# 多面体的外接球和内切球

## 一、结论

1、球与多面体的接、切

定义1:若一个多面体的各顶点都在一个球面上,则称这个多面体是这个球的内接多面体,这个球是多面体的外接球。

定义2:若一个多面体的各面都与一个球的球面相切,则称这个多面体是这个球的外切多面体,这个球是多面体的内切球。

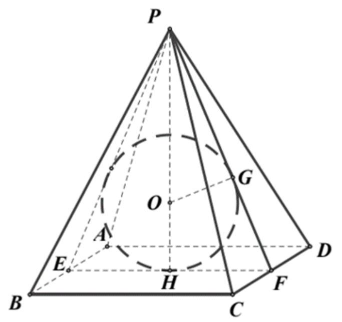
### 类型一　球的内切问题(等体积法)

例如:在四棱锥 $P-ABCD$ 中,内切球为球 $O$,求球半径 $r$.

方法如下:

$V_{P-ABCD}=V_{O-ABCD}+V_{O-PBC}+V_{O-PCD}+V_{O-PAD}+V_{O-PAB}$

即:$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PBC}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PCD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PAD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PAB}\cdot r$,可求出 $r$.




### 类型二　球的外接问题

1. 公式法

正方体或长方体的外接球的球心为其体对角线的中点

2. 补形法(补长方体或正方体)

①墙角模型(三条线两个垂直)

题设:三条棱两两垂直(重点考察三视图)

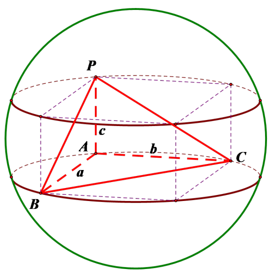


图1

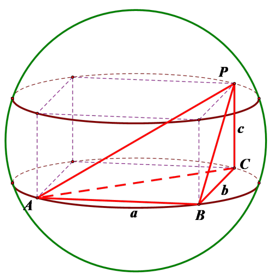


图2

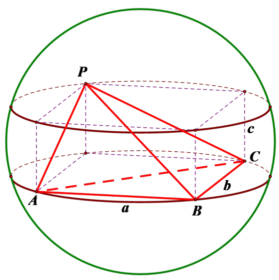
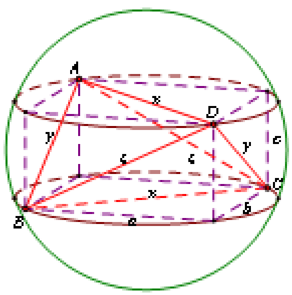


图3

②对棱相等模型(补形为长方体)

题设:三棱锥(即四面体)中,已知三组对棱分别相等,求外接球半径($AB=CD$, $AD=BC$, $AC=BD$)

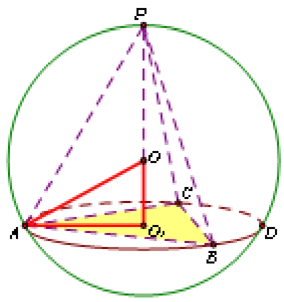


3. **单面定球心法(定+算)**

步骤:①定一个面外接圆圆心:选中一个面如图:在三棱锥 $P-ABC$ 中,选中底面 $\Delta ABC$,确定其外接圆圆心 $O_1$(正三角形外心就是中心,直角三角形外心在斜边中点上,普通三角形用正弦定理定外心 $2r=\dfrac{a}{\sin A}$);

②过外心 $O_1$ 做(找)底面 $\Delta ABC$ 的垂线,如图中 $PO_1\perp$ 面 $ABC$, 则球心一定在直线(注意不一定在线段 $PO_1$ 上)$PO_1$ 上;

③计算求半径 $R$: 在直线 $PO_1$ 上任取一点 $O$ 如图:则 $OP=OA=R$,利用公式 $OA^2=O_1A^2+OO_1^2$ 可计算出球半径 $R$.



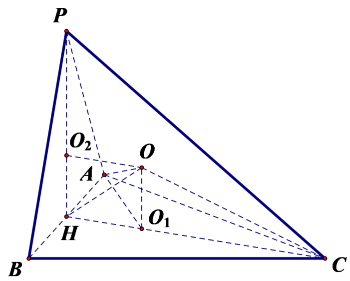

4. **双面定球心法(两次单面定球心)**

如图:在三棱锥 $P-ABC$ 中:

①选定底面 $\Delta ABC$,定 $\Delta ABC$ 外接圆圆心 $O_1$

②选定面 $\Delta PAB$,定 $\Delta PAB$ 外接圆圆心 $O_2$

③分别过 $O_1$ 做面 $ABC$ 的垂线,和 $O_2$ 做面 $PAB$ 的垂线,两垂线交点即为外接球球心 $O$.




## 二、典型例题

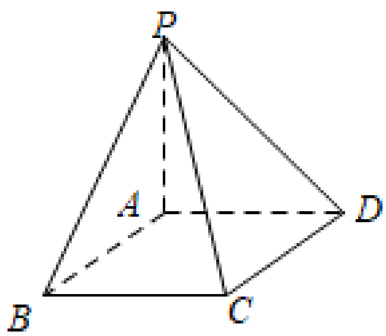
**例 1** (2023春·湖南湘潭·高二统考期末)棱长为1的正方体的外接球的表面积为( )

A. $\dfrac{3\pi}{4}$　　B. $3\pi$　　C. $12\pi$　　D. $16\pi$

**例 2** (2023春·湖南长沙·高三长沙一中校考阶段练习)在四面体 $PABC$ 中,$PA\perp AB$,$PA\perp AC$,$\angle BAC=120^\circ$,$AB=AC=AP=2$,则该四面体的外接球的表面积为( )

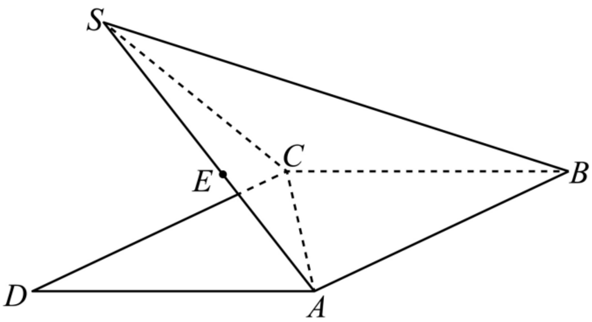
A. $12\pi$　　B. $16\pi$　　C. $18\pi$　　D. $20\pi$

**例 3** (2023秋·湖南娄底·高三校联考期末)《九章算术》是我国古代数学名著,它在几何学中的研究比西方早1000多年.在《九章算术》中,将底面为矩形且一侧棱垂直于底面的四棱锥称为阳马.如图 $P-ABCD$ 是阳马,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,$PA=5$,$AB=3$,$BC=4$.则该阳马的外接球的表面积为( )



A. $\dfrac{125\sqrt{2}\pi}{3}$　　B. $50\pi$　　C. $100\pi$　　D. $\dfrac{500\pi}{3}$

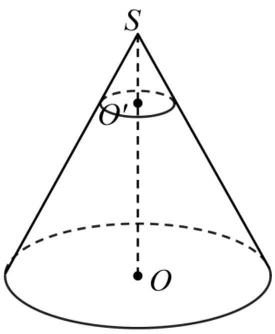
例 4 (2023·全国·高三专题练习) 已知菱形 $ABCD$ 的各边长为 2, $\angle D=60^{\circ}$. 如图所示，将 $\Delta ACD$ 沿 $AC$ 折起，使得点 $D$ 到达点 $S$ 的位置，连接 $SB$，得到三棱锥 $S-ABC$，此时 $SB=3$. $E$ 是线段 $SA$ 的中点，点 $F$ 在三棱锥 $S-ABC$ 的外接球上运动，且始终保持 $EF\perp AC$，则点 $F$ 的轨迹的周长为 (　　)




A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$　　C. $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\pi$　　D. $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\pi$

例 5 (2023·浙江·校联考模拟预测) 在三棱锥 $ABCD$ 中，对棱 $AB=CD=2\sqrt{2}$, $AD=BC=\sqrt{5}$, $AC=BD=\sqrt{5}$，则该三棱锥的外接球体积为______，内切球表面积为______.

例 6 (2022 春·山西·高二校联考期末) 如图所示，用一个平行于圆锥 $SO$ 的底面的平面截这个圆锥，截得的圆台，上、下底面的面积之比为 $1:9$，截去的圆锥的底面半径是 3，圆锥 $SO$ 的高为 18. 则截得圆台的体积为______；若圆锥 $SO$ 中有一内切球，则内切球的表面积为______.




## 三、针对训练　举一反三

### 一、单选题

题目 1 (2023·陕西西安·统考一模) 在三棱锥 $A-BCD$，平面 $ACD\perp$ 平面 $BCD$，$\triangle ACD$ 是以 $CD$ 为斜边的等腰直角三角形，$\triangle BCD$ 为等边三角形，$AC=4$，则该三棱锥的外接球的表面积为 (　　)

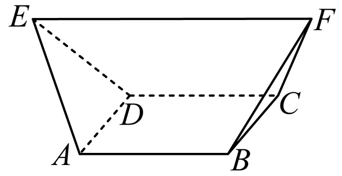
A. $\dfrac{32\pi}{3}$　　B. $\dfrac{64\pi}{3}$　　C. $\dfrac{128\pi}{3}$　　D. $\dfrac{256\pi}{3}$

题目 2 (2023·湖南·模拟预测) 在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp$ 平面 $BCD$，$BC\perp CD$，$CD=2AB=2BC=4$，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积与三棱锥 $A-BCD$ 的体积之比为 (　　)

A. $\dfrac{3\pi}{4}$　　B. $\dfrac{3\pi}{2}$　　C. $2\pi$　　D. $9\pi$

题目 3 (2023·山西临汾·统考一模)《九章算术·商功》提及一种称之为“羡除”的几何体，刘徽对此几何体作

注:“羡除,隧道也其所穿地,上平下邪. 似两鳖臑夹一堑堵,即羡除之形.”羡除即为:三个面为梯形或平行四边形(至多一个侧面是平行四边形),其余两个面为三角形的五面几何体. 现有羡除 $ABCDEF$ 如图所示,底面 $ABCD$ 为正方形,$EF=4$,其余棱长为2,则羡除外接球体积与羡除体积之比为 (　　)




A. $2\sqrt{2}\pi$　　B. $4\sqrt{2}\pi$　　C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$　　D. $2\pi$

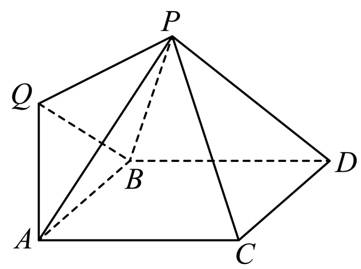
题目 4 (2023春·江西·高二校联考开学考试) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=AA_1=3$,$AD=2$,点 $M$ 为平面 $ABB_1A_1$ 内一动点,且 $C_1M$ // 平面 $ACD_1$,则当 $C_1M$ 取最小值时,三棱锥 $M-ABD$ 的外接球的表面积为 (　　)

A. $13\pi$　　B. $16\pi$　　C. $26\pi$　　D. $32\pi$

题目 5 (2023·四川南充·校考模拟预测) 在平面中,若正 $\triangle ABC$ 内切圆的面积为 $S_1$,内切圆与外接圆之间的圆环面积为 $S_2$,则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$. 在空间中,若正四面体 $PABC$ 内切球的体积为 $V_1$,内切球之外与外接球之内的几何体的体积为 $V_2$,则 $\frac{V_1}{V_2}=$ (　　)

A. $\frac{1}{63}$　　B. $\frac{1}{26}$　　C. $\frac{1}{15}$　　D. $\frac{1}{7}$

题目 6 (2023秋·浙江湖州·高三安吉县高级中学校考期末) 如图所示的多面体由正四棱锥 $P-ABCD$ 和三棱锥 $Q-PAB$ 组成,其中 $AB=2$. 若该多面体有外接球且外接球的体积是 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$,则该多面体体积的最大值是 (　　)




A. $3\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}+1$　　C. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$

题目 7 (2023·陕西榆林·统考一模) 已知四面体 $ABCD$ 外接球的球心 $O$ 与正三角形 $ABC$ 外接圆的圆心重合,若该四面体体积的最大值为 $2\sqrt{3}$,则该四面体外接球的体积为 (　　)

A. $8\pi$　　B. $\frac{32\pi}{3}$　　C. $16\pi$　　D. $\frac{64\pi}{3}$

题目 8 (2023春·河南新乡·高三校联考开学考试) 已知体积为3的正三棱锥 $P-ABC$,底面边长为 $2\sqrt{3}$,其内切球为球 $O$,若在此三棱锥中再放入球 $O'$,使其与三个侧面及内切球 $O$ 均相切,则球 $O'$ 的半径为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

题目 9 (2022春·河南信阳·高一信阳高中校考阶段练习) 正棱锥有以下四个命题：①所有棱长都相等的三棱锥的外接球、内切球、棱切球（六条棱均与球相切）体积比是 $3\sqrt{6}:\dfrac{\sqrt{6}}{9}:\sqrt{2}$；②侧面是全等的等腰三角形顶点在底面射影为底面中心的四棱锥是正四棱锥；③经过正五棱锥一条侧棱平分其表面积的平面必经过其内切球球心；④正六棱锥的侧面不可能是正三角形，其中真命题是（　　）

A. ①④　　B. ③④　　C. ①③④　　D. ②③④

题目 10 (2021秋·辽宁·高二沈阳二中校联考开学考试) 在正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，$D$ 是侧棱 $BB'$ 上一点，$E$ 是侧棱 $CC'$ 上一点，若线段 $AD+DE+EA'$ 的最小值是 $2\sqrt{7}$，且其内部存在一个内切球（与该棱柱的所有面均相切），则该棱柱的外接球表面积为（　　）

A. $4\pi$　　B. $5\pi$　　C. $6\pi$　　D. $8\pi$

题目 11 (2022秋·黑龙江哈尔滨·高二校考期中) 古希腊阿基米德被称为“数学之神”．在他的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱里内切着一个球，这个球的直径恰好等于圆柱的高，则球的表面积与圆柱的表面积的比值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

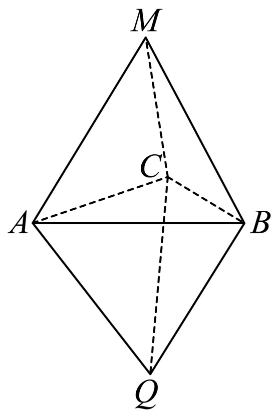
## 二、填空题

题目 12 (2023·全国·模拟预测) 已知在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，平面 $PBC\perp$ 平面 $ABC$，若三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $\dfrac{20\pi}{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 ______.

题目 13 (2023·全国·唐山市第十一中学校考模拟预测) 已知 $N$ 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球球面上的动点，$M$ 为 $B_1C_1$ 的中点，$DN\perp MB$，若动点 $N$ 的轨迹长度为 $\dfrac{8\sqrt{5}\pi}{5}$，则正方体的体积是 ______.

## 三、双空题

题目 14 (2023·全国·模拟预测) 如图所示的六面体由两个棱长为 $a$ 的正四面体 $M-ABC$，$Q-ABC$ 组合而成，记正四面体 $M-ABC$ 的内切球为球 $O_1$，正四面体 $Q-ABC$ 的内切球为球 $O_2$，则 $O_1O_2=$ ______；若在该六面体内放置一个球 $O$，则球 $O$ 的体积的最大值是 ______.




题目 15 (2022·陕西西安·校考模拟预测) 中国古代数学名著《九章算术》中将底面为矩形且有一条侧棱垂直于底面的四棱锥称为“阳马”．现有一“阳马”的底面是边长为3的正方形，垂直于底面的侧棱长为4，则该“阳马”的内切球表面积为 ______，内切球的球心和外接球的球心之间的距离为 ______.