023·全国·模拟预测) 如图所示的六面体由两个棱长为 a 的正四面体 $M-ABC$, $Q-ABC$ 组合而成,记正四面体 $M-ABC$ 的内切球为球 O_1,正四面体 $Q-ABC$ 的内切球为球 O_2,则 $O_1O_2=$ ______;若在该六面体内放置一个球 O,则球 O 的体积的最大值是 ______.



【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$##$\frac{\sqrt{6}a}{6}$ $\frac{8\sqrt{6}}{729}\pi a^3$

【详解】如图,取 BC 的中点 D,连接 AD,设点 M 在平面 ABC 内的射影为 N,连接 MN,



由四面体 $M-ABC$ 是正四面体,知 N 为 $\triangle ABC$ 的中心,且 N 在线段 AD 上, $AD\perp BC$,

由正四面体的棱长为 a,可得 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $MN=\sqrt{AM^2-AN^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$, $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

设球 O_1 的半径为 r,由等体积法可 $V_{\text{正四面体}M-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{1}{3}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times r$,

得 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$,

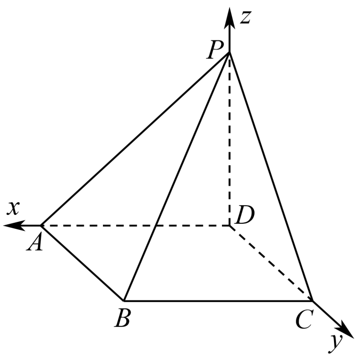
根据六面体的对称性可知正四面体 $M-ABC$ 的内切球和正四面体 $Q-ABC$ 的内切球与面 ABC 相切于 N 点,

可得 $O_1O_2=2r=\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

当球 O 的体积最大时，球 O 与该六面体的六个面都相切，
此时，由对称性可知球心 O 即 $\triangle ABC$ 的中心 N，连接 MD，$MD \perp BC$，
过点 O 作 $OE \perp MD$ 于点 E，由于 $BC \perp AD, BC \perp MD, AD \cap MD = D$，
$AD, MD \subset$ 平面 MAD，
故 $BC \perp$ 平面 MAD，而 $OE \subset$ 平面 MAD，所以 $BC \perp OE$，
又 $BC \cap MD = D, BC, MD \subset$ 平面 MBC，
故 $OE \perp$ 平面 MBC，
则 OE 为球 O 的半径．$S_{\triangle MOD} = \frac{1}{2} \times MO \times OD = \frac{1}{2} \times MD \times OE$，
即 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times OE$，得 $OE = \frac{\sqrt{6}}{9}a$，即此时球 O 的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{9}a$，
所以球 O 的体积的最大值为 $\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{9}a\right)^3 = \frac{8\sqrt{6}}{729}\pi a^3$．

题目 15 (2022·陕西西安·校考模拟预测) 中国古代数学名著《九章算术》中将底面为矩形且有一条侧棱垂直于底面的四棱锥称为“阳马”．现有一“阳马”的底面是边长为3的正方形，垂直于底面的侧棱长为4，则该“阳马”的内切球表面积为______，内切球的球心和外接球的球心之间的距离为______．

【答案】 4π $\frac{\sqrt{6}}{2}$##$\frac{1}{2}\sqrt{6}$



【详解】
如图，$ABCD$ 为正方形，设 PD 垂直于平面 $ABCD$，由题 $PD = 4$，$AB = 3$，
因为 $PD \perp AB$，$AD \perp AB$，所以 $AB \perp$ 平面 ADP，所以 $AB \perp AP$，$\triangle ABP$ 为直角三角形，
由题，$AP = 5$，四棱锥表面积 $S = 3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5 = 36$，体积 $V = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 4 = 12$，
设内切球半径为 r，则 $\frac{1}{3}Sr = V$，得 $r = \frac{3V}{S} = 1$，内切球表面积为 $4\pi r^2 = 4\pi$；
以 DA，DC，DP 分别为 x，y，z 轴建立如图空间直角坐标系，
因为内切球半径 $r = 1$，所以内切球球心 $O_1(1,1,1)$，
因为该四棱锥可以补全为棱长分别为 3，3，4 的长方体，所以外接球球心 $O_2\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$，
两点间距离 $|O_1O_2| = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \times 2 + (1-2)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$．
故答案为：4π；$\frac{\sqrt{6}}{2}$