专题一　直线

题型一 直线方程的五种形式及其局限性

⑴直线的点斜式或斜截式不能表示斜率不存在的直线，如果写成 $x=ky+b$ 就可以表示斜率不存在的直线。

⑵ 两点式不能表示斜率不存在或斜率为 0 时的直线，写成 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$ 表示任意直线

⑶截距式不能表示截距为 0 与截距不存在的直线，所以要注意设成截距式时出现丢根问题，相等与截距绝对值相等是两个不同的概念(截距是直线与坐标轴交点的坐标, 可正、负、0)

1.　下列命题中的真命题是 （　　　）

A. 经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线都可以用方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 表示

B. 经过任意两个不同的点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 的直线都可以用方程 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$ 表示

C. 不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示

D. 经过定点 $A(0,b)$ 的直线都可以用方程 $y=kx+b$ 表示

【解析】A 答案不能表示斜率不存在的直线，C 答案不表示平行于 x 轴与平行于 y 轴的直线，D 答案不表示斜率不存在的直线，选 B

题型二 三点共线

⑴利用两边之和等于第三边

⑵利用斜率相同且过同一点

⑶利用两点求出直线方程，把第三点代入加以验证

⑷利用向量 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$

2.　若三点 $A(2,2)$ 、$B(a,0)$ 、$C(0,b)(ab\neq0)$ 共线, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$_______

【解析】由 $B(a,0)$ 、$C(0,b)$ 两点确定的直线方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，代入 $A(2,2)$，得 $\frac{1}{2}$

题型三 两直线平行

⑴斜率相等，但截距不等。

⑵在一般式中：直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$。

$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$；重合：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$。

⑶平行直线系方程：l: $Ax+By+C=0$，与之平行的直线可设为: $Ax+By+C'=0$。

3. 设 $a\in R$, 则"$a=1$"是"直线 $l_1: ax+2y=0$ 与直线 $l_2: x+(a+1)y+4=0$ 平行"的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【解析】选 A

题型四 两直线垂直

⑴利用斜率乘积等于－1。

⑵一般式中：直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，垂直的充要条件是：$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$。

⑶垂直直线系方程：l: $Ax+By+C=0$，与之垂直的直线可设为：$Bx-Ay+C'=0$。

4. 已知点 $O(0,0)$，$A(0,b)$，$B\left(a,a^3\right)$，若 ΔOAB 为直角三角形，则必有（ ）

A. $b=a^3$ B. $b=a^3+\frac{1}{a}$ C. $\left(b-a^3\right)\left(b-a^3-\frac{1}{a}\right)=0$. $\left|b-a^3\right|+\left|b-a^3-\frac{1}{a}\right|=0$

【解析】若 A 为直角, A、B 纵坐标相等，$\therefore b-a^3=0$；若 B 为直角，由 $k_{OB}\cdot k_{AB}=-1$，得 $b-a^3-\frac{1}{a}=0$, 选 C

题型五 距离

⑴点 $\left(x_0,y_0\right)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离：$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

⑵平行直线 l_1: $Ax+By+C_1=0$；l_2: $Ax+By+C_2=0$ 间的距离：$d=\frac{\left|C_1-C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

5. 若直线 m 被两平行线 $l_1: x-y+1=0$，$l_2: x-y+3=0$ 所截得的线段的长为 $2\sqrt{2}$，则 m 的倾斜角可以是 ①$15^\circ$；②$30^\circ$；③$45^\circ$；④ 60°；⑤$75^\circ$。其中正确答案的序号是________.（写出所有正确答案的序号）

【解析】$\because l_1,l_2$ 间的距离为 $\sqrt{2}$，而直线 m 被两平行线截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，$\therefore$ 可知直线 m 与两平行线的夹角为 30°，直线的倾斜角为 45°，m 的倾斜角为：$45^\circ+30^\circ=75^\circ, 45^\circ-30^\circ=15^\circ$，选①⑤

6. 点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 距离的最大值为 （　　）

A. 1　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. 2

【解析】选 B

题型六 对称

⑴ 点关于点对称：点 $P(x_0,y_0)$ 关于点 $O(a,b)$（中点）的对称点 Q 的坐标为 $(2a-x_0,2b-y_0)$。

⑵点关于线对称：利用中、垂两条件建立方程组，(注意特殊点的对称) 点 (x_0,y_0) 关于直线 $Ax+By+C=0$ 的对称点：$(x_0-2A\dfrac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}, y_0-2B\dfrac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2})$。

⑶ 线关于点对称：l：$Ax+By+C=0$ 关于点 (a,b) 对称的直线方程为：$A(2a-x)+B(2b-y)+C=0$。

⑷线关于线对称：(转化为特殊点对称) 在直线上取一个特殊点，求这个点关于直线的对称点，再求两条直

线的交点，利用两点式可求对称线的方程。

特例：角的两边关于角分线对称，线关于特殊线（x 轴、y 轴、$y=x$、$y=-x$）对称，直接交换坐标即可。

⑸反射问题均转化为对称问题解决。

7. 已知直线$l: x-y-1=0, l_1: 2x-y-2=0$，若直线$l_2, l_1$关于直线$l$对称，则$l_2$的方程为（　　）

A. $x-2y+1=0$　　*B*. $x-2y-1=0$　　*C*. $x+y-1=0$　　*D*. $x+2y-1=0$

【解析】因为对称轴的斜率为 1，由$\begin{cases} x=y+1 \\ y=x-1 \end{cases}$，得$2(y+1)-(x-1)-2=0$，选 *B*

8. 如果$AC<0, BC>0,$ 那么直线$Ax+By+C=0$不通过（　　）

A. 第一象限　　*B*. 第二角限　　*C*. 第三象限　　*D*. 第四象限

【解析】选 *B*

9. 已知两条直线$a_1x+b_1y+1=0$和$a_2x+b_2y+1=0$都过点$A(1,2)$，求过两点$P_1(a_1,b_1), P_2(a_2,b_2)$的直线的方程.

【解析】$x+2y+1=0$

专题二　圆

题型一 圆的方程

⑴标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心$\left(a,b\right)$，半径r。

⑵一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, 圆心$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$。

1. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1，则 $a=$__________

【解析】 $-\frac{4}{3}$

2. 已知$a\in R$，方程$a^2x^2+(a+2)y^2+4x+8y+5a=0$表示圆，则圆心坐标是____，半径是_____。

【解析】 $\left(-2,-4\right)$，5

3. 已知圆C的圆心坐标是$(0,m)$，半径长是r，若直线$2x-y+3=0$与圆C相切于点$A(-2,-1)$，则$m=$___________，$r=$___________.

【解析】 -2，$\sqrt{5}$

4. 若过点(2, 1)圆与两坐标轴都相切，圆心到直线 $2x-y-3=0$ 距离为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　*B.* $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　*C.* $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　*D.* $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【解析】 选 B

5. 求由曲线$x^2+y^2=|x|+|y|$围成的图形的面积。

【解析】 $2+\pi$

6. 方程 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示什么曲线?

【解析】 上半圆

7. 画出方程 $x-1=\sqrt{1-y^2}$ 表示的曲线?

【解析】 右半圆

题型二 点与圆、线与圆、圆与圆位置关系

⑴点与圆：点到圆心距离为d：

ⅰ. $d=r$，在圆上；ⅱ. $d>r$，在圆外；ⅲ. $d<r$，在圆内。

⑵线与圆：圆心到直线的距离为d：

ⅰ. $d=r$，相切；　ⅱ. $d>r$，相离；　ⅲ. $d<r$，相交。

⑶圆与圆：两圆圆心距为d，半径分别为r_1,r_2：

ⅰ. $d>r_1+r_2$，相离；　ⅱ. $d=r_1+r_2$，外切；　ⅲ. $r_1+r_2>d>|r_1-r_2|$，相交；

ⅳ. $d=|r_1-r_2|$，内切；　ⅴ. $d<|r_1-r_2|$，内含。

1. 设点 M（x_0, 1），若在圆 0: $x^2+y^2=1$上存在点 N，使得$\angle 0MN$=45°，则x_0的取值范围是________。

【解析】点M在圆的切线$y=1$上，当$M(1,1)$时，恰好存在圆上(0, 1), (1, 0)两个点满足，由图象M应向左移动，由对称性可得$x_0\in[-1,1]$。

2. 若直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$与圆$x^2+y^2=1$有公共点，则　(　　　)

A. $a^2+b^2\le 1$　　*B*. $a^2+b^2\ge 1$　　*C*. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\le 1$　　*D*. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge 1$

【解析】利用圆心$(0,0)$到直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$的距离$d=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\le 1$，选 *D*。

3. 已知直线$ax+by+c=0(abc\ne 0)$与圆$x^2+y^2=1$相切，则三条边长分别为$|a|,|b|,|c|$的三角形为　(　　　)

A. 锐角三角形　　*B*. 直角三角形　　*C*. 钝角三角形　　*D*. 不存在

【解析】选 *B*。

4. 若直线$y=x+b$与曲线$y=3-\sqrt{4x-x^2}$有公共点，则b的范围是　(　　　)

A. $\left[-1,1+2\sqrt{2}\right]$　　*B*. $\left[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right]$　　*C*. $\left[1-2\sqrt{2},3\right]$　　*D*. $\left[1-\sqrt{2},3\right]$

【解析】选 *C*。

5. 若曲线 $C_1: x^2+y^2-2x=0$ 与曲线 $C_2: y(y-mx-m)=0$ 有四个不同的交点，则实数 m 的取值范围是 （　　）

A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　　*B*. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)\cup(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$　　*C*. $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$

D. $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

【解析】选 *B*。

6. 过点 $(\sqrt{2},0)$ 引直线 l 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 相交于 A,B 两点, O 为坐标原点, 当 ΔAOB 的面积取最大值时, 直线 l 的斜率等于 （　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　*B*. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　*C*. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　*D*. $-\sqrt{3}$

【解析】曲线为上半圆，$S_{\Delta A0B}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\angle AOB$，当 $\angle AOB=90^\circ$ 时面积最大，$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，选 *B*。

7. 与直线 $x+y-2=0$ 和曲线 $x^2+y^2-12x-12y+54=0$ 都相切的半径最小的圆的标准方程是________。

【解析】配方得：$(x-6)^2+(y-6)^2=18$，半径最小的圆是过已知圆圆心 $\left(6,6\right)$ 向直线 $x+y-2=0$ 作垂线与直线与圆有两交点，以两交点为直径的圆，即 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 。

8. 集合 $A=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2=4\right\}, B=\left\{(x,y)\middle|(x-3)^2+(y-4)^2=r^2\right\}$, 其中 $r>0$, 若 $A\cap B$ 中有且只有一个元素, 则 r 的值是________。

【解析】3 或 7。

9. 圆 $(x+2)^2+y^2=4$ 与圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 的位置关系为 （　　）

A. 内切　　*B*. 相交　　*C*. 外切　　*D*. 相离

【解析】选 *B*。

题型三 圆上的点到直线距离为定值的点的个数

到直线距离为定值的点的轨迹是与已知直线平行的两条直线，这两条直线与圆的交点的个数即所求点的个数，即最多四个交点，可能是 0、1、2、3、4，首先计算圆心到直线的距离，再考虑这个距离与半径的关系，从直观上得到答案。

1. 圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 的距离等于 $\sqrt{2}$ 的点有__个。

【解析】 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 配方得：$(x+1)^2+(y+2)^2=8$，圆心 $(-1,-2)$ 到直线的距离为 $\sqrt{2}$，而半径为 $2\sqrt{2}$，可知两条直线一条过圆心，一条与圆相切，即满足条件的点有 3 个。

2. 已知圆 $O: x^2+y^2=5$，直线 $l: x\cos\theta+y\sin\theta=1$（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$），设圆 O 上到直线 l 的距离等于 1 的点的个数为 k，则 $k=$________。

【解析】 4。

3. 已知圆 $x^2+y^2=4$, 直线 $l: y=x+b$，当 b 为何值时，圆 $x^2+y^2=4$ 上恰有 3 个点到直线 l 的距离都等于 1。

【解析】 $b=\pm\sqrt{2}$。

题型四 圆中弦中点性质

(1)弦中点与圆心连线与弦垂直；

(2)弦的中垂线过圆心。

1. 直线 l 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+a=0$ $(a<3)$ 相交于两点 A,B，弦 AB 的中点为 $(0,1)$，则直线 l 的方程为__________。

【解析】 圆心为 $(-1,2)$，圆心与 AB 中点确定直线与 l 垂直，即 $k=1$，直线 l 方程为 $y=x+1$

2 设直线 $2x+3y+1=0$ 和圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相交于点 A,B，则弦 AB 的垂直平分线方程是_________。

【解析】 $3x-2y-3=0$。

题型五 圆的切线

过圆上一点$\left(x_0,y_0\right)$的切线方程：

⑴圆心在坐标原点：$x.x_0+y.y_0=r^2$；

⑵圆心不在坐标原点的标准方程：$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$；

⑶一般方程：$x.x_0+y.y_0+D.\dfrac{x+x_0}{2}+E.\dfrac{y+y_0}{2}+F=0$ 。

※圆$x^2+y^2=r^2$，点P (x_0,y_0)，则方程$x.x_0+y.y_0=r^2$表示的直线与圆的位置关系：

$\begin{cases}\text{点在圆上, 相切}\\ \text{点在圆外, 相交}\\ \text{点在圆内, 相离}\end{cases}$，利用圆心到直线的距离可判断。

几何意义：

⑴点$P(x_0,y_0)$在圆外，则$x.x_0+y.y_0=r^2$表示过P作圆两条切线，两切点确定直线方程；

⑵点P (x_0,y_0)在圆内，则$x.x_0+y.y_0=r^2$表示过P作圆割线(无数条)与圆有两交点，过两交点作圆的切线，两切线交点在一条直线上。

过圆外一点引圆的切线(两条)：方法：设斜率k，利用点斜式设出直线方程，然后利用圆心到直线的距离等于r可确定k，如果求出一条，存在丢根问题，一定要补上斜率不存在直线。

1. 过点P(2, 2)的直线与圆$(x-1)^2+y^2=5$相切，且与$ax-y+1=0$垂直，则$a=$（　　）

$A.\ -\dfrac{1}{2}$　　　$B.\ 1$　　　$C.\ 2$　　　$D.\ \dfrac{1}{2}$

【解析】选C。

2. 已知点$M(a,b)$在圆$O:x^2+y^2=1$外，则直线$ax+by=1$与圆O的位置关系是　（　　）

$A.$ 相切　　　$B.$ 相交　　　$C.$ 相离　　　$D.$ 不确定

【解析】选B。

3. 过点$(3,1)$作圆$(x-1)^2+y^2=1$的两条切线，切点分别为A、B，则直线AB方程为（　　）

$A.\ 2x+y-3=0$　　$B.\ 2x-y-3=0$　　$C.\ 4x-y-3=0$　　$D.\ 4x+y-3=0$

【解析】选A。

4. 过原点O作圆$x^2+y^2-6x-8y+20=0$的两条切线，设切点分别为P,Q，则线段PQ的长为________。

【解析】两切点确定的直线方程为：$xx_0+yy_0-6\cdot\frac{x+x_0}{2}-8\cdot\frac{y+y_0}{2}+20=0$求出圆心距为1，半径为$\sqrt{5}$，弦长为4。

5. 已知⊙M：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线l：$2x+y+2=0$，P为l上的动点，过点P作⊙M的切线PA,PB，切点为A,B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线AB的方程为（　　）

A. $2x-y-1=0$　　*B*. $2x+y-1=0$　　*C*. $2x-y+1=0$　　*D*. $2x+y+1=0$

【解析】当$PM\perp l$时，取到最小值，求得$P(1,0)$，选*D*。

6. 若直线$ax+by=1$与圆$x^2+y^2=1$相交，则点$P(a,b)$与圆的位置关系是　（　　）

A. 在圆上　　*B*.　在圆外　　*C*. 在圆内　　*D*. 不能确定

解析】选*B*。

题型六　切线长、弦长。

(1)过圆外一点P (x_0,y_0)作圆的切线，切点为T，

则$|PT|=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2}$；

(2)弦长=2$\sqrt{r^2-(\text{弦心距})^2}$。

1. 已知圆O的方程是$x^2+y^2-2=0$，圆O'的方程是$x^2+y^2-8x+10=0$，由动点P向圆O和圆O'所引的切线长相等，则动点P的轨迹方程是________。

【解析】设$P(x,y)$，因为切线长相等，即$\sqrt{x^2+y^2-2}=\sqrt{x^2+y^2-8x+10}$，得$x=\frac{3}{2}$。

2. 过三点$A(1,3)$，$B(4,2)$，$C(1,-7)$的圆交y轴于M,N两点，则$|MN|$=（　　）

A. $2\sqrt{6}$　　*B*. 8　　*C*. $4\sqrt{6}$　　*D*. 10

【解析】得圆心为$(1,-2),r=5$，选*C*。

3. 已知直线$x-\sqrt{3}y+8=0$和圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$相交于A,B两点. 若$|AB|=6$，则r的

值为________。

【解析】5。

4. 已知直线 $l: mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A,B 两点，过 A,B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C,D 两点，若 $AB=2\sqrt{3}$，则 $|CD|=$_______.

【解析】代入弦长公式得 $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，直线的倾斜角为 $30°$，$|CD|=\dfrac{2\sqrt{3}}{\cos 30°}=4$。

5. 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|$_____。

【解析】$2\sqrt{2}$。

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $3x+4y-5=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A,B 两点，则弦 AB 的长等于（　　）

A. $3\sqrt{3}$　　*B*. $2\sqrt{3}$　　*C*. $\sqrt{3}$　　*D*. 1

【解析】选 *B*。

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $x+2y-3=0$ 被圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长为______。

【解析】$\dfrac{2\sqrt{55}}{5}$。

8. 已知直线 $ax+y-2=0$ 与圆心为 C 的圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=4$ 相交于 A，B 两点，且 ΔABC 为等边三角形，则实数 $a=$________.

【解析】$a=4\pm\sqrt{15}$。

9. 已知圆 $M: x^2+y^2-2ay=0(a>0)$ 截直线 $x+y=0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$，则圆 M 与圆 $N:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系是（　　）

A. 内切　　*B*. 相交　　*C*. 外切　　*D*. 相离

【解析】选 *B*。

题型七 最值问题

(1)定点与圆上点距离最值问题：

点的确定：点与圆心连线与圆有两交点，靠近为最小值点，远离为最大值点；

最值确定： $\max:|d+r|,\min:|d-r|,d:$ 定点与圆心距离。

1. 已知 $x^2+y^2-2x+4y-20=0,$ 则 x^2+y^2 最小值为_______。

【解析】 $30-10\sqrt{5}$

2. 已知半径为 1 的圆经过点 $(3,4)$，则其圆心到原点的距离的最小值为（　　）

$A.$ 4　　　　$B.$ 5　　　　$C.$ 6　　　　$D.$ 7

【解析】选 A

(2)线与圆距离最值问题：

点的确定：

①圆心作线的垂线交圆于两点，靠近为最小值点，远离为最大值点；

②平行移动直线与圆有两切点；

最值确定：

$\max:|d+r|,\min:|d-r|,d:$ 圆心到直线距离。

1. 在平面直角坐标系中，记 d 为点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 到直线 $x-my-2=0$ 的距离，当 θ,m 变化时，d 的最大值为（　　）

$A.$ 1　　　　$B.$ 2　　　　$C.$ 3　　　　$D.$ 4

【解析】P 为单位圆上一点，而直线$x-my-2=0$恒过点 A（2，0），几何意义是 d 的最大值为 $OA+1=3$。

2. 圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点到直线 $x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离的差是（　　）

$A.$ 36　　　　$B.$ 18　　　　$C.$ $6\sqrt{2}$　　　　$D.$ $5\sqrt{2}$

【解析】选 C。

3. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则 ΔABP 面积的取值范围是（　　）

A. $[2, 6]$　　　B. $[4, 8]$　　　C. $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$　　　D. $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

【解析】选 A

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，以点 $(1,0)$ 为圆心且与直线 $mx-y-2m-1=0(m\in R)$ 相切的所有圆中，半径最大的圆的标准方程为__________

【解析】直线恒过定点 $(2,-1)$，当点 $(1,0)$ 与 $(2,-1)$ 的距离为半径时半径最大，$r_{\max}=\sqrt{2}$, $(x-1)^2+y^2=2$

5. 在平面直角坐标系中，A,B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点，若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x+y-4=0$ 相切，则圆 C 面积的最小值为　（　　　）

A. $\frac{4}{5}\pi$　　　B. $\frac{3}{4}\pi$　　　C. $(6-2\sqrt{5})\pi$　　　D. $\frac{5}{4}\pi$

【解析】动圆恒过原点，当原点到直线距离为直径时面积最小，选 A

(3)构造斜率求最值：

形如 $z=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ 最值的求法，可看作是圆上的点 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的斜率的范围

1. 如果实数 x,y 满足: $(x-2)^2+y^2=3$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为_______

【解析】$\sqrt{3}$

(4)构造截距求范围

形如: $ax+by$ 范围，可设 $ax+by=z,z$ 可看作是直线平行移动的截距

1. 若直线 $y=x+b$ 与曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 恰有一个公共点，求实数 b 的取值范围。

【解析】$-1<b\le 1$ 或 $b=-\sqrt{2}$

(5)切线长最值：

圆心到动点距离最小或最大时切线长最小或最大。

1. 由直线 $y=x+1$ 上的一点向圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 引切线，则切线长的最小值为 （　　）

$A.$ 1　　$B.$ $2\sqrt{2}$　　$C.$ $\sqrt{7}$　　$D.$ 3

【解析】选 C

(6)弦长最值：

转化为弦心距最值。

1. 已知圆的方程为 $x^2+y^2-6x-8y=0$，设该圆过点 $(3,5)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 （　　）

$A.$ $10\sqrt{6}$　　$B.$ $20\sqrt{6}$　　$C.$ $30\sqrt{6}$　　$D.$ $40\sqrt{6}$

【解析】最长弦为过圆心的弦即直径，最短弦与最长弦垂直，而 $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD$，选 B

2. 过点 $P(1,1)$ 的直线，将圆形区域 $\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$ 分两部分，使得这两部分的面积之差最大，则该直线的方程为 （　　）

$A.$ $x+y-2=0$　　$B.$ $y-1=0$　　$C.$ $x-y=0$　　$D.$ $x+3y-4=0$

【解析】选 A

3. 过点 $(3,1)$ 作圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 的弦，其中最短的弦长为_______。

【解析】$2\sqrt{2}$

4. 设 $m\in R$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于 $P(x,y)$，则 $|PA|\cdot|PB|$ 的最大值是_______

【解析】可知 P 的轨迹是以 $A(0,0)$，$B(1,3)$ 为直径的圆，当 PA=PB 时最大为 5

5. 已知圆 $x^2+y^2-6x=0$，过点（1，2）的直线被该圆所截得的弦的长度的最小值为 （　　）

$A.$ 1　　$B.$ 2　　$C.$ 3　　$D.$ 4

【解析】选 B。

6. 已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$, 直线 $l:(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$ 。

（1）求证：直线l恒过定点。

（2）判断直线l被圆C截得的弦何时最长、何时最短？并求截得的弦长最短时m的值以及最短长度。

【解析】（1）恒过定点(3, 1)；（2）$m=-\dfrac{3}{4}$；$4\sqrt{5}$。

题型八 对称问题

(1)自身对称：

①圆自身关于圆心成中心对称；

②圆关于任意一条直径成轴对称。

1. 已知圆$C: x^2+y^2+2x+ay-3=0$（a为实数）上任意一点关于直线$l: x-y+2=0$的对称点都在圆C上，则$a=$_______。

【解析】-2。

2. 已知直线$l: x+ay-1=0(a\in R)$是圆C：$x^2+y^2-4x-2y+1=0$的对称轴，过点$A(-4,a)$作圆C的一条切线，切点为B，则$|AB|=$（　　）

A. 2　　B. $4\sqrt{2}$　　C. 6　　D. $2\sqrt{10}$

【解析】选C。

(2)圆关于点(或线)的对称

只对称圆心即可，转化为点关于点(或点关于线)对称。

1. 已知圆$C_1: (x+1)^2+(y-1)^2=1$，圆C_2与圆C_1关于直线$x-y-1=0$对称，则圆C_2的方程为（　　）

A. $(x+2)^2+(y-2)^2=1$　　B. $(x-2)^2+(y+2)^2=1$

C. $(x+2)^2+(y+2)^2=1$　　D. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

【解析】只对称圆心，圆C_1圆心为$(-1,1)$，关于$x-y-1=0$对称点坐标为$(2,-2)$，选B

2. 圆$(x+2)^2+y^2=5$关于原点$(0,0)$对称的圆的方程为（　　）

A. $(x-2)^2+y^2=5$　　*B*. $x^2+(y-2)^2=5$　　*C*. $(x+2)^2+(y+2)^2=5$

D. $x^2+(y+2)^2=5$

【解析】选 *A*。

3. 已知圆 $C_1:\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=1$，圆 $C_2:\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=9$，$M,N$ 分别是圆 C_1,C_2 上的动点，P 为 x 轴上的动点，则 $\left|PM\right|+\left|PN\right|$ 的最小值为　（　　）

A. $5\sqrt{2}-4$　　*B*. $\sqrt{17}-1$　　*C*. $6-2\sqrt{2}$　　*D*. $\sqrt{17}$

【解析】其中一个圆关于 x 轴对称，两圆心连线与 x 轴的交点为所求点，连线距离减去两圆半径之和为最小值，选 *A*。

4. 一条光线从点 $\left(-2,-3\right)$ 射出，经 y 轴反射后与圆 $\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2=1$ 相切，则反射光线所在直线的斜率为　（　　）

A. $-\dfrac{5}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{5}$　　*B*. $-\dfrac{3}{2}$ 或 $-\dfrac{2}{3}$　　*C*. $-\dfrac{5}{4}$ 或 $-\dfrac{4}{5}$　　*D*. $-\dfrac{4}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{4}$

【解析】选 *D*。

专题三　圆锥曲线方程

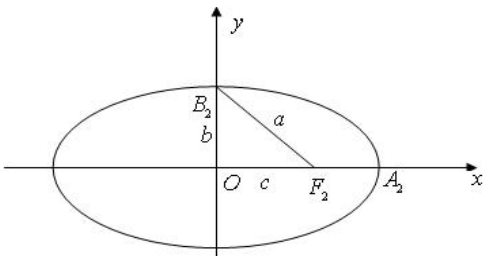
椭圆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 表示焦点在 x 轴的椭圆标准方程；$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 表示焦点在 y 轴的椭圆标准方程。

判断焦点所在轴秒杀方法：分母大的为焦点所在轴。

几何性质：①关于 x 轴、y 轴成轴对称图形，关于原点成中心对称图形。

② $a^2=b^2+c^2$，下图中对应的特征直角三角形 B_2OF_2。

应用：作图法找椭圆的焦点：以短轴的两个端点为圆心，以半长轴为半径作圆，与长轴的两个交点为椭圆的焦点。



双曲线：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 表示焦点在 x 轴上双曲线的标准方程；$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 表示焦点在 y 轴的双曲线标准方程。

判断焦点所在轴秒杀方法：系数为正的为焦点所在轴。

几何性质：

①关于 x 轴、y 轴成轴对称图形，关于原点成中心对称图形。

② $c^2=a^2+b^2$，特征三角形：原点、虚轴端点、实轴端点构成的直角三角形；

抛物线：①焦点在 x 轴上：$y^2=\pm 2px$；

②焦点在 y 轴上：$x^2=\pm 2py$ $(p>0)$，p 表示焦点到准线的距离。

判断焦点所在轴秒杀方法：一次对应焦点所在轴。

③焦点坐标：$\left(\pm\dfrac{p}{2},0\right)$ 或 $\left(0,\pm\dfrac{p}{2}\right)$。

④准线方程：$x=\pm\dfrac{p}{2}$ 或 $y=\pm\dfrac{p}{2}$。

题型一 确定圆锥曲线的形状

1. “$m>n>0$”是“方程$mx^2+ny^2=1$”表示焦点在y轴上的椭圆”的 （　　）

A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】椭圆方程可化为：$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，如焦点在$y$轴上，只需$\frac{1}{n}>\frac{1}{m}>0$，即$m>n>0$，

所以是充要条件，选C。

2. 若$k\in R$，则“$k>3$”是“方程$\frac{x^2}{k-3}-\frac{y^2}{k+3}=1$表示双曲线”的 （　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】方程表示双曲线只需$(k-3)(k+3)>0$，即$k>3$或$k<-3$，所以是充分不必要条件，选A。

3. 已知方程$\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$表示双曲线，且该双曲线两焦点间的距离为4，则$n$的取值范围是 （　　）

A. $(-1,3)$　　B. $(-1,\sqrt{3})$　　C. $(0,3)$　　D. $(0,\sqrt{3})$

【解析】可知焦点在x轴上，$m^2+n+3m^2-n=4m^2=4, m^2=1$，需$1+n>0, 3-n>0$，选$A$。

4. 已知曲线$C: mx^2+ny^2=1$ （　　）

A. 若$m>n>0$，则C是椭圆，其焦点在y轴上

B. 若$m=n>0$，则C是圆，其半径为$\sqrt{n}$

C. 若$mn<0$，则C是双曲线，其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D. 若$m=0$，$n>0$，则C是两条直线

【解析】选A、C、D。

题型二 求圆锥曲线方程

1. 已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$，且与椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 有公共焦点，则 C 的方程为 （　　）

A. $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{10}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$

【解析】由椭圆方程得 $c=3$，由渐近线得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore b=\sqrt{5},a=2$，选 B。

2. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 有相同的焦点，且双曲线的离心率是椭圆离心率的两倍，则双曲线的方程为_______。

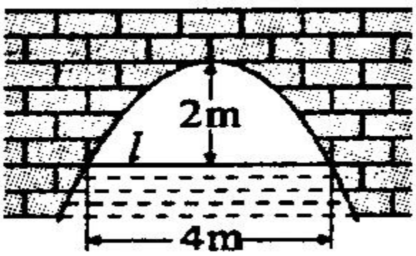
【解析】由椭圆方程得 $c^2=7$，$e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，所以双曲线的离心率为 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$\therefore a^2=4,b^2=3$，

由双曲线的方程为：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$。

3. 已知抛物线 $y^2=8x$ 的准线过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点，且双曲线的离心率为 2，则该双曲线的方程为_________。

【解析】抛物线的准线为 $x=2$，所以双曲线中 $c=2$，由离心率为 2 得 $a=1$，焦点在 x 轴上，所以双曲线的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$。

4. 下图是抛物线形拱桥，当水面在 l 时，拱顶离水面 2 米，水面宽 4 米，水位下降 1 米后，水面宽_______米。



【解析】设拱桥所在抛物线的方程为$x^2=-2py$，将点$(2,-2)$代入得$p=1$，转化为求点$(x,-3)$中的x，将点$(x,-3)$代入抛物线$x^2=-2y$中可得$x=\sqrt{6}$，即水面宽为$2\sqrt{6}$米。

题型三 求圆锥曲线方程中的量

1. 若抛物线$y^2=2px$焦点是椭圆$\frac{x^2}{3p}+\frac{y^2}{p}=1$一个焦点，则$p=$（　）

A. 2　　*B*. 3　　*C*. 4　　*D*. 8

【解析】$3p-p=\frac{p^2}{4}$，$p=8$，选*D*。

2. 已知等轴双曲线C的中心在原点，焦点在x轴上，C与抛物线$y^2=16x$的准线交于A、B两点，$|AB|=4\sqrt{3}$，则C的实轴长为　（　　）

A. $\sqrt{2}$　　*B*. $2\sqrt{2}$　　*C*. 4　　*D*. 8

【解析】设等轴双曲线方程为$x^2-y^2=a^2$，抛物线准线方程为$x=4$，解得$a=2$，选*C*。

3. 设AB是椭圆的长轴，点C在椭圆上，且$\angle CBA=\frac{\pi}{4}$，若$AB=4, BC=\sqrt{2}$，则椭圆的两个焦点之间的距离为______。

【解析】由$AB=4$得$a=2$，由$\angle CBA=\frac{\pi}{4}$与$BC=\sqrt{2}$得C $(1,1)$，$\frac{4}{3}\sqrt{6}$代入椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$得$b^2=\frac{4}{3}$，$c^2=\frac{8}{3}$，$2c=\frac{4}{3}\sqrt{6}$。

4. 曲线$\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{6-m}=1(m<6)$与曲线$\frac{x^2}{5-m}+\frac{y^2}{9-m}=1(5<m<9)$的　（　　）

A. 焦距相等　　*B*. 离心率相等　　*C*. 焦点相同　　*D*. 准线相同

【解析】$\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{6-m}=1(m<6)$表示焦点在$x$轴上的椭圆，$\frac{x^2}{5-m}+\frac{y^2}{9-m}=1(5<m<9)$表示焦点在$y$轴上的双曲线

化简为$-\dfrac{x^2}{m-5}+\dfrac{y^2}{9-m}=1(5<m<9)$，可知焦距相等，选 A。

5. $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，则双曲线$C_1:\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=1$与$C_2:\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}-\dfrac{x^2}{\sin^2\theta\tan^2\theta}=1$的（　　）

A. 实轴长相等　　　B. 虚轴长相等　　　C. 焦距相等　　　D. 离心率相等

【解析】由方程得$e_1=\dfrac{1}{\cos\theta}$，$e_2=\dfrac{\sqrt{\sin^2\theta\left(1+\tan^2\theta\right)}}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$，选 D。

6. 若实数k满足$0<k<9$，则曲线$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9-k}=1$与曲线$\dfrac{x^2}{25-k}-\dfrac{y^2}{9}=1$的 （　　）

A. 焦距相等　　　B. 实半轴长相等　　　C. 虚半轴长相等　　　D. 离心率相等

【解析】$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9-k}=1$表示焦点在$x$轴上的双曲线，$\dfrac{x^2}{25-k}-\dfrac{y^2}{9}=1$表示焦点在$x$轴上的双曲线，可知焦距相等，选 A。

7. 曲线$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$与曲线$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$ 的 （　　）

A. 长轴长相等　　　B. 短轴长相等　　　C. 离心率相等　　　D. 焦距相等

【解析】当$k<9$时，$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，两曲线焦距相等；当

$25>k>9$时，$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$可化为$\dfrac{x^2}{25-k}-\dfrac{y^2}{k-9}=1$，表示焦点在$x$轴上的双曲线，两曲线焦距相等，选 D。

8. 设 0 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=l(a>0，b>0)$的两条渐近线分别交于 D，E 两点．若△0DE 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为 （　　）

A. 4　　　B. 8　　　C. 16　　　D. 32

【解析】$S=\dfrac{1}{2}a\times 2b=ab=8$，$c^2=a^2+b^2\geq 2ab=16$，$\therefore(2c)_{\min}=8$，选 B。

专题四　圆锥曲线定义

题型一 利用椭圆定义解题

动点到两定点(距离为$2c$)距离之和为定值($2a$)的点的轨迹

①$2a > 2c$，椭圆；

②$2a = 2c$，两定点确定的线段；

③$2a < 2c$，无轨迹。

焦半径公式：$\left|PF_1\right| = a + ex_0$，$\left|PF_2\right| = a - ex_0$(左加右减)

二级结论：

过抛圆的一个焦点作弦 AB，与另一个焦点 F 构造三角形 FAB，则 FAB 周长等于 $4a$

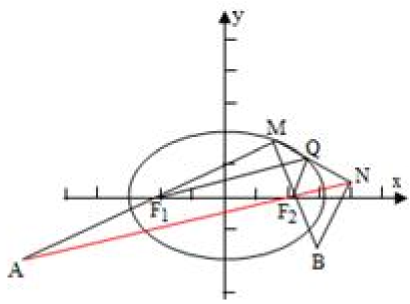
1. 设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上点，若 F_1,F_2 是椭圆两个焦点，则$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|$等于(　　　)

$A.$ 4　　　　　$B.$ 5　　　　　$C.$ 8　　　　　$D.$ 10

【解析】利用椭圆的定义得$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a=10$，选 D。

2. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，点 M 与 C 的焦点不重合，若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A,B，线段 MN 的中点在 C 上，则$|AN|+|BN|=$__________。

【解析】如图，$BN=2QF_2$，$AN=2QF_1$，$|AN|+|BN|=2(QF_1+QF_2)=4a=12$。



3. 设 F_1、F_2 为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限，若 ΔMF_1F_2 为等腰三角形，则 M 的坐标为_________。

【解析】$\left|MF_1\right|=\left|F_1F_2\right|=2c=a+ex_0=6+\dfrac{2}{3}x_0=8$，$x_0=3$，代入得 $M\left(3,\sqrt{15}\right)$

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的中心为原点，焦点 F_1,F_2 在 x 轴上，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过 F_1 直线 l 交 C 于 A,B 两点，且 ΔABF_2 周长为 16，那么 C 方程为______

【解析】$4a=16,a=4$，得方程为：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$

5. 已知 F_1、F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A,B 两点，$|F_2A|+|F_2B|=12$，则 $|AB|$=_______

【解析】$|AB|=4a-12=8$

6. 已知 ΔABC 的顶点 B,C 在椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上，顶点 A 是椭圆的一个焦点，且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上，则 ΔABC 的周长是 （　　）

A. $2\sqrt{3}$　　*B.* 6　　*C.* $4\sqrt{3}$　　*D.* 12

【解析】周长为：$4a=4\sqrt{3}$，选 *C*

7. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1、F_2，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过 F_2 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，若 ΔAF_1B 的周长为 $4\sqrt{3}$，则 C 的方程为 （　　）

A. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　*B.* $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　　*C.* $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　　*D.* $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

【解析】$4a=4\sqrt{3}$，$\therefore a=\sqrt{3}$，$c=1,b=\sqrt{2}$，选 *A*

8. 已知经过椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右焦点 F_2 作垂直于 x 轴的直线 AB，交椭圆于 A,B 两点，F_1 是椭圆的左焦点。（1）求 ΔAF_1B 的周长；

（2）如果 AB 不垂直于 x 轴，ΔAF_1B 的周长有变化吗？为什么？

【解析】（1）20；（2）不变。

题型二 利用双曲线定义解题

1. 双曲线上任意一点到两焦点距离之差的绝对值是常数$2a$。

2. 注意定义中两个加强条件：①绝对值； ②$2a<2c$。

3. 加绝对值表示两支(或两条)，不加绝对值表示一支(或一条)。

4. ①当$2a<2c$时，表示双曲线；②当$2a=2c$时，表示以两定点为端点向两侧的射线；③当$2a>2c$时，无轨迹。

5. 当$2a=0$时，表示两定点的中垂线。

1. 已知双曲线$x^2-y^2=1$，点F_1,F_2为其两个焦点，点P为双曲线上一点，若$PF_1\perp PF_2$，则$|PF_1|+|PF_2|$的值为________。

【解析】$r_1-r_2=2,r_1^2+r_2^2=8$，得$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}$。

2. 设椭圆C_1的离心率为$\frac{5}{13}$，焦点在x轴上且长轴长为26，若曲线C_2上的点到椭圆C_1的两个焦点的距离的差的绝对值等于8，则曲线C_2的标准方程为 ( )

$A.\ \frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ $B.\ \frac{x^2}{13^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$ $C.\ \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$ $D.\ \frac{x^2}{13^2}-\frac{y^2}{12^2}=1$

【解析】由双曲线定义得$a=4$，$c=5$，$b=3$，选A。

3. 双曲线C离心率为2，焦点为F_1、F_2，点A在C上，若$|F_1A|=2|F_2A|$，则$\cos\angle AF_2F_1=$( )

$A.\ \frac{1}{4}$ $B.\ \frac{1}{3}$ $C.\ \frac{\sqrt{2}}{4}$ $D.\ \frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】由双曲线定义得：$|F_1A|-|F_2A|=2a$，$|F_1A|=2|F_2A|$，$\therefore|F_1A|=4a,|F_2A|=2a$，$|F_1F_2|=2c=4a$，由余弦定理得：$\cos\angle AF_2F_1=\frac{1}{4}$，选$A$。

4. 若双曲线$E:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$P$在双曲线$E$上，且$|PF_1|=3$，则$|PF_2|$等于( )

$A.$ 11 $B.$ 9 $C.$ 5 $D.$ 3

【解析】由双曲线定义得：$|PF_2|=9$，选B。

5. 已知点O（0，0），A（－2，0），B（2，0）．设点P满足|PA|－|PB|=2，且P为函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 图象上的点，则|OP|= （　　）

$A.\ \dfrac{\sqrt{22}}{2}$　　$B.\ \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$　　$C.\ \sqrt{7}$　　$D.\ \sqrt{10}$

【解析】利用定义知 P 是双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 右支与椭圆 $\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{x^2}{4}=1(y\geq 0)$ 的交点，

联立得选 D

二级结论:过双曲线的一个焦点作弦 AB(交到同一支上),与另一个焦点 F 构造三角形 FAB,则 FAB 的周长等于 $4a+2AB$。

1. 已知 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左焦点，P,Q 为 C 上的点，若 PQ 的长等于虚轴长的 2 倍，点 $A(5,0)$ 在线段 PQ 上，则 ΔPQF 的周长为______。

【解析】 $4a+2PQ=44$

2. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F_1 的直线交双曲线的左支于 M,N 两点，F_2 为其右焦点，则 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|$ 的值为______。

【解析】 $|MF_2|-|MF_1|=2a$ ①，$|NF_2|-|NF_1|=2a$ ②

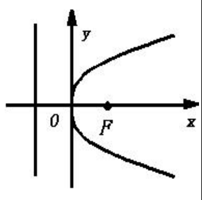
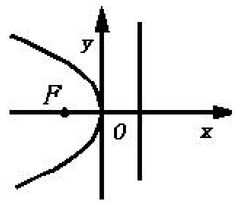
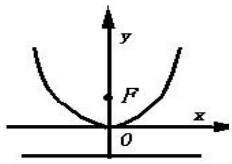
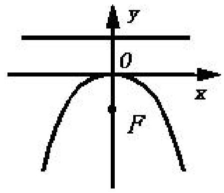
①+②可得 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|=4a$，而 $a=2$，等于 8

3. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 的直线与左支相交于 A,B 两点，如果 $|AF_2|+|BF_2|=2|AB|$，那么 $|AB|$=______。

【解析】 $4a$

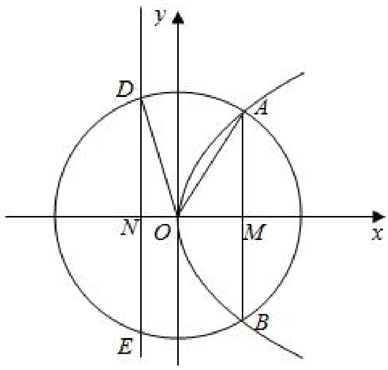
题型三 利用抛物线定义解题

抛物线：到定点(焦点)距离等于到定直线(准线)距离

图形				
标准方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
对称轴	x 轴	x 轴	y 轴	y 轴
焦半径	$\|PF\|=x_0+\frac{p}{2}$	$\|PF\|=-x_0+\frac{p}{2}$	$\|PF\|=y_0+\frac{p}{2}$	$\|PF\|=-y_0+\frac{p}{2}$
几何意义	参数 p 表示焦点到准线的距离， p 越大，开口越开阔。			

1. 以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A,B 两点，交 C 的准线于 D,E 两点，已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为（　　）

$A.\ 2$　　　　$B.\ 4$　　　　$C.\ 6$　　　　$D.\ 8$



【解析】$|AM|=2\sqrt{2}=y_A, 8=2px_A$，$x_A=\frac{4}{p}$，$\sqrt{\frac{16}{p^2}+8}=\sqrt{DN^2+ON^2}=\sqrt{5+\frac{p^2}{4}}$，

$p=4$，选 B。

2. 抛物线 $y=4x^2$ 上的一点 M 到焦点的距离为 1，则点 M 的纵坐标是（　　）

$A.\ \frac{17}{16}$　　　　$B.\ \frac{15}{16}$　　　　$C.\ \frac{7}{8}$　　　　$D.\ 0$

【解析】由抛物线定义可知：$y+\frac{1}{16}=1$，选 B。

3. 设抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是 4，则点 P 到该抛物线焦点的距离是(　　)

$A.$ 4　　　$B.$ 6　　　$C.$ 8　　　$D.$ 12

【解析】选 B。

4. 已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点，A,B 是该抛物线上的两点，$|AF|+|BF|=3$，则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为　(　　)

$A.$ $\frac{3}{4}$　　　$B.$ 1　　　$C.$ $\frac{5}{4}$　　　$D.$ $\frac{7}{4}$

【解析】由抛物线定义可知：$x_1+\frac{1}{4}+x_2+\frac{1}{4}=3$，选 C。

5. 已知A为抛物线C:y^2=2px（p>0）上一点，点A到C的焦点的距离为12，到y轴的距离为9，则p=　(　　)

$A.$ 2　　　$B.$ 3　　　$C.$ 6　　　$D.$ 9

【解析】12=9+$\frac{p}{2}$，$p=6$，选C。

6. 设抛物线的顶点为 0，焦点为 F，准线为 l. P 是抛物线上异于 O 的一点，过 P 作 $PQ\perp l$ 于 Q，则线段 FQ 的垂直平分线　(　　)

$A.$ 经过点 O　　　$B.$ 经过点 P　　　$C.$ 平行于直线 OP　　　$D.$ 垂直于直线 OP

【解析】选 B。

7. 椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 右焦点 F 与抛物线 C_2 焦点重合，C_1 中心与 C_2 的顶点重合. 过 F 且与 x 轴重直的直线交 C_1 于 A，B 两点，交 C_2 于 C，D 两点，且 $|CD|=\frac{4}{3}|AB|$.

（1）求 C_1 的离心率；

（2）若 C_1 的四个顶点到 C_2 的准线距离之和为 12，求 C_1 与 C_2 的标准方程.

【解析】（1）由已知可设 C_2 的方程为 $y^2=4cx$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

不妨设 A,C 在第一象限，由题设得 A,B 的纵坐标分别为 $\frac{b^2}{a}$，$-\frac{b^2}{a}$；C,D 的纵坐标分别为 $2c$，$-2c$，$|AB|=\frac{2b^2}{a}$，$|CD|=4c$. 由 $|CD|=\frac{4}{3}|AB|$ 得 $4c=\frac{8b^2}{3a}$，即 $3\times\frac{c}{a}=2-2(\frac{c}{a})^2$，

解得$\frac{c}{a}=-2$（舍去），$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. 所以C_1的离心率为$\frac{1}{2}$.

（2）由（1）知$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，故$C_1:\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，所以$C_1$的四个顶点坐标分别为$(2c,0)$，$(-2c,0)$，$(0,\sqrt{3}c)$，$(0,-\sqrt{3}c)$，$C_2$的准线为$x=-c$. 由已知得$3c+c+c+c=12$，即$c=2$. 所以$C_1$的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，$C_2$的标准方程为$y^2=8x$.

8. 已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合，C_1 的中心与 C_2 的顶点重合. 过 F 且与 x 轴垂直的直线交 C_1 于 A,B 两点，交 C_2 于 C,D 两点，且$|CD|=\frac{4}{3}|AB|$.

（1）求 C_1 的离心率；

（2）设 M 是 C_1 与 C_2 的公共点，若$|MF|=5$，求 C_1 与 C_2 的标准方程.

【解析】（1）由已知可设C_2的方程为$y^2=4cx$，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$. 不妨设A,C在第一象限，由题设得A,B的纵坐标分别为$\frac{b^2}{a}$，$-\frac{b^2}{a}$；C,D的纵坐标分别为$2c$，$-2c$，故$|AB|=\frac{2b^2}{a}$，$|CD|=4c$. 由$|CD|=\frac{4}{3}|AB|$得$4c=\frac{8b^2}{3a}$，即$3\times\frac{c}{a}=2-2(\frac{c}{a})^2$，解得$\frac{c}{a}=-2$（舍去），$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. 所以$C_1$的离心率为$\frac{1}{2}$.

（2）由（1）知$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，故$C_1:\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，设$M(x_0,y_0)$，则$\frac{x_0^2}{4c^2}+\frac{y_0^2}{3c^2}=1$，$y_0^2=4cx_0$，故$\frac{x_0^2}{4c^2}+\frac{4x_0}{3c}=1$. ①由于$C_2$的准线为$x=-c$，所以$|MF|=x_0+c$，而$|MF|=5$，故$x_0=5-c$，代入①得$\frac{(5-c)^2}{4c^2}+\frac{4(5-c)}{3c}=1$，即$c^2-2c-3=0$，解得$c=-1$（舍去），$c=3$. 所以$C_1$的标准方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$，$C_2$的标准方程为$y^2=12x$.

二级结论：焦点在 x 轴上的圆锥曲线, 曲线上的点到同一个焦点的距离成等差数列，则横坐

标成等差数列，反过来亦成立。

1. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F ，点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 在抛物线上，且 $2x_2=x_1+x_3$，则有（　　）

A. $|FP_1|+|FP_2|=|FP_3|$　　　*B.* $|FP_1|^2+|FP_2|^2=|FP_3|^2$

C. $2|FP_2|=|FP_1|+|FP_3|$　　　*D.* $|FP_2|^2=|FP_1|\cdot|FP_3|$

【解析】$2x_2=x_1+x_3$ 可知焦半径成等差数列，选 *C.*

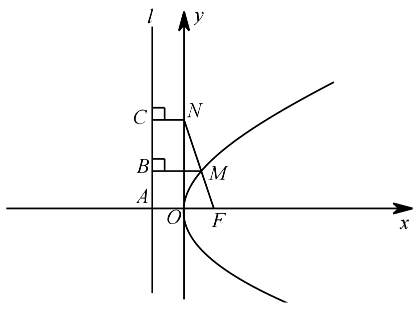
二级结论：一般情况下，抛物线中已知到焦点的距离需转化为到准线的距离，已知到准线的距离需转化为到焦点的距离。

1. 已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$ ，则 $|QF|=$（　　）

A. $\frac{7}{2}$　　*B.* $\frac{5}{2}$　　*C.* 3　　*D.* 2

【解析】利用相似成比例与抛物线上的点到焦点的距离等于到准线距离，得 $|QF|$=3，选 *C*。

2. 已知 F 是抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N ，若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|$=________。



【解析】$y^2=8x$ 则 $p=4$ ，焦点为 $F(2,0)$，准线 $l: x=-2$ ，如图，M 为 F 、N 中点，知线段 BM 为梯形 $AFNC$ 的中位线，$\because CN=2$ ，$AF=4$ ，$\therefore MB=3$ ，又由定义知 $MB=MF$ ，且 $|MN|=|NF|$ ，$\therefore |FN|=6$ 。

二级结论：作过抛物线焦点且倾斜角为 $60°$ 或 $120°$ 弦，两段焦半径分别为：$2p, \frac{2p}{3}$。

1. 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F，且斜率为 $\sqrt{3}$ 直线交 C 于点 M（M 在 x 轴上方），l 为 C 准线，点 N 在 l 上且 $MN \perp l$，则 M 到直线 NF 距离为（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

【解析】斜率为 $\sqrt{3}$ 可知 ΔMNF 为边长为 4 的等边三角形，则 $NF = 2\sqrt{3}$，选 C

2. 设抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线上一点，$PA \perp l$，A 为垂足，如果直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$，那么 $|PF| =$（　　）

A. $4\sqrt{3}$　　B. 8　　C. $8\sqrt{3}$　　D. 16

【解析】由二级结论知选 B

3. 设 O 是坐标原点，F 是抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点，A 是抛物线上的一点，$\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正向的夹角为 $60°$，则 $|\overrightarrow{OA}|$ 为______。

【解析】由二级结论得 $\frac{\sqrt{21}}{2}p$

4. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F，准线为 l，经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A，$AK \perp l$，垂足为 K，则 $\triangle AKF$ 的面积是　（　　）

A. 4　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 8

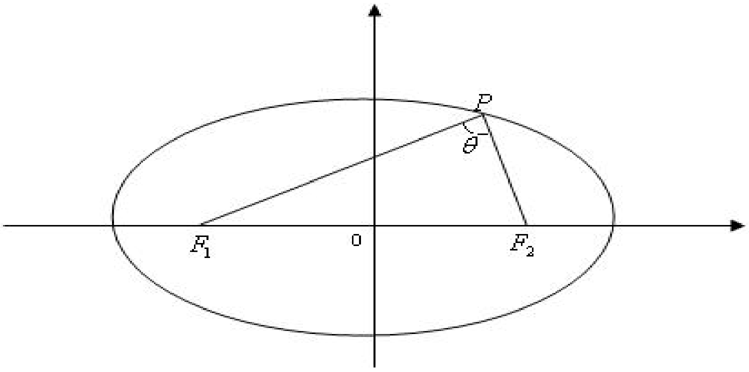
【解析】由二级结论得 $4\sqrt{3}$

5. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A、B 两点，则 $|AB| =$____。

【解析】$\frac{16}{3}$

专题五　焦点三角形

椭圆上任意一点P与两焦点F_1、F_2构成的三角形：ΔPF_1F_2



题型一 焦点三角形周长及顶角的范围

①焦点三角形周长为定值：$2(a+c)$。

② $\angle F_1PF_2=\theta$, 当点P靠近短轴端点时θ增大，当点P靠近长轴端点时θ减小；与短轴端点重合时θ最大。

注：椭圆中端点三角形(长轴两端点与椭圆上一点构成)当P在短轴端点时顶角最大。

1. 设A、B是椭圆C $\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{m}=1$长轴的两个端点，若$C$上存在点$M$满足$\angle AMB=120°$，则$m$的取值范围是　(　　　)

A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$　*B.* $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$　*C.* $(0,1]\cup[4,+\infty)$　*D.* $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$

【解析】当$0<m<3$时，椭圆的焦点在x轴上，

要使C上存在点M满足$\angle AMB=120^\circ$，则需$\frac{a}{b}\ge\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，即$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}}\ge\sqrt{3}$，得

$0<m\le 1$；

当$m>3$时，椭圆的焦点在y轴上，

要使C上存在点M满足$\angle AMB=120^\circ$，则$\frac{a}{b}\ge\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，即$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}\ge\sqrt{3}$，得$m\ge 9$。

故m的取值范围为$(0,1]\cup[9,+\infty)$, 选A。

题型二 焦点三角形面积

焦点三角形面积：$S=\frac{1}{2}\times 2c\times |y|=c\times |y|=b^2\tan\frac{\theta}{2}$（求坐标范围或到坐标轴距离的范围时。）$=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta$ 求 r_1r_2 或 r_1-r_2 时。），$S_{\max}=bc$, **即 P 与短轴端点重合时面积最大。**

1. 已知 F_1，F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点，P 为椭圆 C 上一点，$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，若 ΔPF_1F_2 的面积为 9，则 b =_______。

【解析】由椭圆焦点三角形面积公式得：$\mathrm{b}^2\tan\frac{\pi}{4}=b^2=9$，$\therefore b=3$。

题型三 焦点直角三角形个数

焦点直角三角形：底角为$90°$，有四个(四个全等，P 点为通径端点。)；

顶角为$90°$，即以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆交点为点 P：$\begin{cases} b>c(\frac{\sqrt{2}}{2}>e>0),0 \\ b=c(e=\frac{\sqrt{2}}{2}),2 \\ b<c(1>e>\frac{\sqrt{2}}{2}),4 \end{cases}$。

1. F_1、F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点，在 C 上满足 $PF_1\perp PF_2$ 的点 P 的个数为_______。

【解析】$\because b=c$，P 点的个数是 2 个。

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在椭圆上，若 P,F_1,F_2 是一个直角三角形的三个顶点，则点 P 到 x 轴的距离为　(　　　)

A. $\frac{9}{5}$　　　　*B*. 3　　　　*C*. $\frac{9\sqrt{7}}{7}$　　　　*D*. $\frac{9}{4}$

【解析】$\because b>c$，所以顶角为直角的不存在；而底角为直角时，P 到 x 轴的距离为通径的一半，即：$\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$，选 D。

3. 设 F_1、F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 为椭圆上的一点，已知 P，F_1，F_2 是一个直角三角形的三个顶点，且 $|PF_1|>|PF_2|$，求 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值。

【解析】$\because b<c$，所以顶角为直角与底角为直角的均存在；

①如果底角为直角，$PF_2=\frac{4}{3}$，$PF_1=\frac{14}{3}$，$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{7}{2}$；

②如果顶角为直角，$r_1+r_2=6$，$r_1^2+r_2^2=20$，$r_1=4, r_2=2$，$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$。

题型四 双曲线中的焦点三角形

焦点直角三角形的个数：一定为八个，顶角为直角与底角为直角的各为四个。

焦点三角形面积：$S_{PF_1F_2}=b^2.\cot\frac{\theta}{2}$（$\theta$ 为焦点三角形的顶角）$=c\cdot|y|$（求坐标范围或到坐标轴距离的范围时。）$=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta$（求 r_1r_2 或 r_1+r_2 时。）。等面积思想在解题时非常重要。

1. 已知 $M(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点，F_1,F_2 是 C 的两个焦点，若 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$，则 y_0 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　*B.* $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$　*C.* $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　*D.* $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

【解析】当 $MF_1\perp MF_2$ 时，由等面积：$S=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=1=c\cdot|y|=\sqrt{3}\cdot|y|\Rightarrow|y|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，选 *A*。

2. 已知 F_1、F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$\angle F_1PF_2=60°$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$（　　）

A. 2　*B.* 4　*C.* 6　*D.* 8

【解析】由等面积得：$S=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=\sqrt{3}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow|PF_1||PF_2|=4$，选 *B*。

4. 设 P 为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{12}=1$ 上的一点, F_1,F_2 是该双曲线的两个焦点, 若 $|PF_1|:|PF_2|=3:2$ 则 ΔPF_1F_2 的面积为________

【解析】设 $\left|PF_1\right|=3t$，则 $\left|PF_2\right|=2t$，由双曲线的定义得：$t=2a=2$，$\left|PF_1\right|=6$，$\left|PF_2\right|=4$，$\left|F_1F_2\right|=2\sqrt{13}$，所以由勾股定理得 ΔPF_1F_2 为焦点直角三角形，所以 $S=b^2=12$

5. 设 F_1,F_2 分别是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点, 若点 P 在双曲线上, 且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|=$________

【解析】由向量中线定理得：$\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|=\left|2\overrightarrow{PO}\right|=2c=2\sqrt{10}$

6. 设 F_1,F_2 是双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，O 为坐标原点，点 P 在 C 上且 $|OP|=2$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为（　　）

A. $\frac{7}{2}$　　*B*. 3　　*C*. $\frac{5}{2}$　　*D*. 2

【解析】由 $PO=\frac{1}{2}F_1F_2$，得 $PF_1\perp PF_2$，选 *B*。

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的左, 右焦点分别为 F_1,F_2，P 为 C 的右支上一点, 且 $\left|PF_2\right|=\left|F_1F_2\right|$, 则 ΔPF_1F_2 的面积等于（　　）

A. 24　　*B*. 36　　*C*. 48　　*D*. 96

【解析】$\left|PF_2\right|=\left|F_1F_2\right|$=10，由双曲线定义得：$\left|PF_1\right|=16$，$\Delta PF_1F_2$ 是等腰三角形，底边上的高为 6，所以面积为 48，选 *C*。

9. 设双曲线 *C*：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$>0，$b$>0）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\sqrt{5}$，P 是 *C* 上一点，且 F_1P⊥F_2P，若△PF_1F_2的面积为 4，则 a=（　　）

A. 1　　*B*. 2　　*C*. 4　　*D*. 8

【解析】$S=b^2=4$，$a^2=1$，选 *A*。

专题六　离心率

题型一　利用焦点三角形求离心率

利用定义，求出 $e=\dfrac{2c}{2a}$

椭圆结论：设椭圆焦点三角形两底角分别为 α 、 β ， $e=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$（正弦定理）

双曲线结论：利用焦点三角形两底角 α,β 来表示： $e=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\left|\sin\alpha-\sin\beta\right|}$

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 ΔABC 顶点 $A(-4,0)$ 和 $C(4,0)$ ，顶点 B 在椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上，则 $\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}=$ ________。

【解析】由二级结论得： $\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\dfrac{1}{e}=\dfrac{5}{4}$ 。

2. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ， P 是 C 上的点， $PF_2\perp F_1F_2$ ， $\angle PF_1F_2=30^\circ$ ，则 C 的离心率为　(　　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　　*B.* $\dfrac{1}{3}$　　　*C.* $\dfrac{1}{2}$　　　*D.* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】设 $\left|PF_2\right|=t$ ， $\left|PF_1\right|=2t$ ，则 $\left|F_1F_2\right|=\sqrt{3}t$ ，即 $2a=3t$ ， $2c=\sqrt{3}t$ ， $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ，

由二级结论得： $e=\dfrac{\sin\left(90^\circ+30^\circ\right)}{\sin 90^\circ+\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ，选 D。

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$, $b>0$）的左、右焦点分别是 F_1,F_2 ，过 F_1 作倾斜角为 30° 的直线交双曲线右支于 M 点，若 MF_2 垂直于 x 轴，则双曲线的离心率为　(　　　)

A. $\sqrt{6}$　　　*B.* $\sqrt{3}$　　　*C.* $\sqrt{2}$　　　*D.* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】设 $\left|PF_2\right|=t$ ， $\left|PF_1\right|=2t$ ，则 $\left|F_1F_2\right|=\sqrt{3}t$ ，即 $2a=t$ ， $2c=\sqrt{3}t$ ， $e=\dfrac{2c}{2a}=\sqrt{3}$ ，

由二级结论得： $e=\dfrac{\sin\left(90^\circ+30^\circ\right)}{\sin 90^\circ-\sin 30^\circ}=\sqrt{3}$ ，选 B。

4. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1, F_2，过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P，若 ΔF_1PF_2 为等腰直角三角形，则椭圆的离心率是 （　　）

$A.\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　$B.\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　　　$C.\ 2-\sqrt{2}$　　　$D.\ \sqrt{2}-1$

【解析】$|PF_2| = 2c$，$|PF_1| = 2\sqrt{2}c$，则 $|F_1F_2| = 2c$，即 $2a = 2\sqrt{2}c + 2c$，$e = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{2c}{2\sqrt{2}c+2c} = \sqrt{2}-1$，选 D。

由二级结论得：$e = \dfrac{\sin(90°+45°)}{\sin 90° + \sin 45°} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$，选 D。

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $E: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点，点 M 在 E 上，MF_1 与 x 轴垂直，$\sin\angle MF_2F_1 = \dfrac{1}{3}$，则 E 的离心率为 （　　）

$A.\ \sqrt{2}$　　　$B.\ \dfrac{3}{2}$　　　$C.\ \sqrt{3}$　　　$D.\ 2$

【解析】设 $MF_1 = 1$，则 $MF_2 = 3$，$F_1F_2 = 2C = 2\sqrt{2}$，$2a = MF_2 - MF_1 = 2$，$e = \sqrt{2}$，

由二级结论得：$e = \dfrac{\sin(90° + \angle MF_2F_1)}{\sin 90° - \sin\angle MF_2F_1} = \dfrac{\cos\angle MF_2F_1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}$，选 A。

6. 已知 F_1，F_2 是椭圆 C 的两个焦点，P 是 C 上的一点，若 $PF_1 \perp PF_2$，且 $\angle PF_2F_1 = 60°$，则 C 的离心率为 （　　）

$A.\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　$B.\ 2-\sqrt{3}$　　　$C.\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　　$D.\ \sqrt{3}-1$

【解析】设 $PF_2 = 1$，则 $PF_1 = \sqrt{3}, F_1F_2 = 2$，$e = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$，选 D。

由二级结论得：$e = \dfrac{\sin(90°)}{\sin 60° + \sin 30°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = \sqrt{3}-1$，选 D。

7. 已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，双曲线 $N:\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$，若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，则椭圆 M 的离心率为_______；双曲线 N 的离心率为_______。

【解析】设其中一个交点为 P，则 ΔPF_1F_2 为焦点直角三角形，设 $|PF_1|=1$，则有

$|PF_2|=\sqrt{3},|F_1F_2|=2$，椭圆的离心率为 $e_1=\sqrt{3}-1$，双曲线渐近线的倾斜角为 $60°$，双曲线的离心率为 2。

8. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点，以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2，若边 MF_1 的中点在双曲线上，则双曲线的离心率为　（　　　）

A. $4+2\sqrt{3}$　　　*B.* $\sqrt{3}-1$　　　*C.* $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　　*D.* $\sqrt{3}+1$

【解析】设中点为 P(右)，$PF_2=1$，$PF_1=\sqrt{3}$，$F_1F_2=2c=2$，$2a=\sqrt{3}-1$，

$e=\frac{2c}{2a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，选 *D*。

由二级结论得：$e=\frac{\sin(90°)}{\sin 60°-\sin 30°}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\sqrt{3}+1$，选 *D*。

9. 设 F_1,F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 的左、右焦点，若双曲线上存在点 A，使 $\angle F_1AF_2=90^\circ$ 且 $|AF_1|=3|AF_2|$，则双曲线的离心率为　（　　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　*B.* $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　　*C.* $\frac{\sqrt{15}}{2}$　　　*D.* $\sqrt{5}$

【解析】设 $AF_2=1$，则 $AF_1=3$，$F_1F_2=2c=\sqrt{10}$，$2a=2$，$e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，选 *B*。

10. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$\tan B=\frac{3}{4}$. 若以 A,B 为焦点的椭圆经过点 C，则该椭圆的离心率 $e=$________。

【解析】设 $AC=3t$，则 $BC=5t$， $AB=2c=4t$， $2a=8t$， $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{4t}{8t}=\dfrac{1}{2}$。

由二级结论得：$e=\dfrac{\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{2}$。

11. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，若矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上，AB,CD 的中点为 E 的两个焦点，且 $2|AB|=3|BC|$，则 E 的离心率是________。

【解析】取一个焦点三角形 AF_1F_2，设 $AB=6t$，则 $BC=4t$，$\therefore$ $AF_1=3t$，$F_1F_2=4t=2c$，$AF_2=5t$， $2a=2t$， $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{4t}{2t}=2$。

12. 设 ΔABC 是等腰三角形，$\angle ABC=120^\circ$，则以 A,B 为焦点且过点 C 的双曲线的离心率为（　　）

A. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $1+\sqrt{3}$

【解析】$AB=BC=2c$，$\therefore$ $AC=2\sqrt{3}c$，$2a=2\sqrt{3}c-2c$，$e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{2c}{2\sqrt{3}c-2c}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，选 B

13. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=BC$， $\cos B=-\dfrac{7}{18}$，若以 A,B 为焦点的椭圆经过点 C，则该椭圆的离心率 $e=$ ______.

【解析】 $AB=BC=2c$，由余弦定理得： $AC^2=4c^2+4c^2+\dfrac{28}{9}c^2=\dfrac{100}{9}c^2$，$\therefore$ $AC=\dfrac{10}{3}c$， $2a=\dfrac{10}{3}c+2c=\dfrac{16}{3}c$， $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{2c}{\frac{16}{3}c}=\dfrac{3}{8}$。

14. 设圆锥曲线 C 的两个焦点分别为 F_1,F_2，若曲线 C 上存在点 P 满足 $|PF_1|:|F_1F_2|:|PF_2|$=4:3:2, 则曲线 C 的离心率等于　（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$或 2　　C. $\dfrac{1}{2}$或 2　　D. $\dfrac{2}{3}$或$\dfrac{3}{2}$

【解析】设 $PF_1=4t$， $F_1F_2=3t$， $PF_2=2t$，

当曲线为椭圆时， $2a=6t$， $2c=3t$， $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{1}{2}$；

当曲线为双曲线时，$2a=2t$，$2c=3t$，$e=\frac{2c}{2a}=\frac{3}{2}$，选 A。

15. 设 F_1,F_2 是双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点，P 是 C 上一点，若 $|PF|_1+|PF_2|=6a,$ 且 ΔPF_1F_2 的最小内角为 30°，则 C 的离心率为________。

【解析】设 P 在双曲线右支上，由双曲线定义得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，$\therefore$ $|PF_1|=4a$，$|PF_2|=2a$，$\because$ $2a<2c$，且 $2a<4a$，$\therefore$ $\angle PF_1F_2$ 最小，$\angle PF_1F_2=30°$，由余弦定理：$(2a)^2=(4a)^2+(2c)^2-2\times(4a)\times(2c)\cos 30°$，$4a^2=16a^2+4c^2-\sqrt{3}\cdot 4a\cdot 2c$，$e=\sqrt{3}$。

16. 设 F_1，F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 P 使得 $|PF_1|+|PF_2|=3b,|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{9}{4}ab,$ 则该双曲线的离心率为 （　　）

A. $\frac{4}{3}$　　*B.* $\frac{5}{3}$　　*C.* $\frac{9}{4}$　　*D.* 3

【解析】设 P 在双曲线右支上，由双曲线定义得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，$\therefore$ $|PF_1|=\frac{3b+2a}{2}$，$|PF_2|=\frac{3b-2a}{2}$，$\therefore$ $\frac{9b^2-4a^2}{4}=\frac{9}{4}ab$，$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{b}{a}=-\frac{1}{3}$（舍去），$\therefore e=\frac{5}{3}$，选 B。

17. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1(a$ 为定值，且 $a>\sqrt{5})$ 的左焦点为 F，直线 $x=m$ 与椭圆相交于点 A、B，ΔFAB 的周长的最大值是 12，则该椭圆的离心率是________。

【解析】设右焦点为 F_2，$\because$ 由椭圆定义得：$AF+AF_2+BF+BF_2=4a$，

由 $AF_2+BF_2\geq AB$，$\therefore$ ΔFAB 的周长的最大值是 $4a=12$，$\therefore a=3$，$c=2$，$e=\frac{2}{3}$。

18. 设 F 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点，若 C 上存在点 P，使线段 PF 的中点恰为其虚轴的一个端点，则 C 的离心率为_______。

【解析】法一：设 F 是双曲线的左焦点，可得 $P(c,2b)$，代入得 $e=\sqrt{5}$

法二：F 是双曲线左焦点，F_2 是双曲线右焦点，则 $PF_2\perp F_1F_2$，$\therefore \frac{b^2}{a}=2b$，$b=2a$，$e=\sqrt{5}$

题型二 寻找 a、b、c 的关系求离心率

如果建立 a,b 或 b,c 或 a,b,c 的关系，一般情况要通过平方消去 b 化简为 a,c 关系求离心率

19. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A,B 两点，若 $\overline{F_1A}=\overline{AB}$，$\overline{F_1B}\cdot\overline{F_2B}=0$，则 C 的离心率为__________。

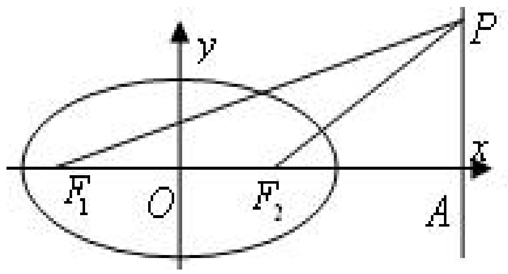
【解析】$\angle BOF_2=\angle AOF_1=\angle BOA=\frac{\pi}{3}$，$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，设 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，则 $c=2$，$e=2$。

20. (2019 年高考题天津卷) 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B，且 $|AB|=4|OF|$（O 为原点），则双曲线的离心率为 （　　）

A. $\sqrt{2}$　　　B. $\sqrt{3}$　　　C. 2　　　D. $\sqrt{5}$

【解析】将 $x=-1$ 代入渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$，得 $\frac{2b}{a}=4$，令 $a=1$，则 $b=2$，$c=\sqrt{5}$，选 D。

21. 设 F_1,F_2 是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左,右焦点，P 为直线 $x=\frac{3a}{2}$ 上一点，ΔF_2PF_1 是底角为 30° 的等腰三角形，则 E 的离心率为 （　　）



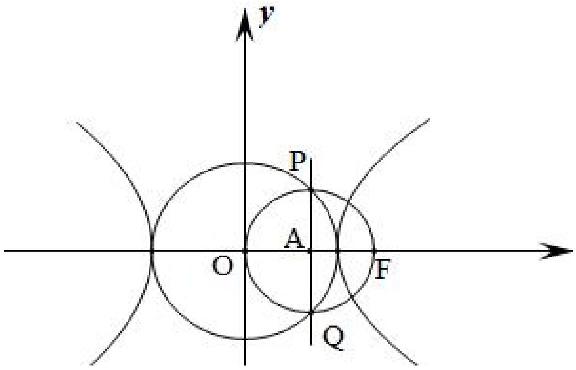
A. $\frac{1}{2}$　　　B. $\frac{2}{3}$　　　C. $\frac{3}{4}$　　　D. $\frac{4}{5}$

【解析】$|PF_2|=|F_1F_2|=2c=2|F_2A|=2\left(\frac{3a}{2}-c\right)$，得 $e=\frac{3}{4}$，选 C。

22. 设 F 为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点，O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P、Q 两点，若 $|PQ|=|QF||$，则 C 离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　*B*. $\sqrt{3}$　　*C*. 2　　*D*. $\sqrt{5}$

【解析】PQ、OF 是互相垂直的直径，$OP=a=\sqrt{2}\times\frac{c}{2}$，$e=\sqrt{2}$，选 *A*。



23. 已知O为坐标原点，F是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点，$A,B$分别为$C$的左、右顶点，$P$为$C$上一点，且$PF\perp x$轴，过点$A$的直线$l$与线段$PF$交于点$M$，与$y$轴交于点$E$，若直线$BM$经过$OE$的中点，则$C$的离心率为　(　　　)

A. $\frac{1}{3}$　　*B*. $\frac{1}{2}$　　*C*. $\frac{2}{3}$　　*D*. $\frac{3}{4}$

【解析】由线段成比例得：$\frac{MF}{OE}=\frac{a-c}{a}$，$\frac{\frac{1}{2}OE}{MF}=\frac{a}{a+c}$，得$e=\frac{1}{3}$，选 *A*。

24. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点为$A$，以$A$为圆心，$b$为半径作圆$A$，圆$A$与双曲线$C$的一条渐近线交于$M$、$N$两点，若$\angle MAN=60°$，则$C$的离心率为_____。

【解析】可得ΔMAN为等边三角形，A到渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}b$，得$a=\sqrt{3}b$，$\therefore e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

秒杀方法：由$\frac{a}{c}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$可得(利用焦点到渐近线的距离为$b$)。

25. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的左、右顶点分别为$A_1,A_2$，且以线段$A_1A_2$为直径的圆与直线$bx-ay+2ab=0$相切，则$C$的离心率为　(　　　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　*B*. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　*C*. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　*D*. $\frac{1}{3}$

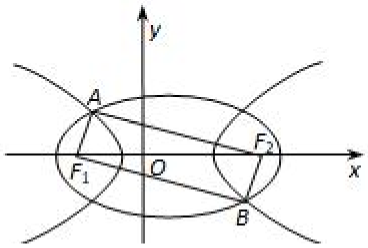
【解析】因为圆与直线相切，即圆心到直线距离等于 a 得：$\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$，$a=\sqrt{3}b$，

$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，选 A。

26. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线相交于 M,N 两点，以 MN 为直径的圆恰好过双曲线的右顶点，则双曲线的离心率等于______。

【解析】设右顶点为 A_2，左焦点为 F_1，ΔMF_1A_2 为等腰直角三角形，可得 $\dfrac{b^2}{a}=a+c$，即 $c^2-ac-2a^2=0$，得 $e^2-e-2=0$，$e=2$，$e=-1$（舍去）。

27. 如图，F_1,F_2 是椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点，A,B 分别是 C_1,C_2 在第二、四象限的公共点，若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的离心率为 （　　）



A. $\sqrt{2}$　　　　*B*. $\sqrt{3}$　　　　*C*. $\dfrac{3}{2}$　　　　*D*. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】在双曲线中，可得 $c=\sqrt{3}$，在椭圆中，利用焦点三角形面积公式得

$S_{\Delta AF_1F_2}={b_1}^2\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}=1$，在双曲线中，$S_{\Delta AF_1F_2}=\dfrac{{b_2}^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}={b_2}^2=1$，$\therefore b_2=1$，　$a_2=\sqrt{2}$，

$\therefore e=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，选 D。

28. 已知 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，A 为 C 的右顶点，B 为 C 上的点，且 BF 垂直于 x 轴. 若 AB 的斜率为 3，则 C 的离心率为_______。

【解析】$\dfrac{\frac{b^2}{a}}{c-a}=3$，得 $e=2$。

29. 在平面直角坐标系 $x0y$ 中，若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5}=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$，则该双曲线的离心率是________。

【解析】$\dfrac{3}{2}$。

题型三 黄金椭圆

a,b,c 成等比数列，即 $b^2=ac \Leftrightarrow \angle F_1B_2A_2=90^\circ$，椭圆：$e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，叫优美椭圆；

类比：双曲线：$e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

题型四 求离心率的范围

建立不等式，求出范围

30. 若 $a>1$，则双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是（　　）

A.（$\sqrt{2}$,+∞）　　*B.*（$\sqrt{2}$,2）　　*C.*（1,$\sqrt{2}$）　　*D.*（1,2）

【解析】$e=\sqrt{\dfrac{a^2+1}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}}<\sqrt{2}$，选 *C*。

31. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 在双曲线的右支上，且 $|PF_1|=4|PF_2|$，则此双曲线的离心率 e 的最大值为（　　）

A. $\dfrac{4}{3}$　　*B.* $\dfrac{5}{3}$　　*C.* 2　　*D.* $\dfrac{7}{3}$

【解析】由 $|PF_1|=4|PF_2|$ 得 $2a+|PF_2|=4|PF_2|$，即 $|PF_2|=\dfrac{2}{3}a\geq c-a$，$1<e\leq\dfrac{5}{3}$。

专题七　双曲线的渐近线

题型一 由双曲线的方程求渐近线

①已知双曲线方程求渐近线方程： $mx^2-ny^2=\lambda \Rightarrow mx^2-ny^2=0$

②若焦点在 x 轴上，渐近线为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$**；若焦点在 y 轴上，渐近线为** $y=\pm\dfrac{a}{b}x$

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 经过点（3, 4），则该双曲线的渐近线方程是________。

【解析】代入得 $b^2=2$，渐近线方程是：$y=\pm\sqrt{2}x$。

2. 双曲线的对称轴为坐标轴，一条渐近线为 $2x-y=0$，则双曲线的离心率为 （　　）

A. 5 或 $\dfrac{5}{4}$　　*B.* $\sqrt{5}$ 或 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　*C.* $\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　*D.* 5 或 $\dfrac{5}{3}$

【解析】焦点在 x 轴上，则 $\dfrac{b}{a}=2$，$e=\sqrt{5}$；焦点在 y 轴上，则 $\dfrac{a}{b}=2$，$e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；选 *B*。

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　*B.* $y=\pm\sqrt{3}x$　　*C.* $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　*D.* $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

【解析】秒杀方法：设 $a=1,c=\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{2}$，选 *A*。

4. 已知椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$C_1$ 与 C_2 的离心率之积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 C_2 的渐近线方程为 （　　）

A. $x\pm\sqrt{2}y=0$　　*B.* $\sqrt{2}x\pm y=0$　　*C.* $x\pm 2y=0$　　*D.* $2x\pm y=0$

【解析】$\because \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\times\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，选 *A*。

题型二 有共同渐近线双曲线方程的设法

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$

1. 求与双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$有公共的渐近线，且经过点$A\left(-3,2\sqrt{3}\right)$的双曲线的方程。

【解析】设双曲线方程为：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\lambda$，代入点$A$得$\lambda=\frac{1}{4}$，双曲线方程为：$\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$。

2. 设双曲线C经过点$(2,2)$，且与$\frac{y^2}{4}-x^2=1$具有相同渐近线，则C的方程为______；渐近线方程为_______。

【解析】设双曲线方程为：$\frac{y^2}{4}-x^2=\lambda$，代入点$(2,2)$得$\lambda=-3$，双曲线的方程为：$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$，渐近线方程为$y=\pm 2x$。

题型三 已知渐近线方程设双曲线方程

$ax \pm by=0 \Rightarrow (ax)^2-(by)^2=\lambda$

1. 已知双曲线过点$\left(4,\sqrt{3}\right)$，且渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$，则该双曲线的标准方程为________。

【解析】设双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=\lambda$，将点$\left(4,\sqrt{3}\right)$代入得$\lambda=1$，所以双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$。

2. 若双曲线渐近线方程为$y=\pm 3x$，它的一个焦点是$(\sqrt{10},0)$，则双曲线的方程是______。

【解析】设双曲线方程为：$9x^2-y^2=\lambda$，因为焦点在x轴上，化简为$\frac{x^2}{\frac{\lambda}{9}}-\frac{y^2}{\lambda}=1$，$\frac{\lambda}{9}+\lambda=10$得$\lambda=9$，双曲线方程为：$x^2-\frac{y^2}{9}=1$。

3. 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点和点 $(0,b)$ 的直线为 l，若 C 的一条渐近线与 l 平行，另一条渐近线与 l 垂直，则双曲线 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$　　*B.* $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　*C.* $\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　*D.* $x^2-y^2=1$

【解析】渐近线垂直可知为等轴双曲线，设方程为：$x^2-y^2=a^2$，可知 $b=1$，选 *D*。

题型四 双曲线的焦点到渐近线的距离

双曲线的焦点到渐近线的距离等于虚半轴长 (b)

二级结论：焦点到渐近线的距离与顶点到渐近线的距离之比等于双曲线的离心率

1. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径是（　　）

A. $\sqrt{ab}$　　*B.* $\sqrt{a^2+b^2}$　　*C.* a　　*D.* b

【解析】以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径等于右焦点到渐近线的距离 b，选 *D*。

2. 双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的渐近线与圆 $(x-3)^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切，则 r =（　　）

A. $\sqrt{3}$　　*B.* 2　　*C.* 3　　*D.* 6

【解析】因为圆心恰为双曲线的右焦点，所以 r=*b*=$\sqrt{3}$，选 *A*。

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线均和圆 $C:x^2+y^2-6x+5=0$ 相切，且双曲线的右焦点为圆 C 的圆心，则该双曲线的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　*B.* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　　*C.* $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　*D.* $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

【解析】c=3，r=b=2，$\therefore a=\sqrt{5}$，选 *A*。

4. 已知双曲线的顶点到渐近线的距离为 2，焦点到渐近线的距离为 6，则该双曲线的离心率

为________。

【解析】 由相似成比例可得：$\frac{c}{a}=\frac{6}{2}=3$。或由上面的二级结论直接得到答案。

5. 已知F是双曲线$C: x^2-my^2=3m(m>0)$的一个焦点，则点F到C的一条渐近线的距离为 （　　）

A. $\sqrt{3}$　　　　*B*. 3　　　　*C*. $\sqrt{3}m$　　　　*D*. $3m$

【解析】由二级结论得$b=\sqrt{3}$，选*A*。

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点与抛物线$y^2=12x$的焦点重合，则该双曲线的焦点到其渐近线的距离等于 （　　）

A. $\sqrt{5}$　　　　*B*. $4\sqrt{2}$　　　　*C*. 3　　　　*D*. 5

【解析】抛物线与双曲线的焦点为$(3,0)$，则 $b=\sqrt{5}$，所以双曲线焦点到其渐近线距离等于$\sqrt{5}$，选*A*。

7. 在平面直角坐标系xOy中，若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点$F(c,0)$到一条渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3}c}{2}$，则其离心率的值是______。

【解析】$\because \frac{\sqrt{3}c}{2}=b$，设$c=2,b=\sqrt{3},a=1$，所以离心率为2。

8. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的离心率为2，过右焦点且垂直于$x$轴的直线与双曲线交于$A,B$两点，设$A,B$到双曲线同一条渐近线的距离分别为$d_1$和$d_2$，且$d_1+d_2=6$，则双曲线的方程为 （　　）

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　　　*B*. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　　　　*C*. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　　　　*D*. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

【解析】秒杀方法：由梯形中位线知, 焦点到此渐近线的距离为3，即$b=3$，选*C*。

9. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$，O为坐标原点，F为C的右焦点, 过F的直线与C的两条

渐近线的交点分别为M,N，若ΔOMN为直角三角形，则$\left|MN\right|=$　（　　　）

$A.\ \dfrac{3}{2}$　　　　　$B.\ 3$　　　　　$C.\ 2\sqrt{3}$　　　　　$D.\ 4$

【解析】渐近线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，$\because\Delta OMN$为直角三角形，

假设$\angle ONM=\dfrac{\pi}{2}$，$ON=\sqrt{3}$，

$\therefore\angle MON=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore\left|MN\right|=3$，选$B$。

10. 设F_1，F_2是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点，$O$是坐标原点，过$F_2$作$C$的一条渐近线的垂线，垂足为$P$，若$\left|PF_1\right|=\sqrt{6}\left|OP\right|$，则$C$的离心率为　（　　　）

$A.\ \sqrt{5}$　　　　　$B.\ 2$　　　　　$C.\ \sqrt{3}$　　　　　$D.\ \sqrt{2}$

【解析】$\because|PF_2|=b$，$|PO|=a$，又因为$|PF_1|=\sqrt{6}\,|OP|$，所以$|\overrightarrow{PF_1}|=\sqrt{6}a$，

在$Rt\Delta POF_2$中，$\cos\theta=\dfrac{|PF_2|}{|OF_2|}=\dfrac{b}{c}$，

$\because$在ΔPF_1F_2中，$\cos\theta=\dfrac{|PF_2|^2+|F_1F_2|^2-|PF_1|^2}{2\cdot|PF_2|\cdot|F_1F_2|}=\dfrac{b}{c}$，

$\therefore\dfrac{b^2+4c^2-(\sqrt{6}a)^2}{2b\cdot 2c}=\dfrac{b}{c}\Rightarrow b^2+4c^2-6a^2=4b^2\Rightarrow 4c^2-6a^2=3c^2-3a^2$

$\Rightarrow c^2=3a^2\Rightarrow e=\sqrt{3}$。

11. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$，则$C$的右焦点的坐标为_________；$C$的焦点到其渐近线的距离是______。

【解析】$(3,0)$，$\sqrt{3}$。

专题八　直线与圆锥曲线

答题步骤:

步骤 1：设直线方程：注意设直线的技巧。

①当斜率不存在的直线不满足，斜率为零的直线满足时，一般设为 $y=kx+b$；

②当斜率为零的直线不满足，斜率不存在的直线满足时，一般设为 $x=my+n$；

③两类直线均满足或均不满足时，两种设法均可，但两类直线均满足时，注意要对取不到的直线补充验证。)。

步骤 2：直线与曲线联立，整理成关于 x(或 y)的一元二次方程。

步骤 3：写出根与系数的关系（如果求范围或直线与曲线不是恒有公共点，则写出 $\Delta>0(\Delta\geq 0)$）。

步骤 4：转化已知条件，转化为两根的关系。

步骤 5：把根与系数的关系代入转化的条件中。

※注：若题目中不涉及根与系数，则步骤 4\步骤 5 可省略。

弦长公式：弦长：直线与曲线相交中两交点的距离。

弦长公式：直线与曲线联立，若消 y，转化为关于 x 一元二次方程，$ax^2+bx+c=0,$ 则弦长=$\dfrac{\sqrt{1+k^2}\sqrt{\Delta}}{|a|}$；若消 x，则转化为关于 y 一元二次方程: $ay^2+by+c=0,$ 弦长=$\dfrac{\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}\sqrt{\Delta}}{|a|}$

题型一　直线与椭圆的位置关系

直线 $l:Ax+By+C=0$，**椭圆** $C:mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$；

判定方法：Δ 法：

直线与椭圆方程联立： $\begin{cases}Ax+By+c=0\\mx^2+ny^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta>0,\text{相交}\\\Delta=0,\text{相切}\\\Delta<0,\text{相离}\end{cases}$。

1. 已知中心在坐标原点 0 的椭圆 C 经过点 A（2，3），且点 F（2，0）为其右焦点。

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）是否存在平行于 0A 的直线 l，使得直线 l 与椭圆 C 有公共点，且直线 0A 与 l 的距离等于 4？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由。

【解析】(1)c=2，设椭圆方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-4}=1$，代入点 A 得椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$。

法二：（最佳方法）左焦点为(-2,0)，则 A 到两焦点距离分别为：3、5；所以 2a=8，a=4，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$。

(2) 步骤 1：设直线：假设存在符合题意的直线 l，其方程为 $y=\frac{3}{2}x+t$；

步骤 2：直线方程与椭圆方程联立：由 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+t \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$，得 $3x^2+3tx+t^2-12=0$；

步骤 3：判别式：直线 l 与椭圆有公共点，有 $\Delta=(3t)^2-4\times3(t^2-12)\geq0$，解得 $-4\sqrt{3}\leq t\leq4\sqrt{3}$

步骤 4：利用已知条件：由直线 0A 与 l 的距离 4 得：$\frac{|t|}{\sqrt{\frac{9}{4}+1}}=4$，$t=\pm2\sqrt{13}$，

由于 $\pm2\sqrt{13}\notin[-4\sqrt{3},4\sqrt{3}]$，所以符合题意的直线 l 不存在。

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，经过点 $\left(0,\sqrt{2}\right)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 有两个不同的交点 P 和 Q。

（1）求 k 的取值范围；

（2）设椭圆与 x 轴正半轴、y 轴正半轴的交点分别为 A、B，是否存在常数 k，使得向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线？如果存在，求 k 的值；如果不存在，请说明理由。

【解析】（1））步骤 1：设直线：直线 $l: y=kx+\sqrt{2}$；

步骤 2：直线方程与椭圆方程联立：由 $\begin{cases} y=kx+\sqrt{2} \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $\left(\frac{1}{2}+k^2\right)x^2+2\sqrt{2}kx+1=0$；

步骤 3：判别式：由$\Delta>0$得$k\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$。

（2）步骤 4：：转化已知条件：$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)$，

$x_1+x_2=-\dfrac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2},y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2\sqrt{2}$，$\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{2},1\right)$；

步骤 5：把根与系数的关系代入转化的条件中：

利用共线可得$k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因为$k\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，故不存在。

3. 设F_1,F_2分别是椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点，过$F_1$斜率为 1 的直线$l$与$E$相交于$A,B$两点，且$\left|AF_2\right|$，$\left|AB\right|$，$\left|BF_2\right|$成等差数列。

（1）求E的离心率；

（2）设点$P\left(0,-1\right)$满足$\left|PA\right|=\left|PB\right|$，求$E$的方程　　。

【解析】（1）$\left|AF_2\right|+\left|BF_2\right|+\left|AB\right|=4a$，$2\left|AB\right|=\left|AF_2\right|+\left|BF_2\right|$，$\left|AB\right|=\dfrac{4}{3}a$；

步骤 1：设直线：$l:y=x+c$；

步骤 2：直线方程与椭圆方程联立：由$\begin{cases}y=x+c\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，化简后得$(a^2+b^2)x^2+2a^2cx+a^2(c^2-b^2)=0$；

步骤 3：韦达定理：$x_1+x_2=\dfrac{-2a^2c}{a^2+b^2},x_1x_2=\dfrac{a^2(c^2-b^2)}{a^2+b^2}$；

步骤 4：代公式：$\because$直线AB斜率 1，$\left|AB\right|=\sqrt{2}\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$，得$\dfrac{4}{3}a=\dfrac{4ab^2}{a^2+b^2}$

$a^2=2b^2$，$\therefore E$的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）利用AB的中垂线过P点，得椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$。

题型二 直线与双曲线的位置关系

①**第一角度**: $\begin{cases}相切:联立\Delta=0\\相交:\Delta>0或平行于渐近线;\\相离:\Delta<0或与渐近线重合\end{cases}$

②**第二角度:(从交点个数)** $\begin{cases}无交点:与渐近线重合或\Delta<0\\一个交点:\Delta=0或平行于渐近线;\\二个交点:\Delta>0\end{cases}$

如交到同一支上条件的限定:

右支: $\begin{cases}二次项系数不为0\\\Delta>0\\x_1+x_2>0\\x_1.x_2>0\end{cases}$ **;左支:** $\begin{cases}二次项系数不为0\\\Delta>0\\x_1+x_2<0\\x_1.x_2>0\end{cases}$,

或者直接利用与渐近线的关系旋转得到

1. 直线 $l: y=kx+1$ 与双曲线 C: $2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A、B。

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 是否存在实数 k,使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F?若存在,求出 k 的值;若不存在,说明理由。

【解析】 步骤 1:直线方程与双曲线方程联立: $\begin{cases}y=kx+1\\2x^2-y^2=1\end{cases}$ 得: $(k^2-2)x^2+2kx+2=0$;

步骤 2:判别式:由 $\begin{cases}k^2-2\neq0\\\Delta=16-4k^2>0\\x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2-2}>0\\x_1x_2=\dfrac{2}{k^2-2}>0\end{cases}$ 得 $-2<k<-\sqrt{2}$;

(2) 步骤 3:条件转化:以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F,等价于 $FA\perp FB$,即 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$,代入坐标得: $(k^2+1)x_1x_2+(k-c)(x_1+x_2)+c^2+1=0$;

步骤 4:把根与系数关系代入条件: $5k^2+2\sqrt{6}k-6=0$,得 $k=-\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$ 或 $k=\dfrac{6-\sqrt{6}}{5}$(舍)

直线与抛物线的位置关系

①第一角度:位置关系: $\begin{cases} 相交:\begin{cases}\Delta>0\\ 平行于对称轴\end{cases} \\ 相切:\Delta=0 \\ 相离:\Delta<0 \end{cases}$

②第二角度:交点个数: $\begin{cases} 一个交点:\begin{cases}\Delta=0,相切\\ 平行于对称轴\end{cases} \\ 二个交点:\Delta>0 \\ 无交点:\Delta<0 \end{cases}$

1. 抛物线线关于 x 轴对称，顶点在坐标原点，点 P(1,2)、$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 均在抛物线上。

（1）写出该抛物线的方程及其准线方程；

（2）当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时，求 y_1+y_2 的值及直线 AB 的斜率。

【解析】(1)设抛物线方程 $y^2=ax$，代入点 P 得抛物线的方程为：$y^2=4x$，准线为：$x=-1$；

（2）法一：步骤 1：设直线：AB：$y=kx+b$；

步骤 2：直线方程与抛物线方程联立：$\begin{cases}y=kx+b\\ y^2=4x\end{cases}$，得 $y^2-\dfrac{4}{k}y+\dfrac{4b}{k}=0$；

步骤 3：韦达定理：$y_1+y_2=\dfrac{4}{k}$，$y_1y_2=\dfrac{4b}{k}$；

步骤 4：转化已知条件：$\dfrac{y_1-2}{x_1-1}+\dfrac{y_2-2}{x_2-1}=0$，得 $y_1+y_2=-4$；

步骤 5：代入根与系为关系：$k_{AB}=-1$。

法二：抛物线特有方法（绕开直线与抛物线联立，设点的技巧。）：设 $A\left(\dfrac{y_1^{\ 2}}{4},y_1\right)$，$B\left(\dfrac{y_2^{\ 2}}{4},y_2\right)$，

$\because k_{PA}+k_{PB}=0$，则有 $\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^{\ 2}}{4}-1}+\dfrac{y_2-2}{\dfrac{y_2^{\ 2}}{4}-1}=0$，得 $y_1+y_2=-4$，$k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{\dfrac{y_2^{\ 2}}{4}-\dfrac{y_1^{\ 2}}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=-1$

专题九　圆锥曲线直角弦

直角弦定义：直线与圆锥曲线相交于 A、B 两点，若存在点 P，使得 P$A\perp$PB，则弦 AB 叫做相对于点 P 的直角弦。

直角弦有三种考法：

①P$A\perp$P$B\Leftrightarrow$ 以 AB 为直径的圆过点 P$\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$；

②$\angle A$PB 是钝角$\Leftrightarrow$点 P 在以 AB 为直径的圆内$\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}<0$；

③$\angle A$PB 是锐角$\Leftrightarrow$点 P 在以 AB 为直径的圆外$\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}>0$；

椭圆中的直角弦。

方法一答题规范模板：

步骤 1：设直线 AB 的方程；

步骤 2：直线与曲线联立，整理成关于 x(或 y)的一元二次方程；

步骤 3：写出根与系数的关系；

步骤 4：利用 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，把根与系数的关系代入。

方法二答题规范模板：

步骤 1：设直线 PA 的方程；

步骤 2：直线与曲线联立，整理成关于 x(或 y)的一元二次方程；

步骤 3：利用根与系数的关系求出点 A 的坐标，把点 A 的坐标中的 k 换为 $-\frac{1}{k}$ 得到点 B 的坐标；

步骤 4：由两点式求出 AB 的方程，进而求出直线 AB 的特点。

题型一　相对于椭圆中心的直角弦

直线 l 与曲线 $mx^2+ny^2=1$ 交于 A,B 两点，若 $OA\perp OB$（O 为曲线中心），则称 AB 为相对于中心 O 的直角弦，由 $x_1x_2+y_1y_2=0$，得二级结论：中心 O 到直线 l 的距离为定值：

$d=\frac{1}{\sqrt{m+n}}$。

1. 在直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，F_2 也是抛物线 $C_2:y^2=4x$ 的焦点，点 M 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点，且 $\left|MF_2\right|=\dfrac{5}{3}$。

（1）求 C_1 的方程；

（2）平面上的点 N 满足 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}$，直线 $l\,//\,MN$，且与 C_1 交于 A、B 两点，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，求直线 l 的方程。

【解析】（1）$\left|MF_2\right|=\dfrac{5}{3}=x_M+1,\Rightarrow x_M=\dfrac{2}{3}$，代入抛物线得 $M\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$M$ 到 $(1,0),(-1,0)$ 距离之和为 $2a=4$，得 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$。

（2）由 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}=2\overrightarrow{MO}$，所以 $k_{MN}=k_{MO}=\sqrt{6}$，

步骤 1：设直线方程：设 $l:y=\sqrt{6}x+t$；

步骤 2：直线与曲线联立：直线 $y=\sqrt{6}x+t$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 联立：$\begin{cases}y=\sqrt{6}x+t\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，化简得：$27x^2+8\sqrt{6}tx+4\left(t^2-3\right)=0$；

步骤 3：写出根与系数的关系：设交点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，由韦达定理得：$x_1+x_2=-\dfrac{8\sqrt{6}t}{27}$，$x_1x_2=-\dfrac{4\left(t^2-3\right)}{27}$；

步骤 4：利用 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$：由 $x_1x_2+y_1y_2=0$，$y_1y_1=\left(\sqrt{6}x_1+t\right)\left(\sqrt{6}x_2+t\right)$，得 $t=\pm2\sqrt{3}$。

秒杀方法：由点到直线的距离 $\dfrac{|t|}{\sqrt{7}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}}}$，得 $t=\pm2\sqrt{3}$。

题型二 相对于其它点的直角弦

利用 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ **。**

二级结论 **：** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **上一点** $P(x_0,y_0)$**，过** P **作互相垂直的两条直线** PA,PB**，与椭圆交于** A,B **两点，则** AB **恒过定点** $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right)$**。**

秒杀方法：一般情况，直线 AB（设直线 AB 方程为：$y=kx+m$。）与椭圆方程联立，利用根与系数的关系，使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，会出现一个**固定型关系式：**

$(kx_0-y_0+m)\left(k\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0+m\right)=0$（**记住**，因运算较繁琐.），

即 $kx_0-y_0+m=0$，AB 恒过定点 (x_0,y_0)（舍去），

注意：若条件中以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ **或以** AB **为直径的圆过点 P 的形式给出，则不能舍去，答案有两个值。**或 $k\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0+m=0$，$AB$ 恒过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right)$。

1. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点A（2，1）.

（1）求C的方程：

（2）点M、N在C上，且$AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D为垂足．证明：存在定点Q，使得$|DQ|$为定值。

【解析】（1）代入点 A 得 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，另 $a^2=2b^2$，得 $a^2=6$，$b^2=3$，$\therefore C$ 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$。

（2）步骤 1：两类特殊直线均满足，两种设法均可，最后补回不能表示的直线：当斜率存在时，设直线 MN 的方程为：$y=kx+m$；

步骤 2：直线与曲线联立：直线与椭圆联立得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$；

步骤 3：写出根与系数的关系：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则有：$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，

$x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}$；

步骤4：转化关系：$\because \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，$(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，得$(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$，

$\because A\ (2,1)$ 不在直线 MN 上，$\therefore\ 2k+m-1\neq 0$，$\therefore\ 2k+3m+1=0$，MN 的方程为 $y=k(x-\dfrac{2}{3})-\dfrac{1}{3}(k\neq 1)$，$\therefore MN$ 过点 $P(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$；

当直线 MN 与 x 轴垂直时，可得 $N(x_1,-y_1)$，由 $\overline{AM}\cdot\overline{AN}=0$ 得 $(x_1-2)(x_1-2)+(y_1-1)(-y_1-1)=0$，又 $\dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，可得 $3x_1^2-8x_1+4=0$，解得 $x_1=2$（舍去），$x_1=\dfrac{2}{3}$，此时直线 MN 亦过点 $P(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$。

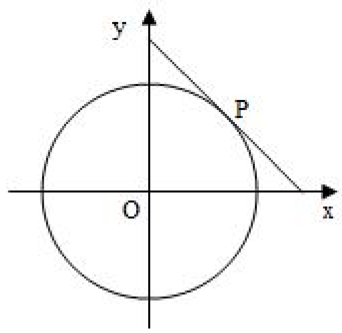
令 Q 为 AP 的中点，即 $Q(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$，若 D 与 P 不重合，则由题设知 AP 是 Rt△ADP 的斜边，$|DQ|=\dfrac{1}{2}|AP|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，若 D 与 P 重合，则 $|DQ|=\dfrac{1}{2}|AP|$，综上，存在点 $Q(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$，使得 $|DQ|$ 为定值。

秒杀方法：利用前面秒杀方法很快可以做出。

2. 圆 $x^2+y^2=4$ 的切线与 x 轴正半轴、y 轴正半轴围成一个三角形，当该三角形面积最小时，切点为 P（如图），双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 P 且离心率为 $\sqrt{3}$。

（1）求 C_1 的方程；

（2）椭圆 C_2 过点 P 且与 C_1 有相同的焦点，直线 l 过 C_2 的右焦点且与 C_2 交于 A,B 两点，若以线段 AB 为直径的圆过点 P，求 l 的方程。



【解析】(1)设 $P(x_0,y_0)$，则切线方程为：$x_0x+y_0y=4$，$S=\dfrac{8}{x_0y_0}$，${x_0}^2+{y_0}^2=4\ge 2x_0y_0$，

当且仅当 $x_0=y_0$ 时等号成立，即 $x_0=y_0=\sqrt{2}$，代入双曲线方程中，可得 $a^2=1,b^2=2$，

C_1 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$。

(2)可得椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

步骤 1：设直线方程：斜率为 0 的直线不满足，设 $l:x=ky+\sqrt{3}$ ；

步骤 2：直线与曲线联立：直线与曲线联立得：$(k^2+2)y^2+2\sqrt{3}ky-3=0$，设交点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$；

步骤 3：写出根与系数的关系：由韦达定理得：$x_1+x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}ky}{k^2+2}$，$x_1x_2=-\dfrac{3}{k^2+2}$；

步骤 4：利用 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$：代入得 $k=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}-1$ 或 $k=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+1$，$\therefore l$ 为：$x-\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}-1\right)y-\sqrt{3}=0$ 或 $x+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}-1\right)y-\sqrt{3}=0$。

秒杀方法：直线与曲线联立，利用 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，代入根与系数的关系，得一固定关系式：

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}k-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}k-3\sqrt{3}\right)=0$，即 $k=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}-1$ 或 $k=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+1$。

抛物线中的直角弦。

题型一 相对于原点的直角弦

抛物线中相对于曲线中心的直角弦：直线l交$y^2=2px(p>0)$于A（x_1,y_1），B（x_2,y_2）两点(注意设点技巧)，O为原点，若$OA\perp OB$，把AB叫做相对于O的直角弦，

得秒杀结论：

①直线 l 恒过定点（2p，0），$y_1y_2=-4p^2$，反之亦然。

推导过程：设直线AB：$x=my+n$，与抛物线联立得：$y^2-2pmy-2pn=0$，

设$A\left(\frac{y_1^{\,2}}{2p},y_1\right)$、$B\left(\frac{y_2^{\,2}}{2p},y_2\right)$，

由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，得$y_1y_2=-4p^2=-2pn$，$n=2p$，

恒过定点$(2p,0)$。

②△$A0B$ 面积的最小值为 $4p^2$

推导过程：

先证明恒过定点$(2p,0)$，

$$S=\frac{1}{2}\times2p\times|y_1-y_2|=p\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=p\sqrt{4p^2m^2+16p^2},$$

当$m=0$时，即$x=2p$时，$S_{\min}=4p^2$。

③$OM\perp AB$ M 点的轨迹为：$x^2+y^2=2px,(x\neq0)$

推导过程：先证明恒过定点$(2p,0)$，设$M(x,y)$，则有$k_{OM}\cdot k_{AB}=-1$，

即$\frac{y}{x}\times\frac{y}{x-2p}=-1$，化简即得。

④弦 AB 的中点 N 的轨迹方程为：$y^2=p(x-2p)$

推导过程：先证明恒过定点$(2p,0)$，利用点差法可得$y_{中}k=p$，

即$y_{中}\times\frac{y_{中}}{x_{中}-2p}=p$，化简即得。

1. 已知抛物线 $y^2=2x$，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆。

（1）证明：坐标原点 O 在圆 M 上；

（2）设圆 M 过点 P $(4,-2)$，求直线 l 与圆 M 的方程。

【解析】（1）设直线方程：当斜率为0时，直线与抛物线交于一点，不符合，设 $l: x=my+2$

直线与曲线联立：联立：$\begin{cases} y^2=2x \\ x=my+2 \end{cases}$，得 $y^2-2my-4=0$；

根与系数的关系：$A\left(\frac{y_1^{\ 2}}{2}, y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^{\ 2}}{2}, y_2\right)$，$y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-4$；

代入条件验证：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{y_1^{\ 2}y_2^{\ 2}}{4}+y_1y_2=0$，$\therefore \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，即 O 在圆 M 上。

（2）若圆 M 过点 P，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{y_1+2}{\frac{y_1^{\ 2}}{2}-4}\times\frac{y_2+2}{\frac{y_2^{\ 2}}{2}-4}=0$，$2m^2-m-1=0$，得 $m=-\frac{1}{2}$ 或1

则圆 $M:(x-\frac{9}{4})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{85}{16}$ 或 $M:(x-3)^2+(y-1)^2=10$。

秒杀方法：由（1）知圆过 O,P 两点，PO 的中垂线的方程为：$2x-y-5=0$，圆心为 A,B 的中点 (m^2+2,m)，

代入 $2x-y-5=0$ 得 $m=-\frac{1}{2}$ 或1。

题型二 相对于其它点的直角弦

利用 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$。

二级结论：$y^2=2px$ 上一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 作互相垂直的两条直线 PA,PB，与抛物线交于 A,B 两点，则 AB 恒过定点 $(2p+x_0,-y_0)$

秒杀方法：一般情况，直线 AB（设直线 AB 方程为：$y=kx+m$。）与抛物线方程联立，利用根与系数的关系，使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，会出现一个**固定型关系式**：$k(2p+x_0)+y_0+m=0$（记住，因运算较繁琐.），即 AB 恒过定点 $(2p+x_0,-y_0)$

专题十　圆锥曲线焦点弦

焦点弦定义：过焦点的直线与曲线相交于两点 A、B，弦 AB 叫做曲线的焦点弦。

椭圆与双曲线焦点弦中常考的二级结论。

题型一　焦点弦长公式

焦点弦长公式：$\dfrac{\frac{2b^2}{a}}{\left|1-e^2\cos^2\theta\right|}$（$\theta$ 为直线与焦点所在轴的夹角），

通径：$\dfrac{2b^2}{a}$（最短焦点弦）。

1. 已知 F 是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，P 是 C 上一点，且 PF 与 x 轴垂直，点 A 的坐标是 $(1,3)$，则 ΔAPF 的面积为　（　　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　　　*B.* $\dfrac{1}{2}$　　　　*C.* $\dfrac{2}{3}$　　　　*D.* $\dfrac{3}{2}$

【解析】$|PF|=\dfrac{b^2}{a}=3$，而 P（2，0），$S=\dfrac{1}{2}\times|2-1|\times 3=\dfrac{3}{2}$，选 D。

2. 过椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的右焦点作一条斜率为 2 的直线与椭圆交于 A,B 两点，O 为坐标原点，则 ΔAOB 的面积为________。

【法一】利用弦长公式（一般弦长公式）求出 $|AB|$，再利用 O 到直线距离求出高，可求出三角形的面积.

【法二】由焦点弦长公式得：$|AB|=\dfrac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{\frac{24}{25}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$，$d=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\times d\times|AB|=\dfrac{5}{3}$。

【法三】直线方程为：$y=2x-2$，与椭圆联立可得两个交点的坐标 $(0,-2)$，$\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{4}{3}\right)$，从图中可直观得到 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\times c\times|y_1-y_2|=\dfrac{5}{3}$。

题型二 焦点弦中的定值

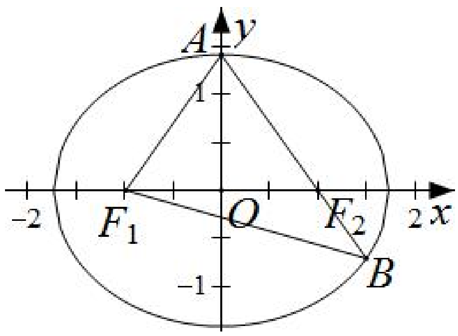
焦点弦被焦点分成两部分 m,n，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2a}{b^2}$ (定值)(取通径即可)。

1. 设 F_1,F_2 分别是椭圆 $E:x^2+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A,B 两点，若 $|AF_1|=3|BF_1|, AF_2\perp x$ 轴，则椭圆 E 的方程为________。

【解析】设 $|BF_1|=t$，则有 $\frac{1}{t}+\frac{1}{3t}=\frac{2a}{b^2}=\frac{2}{b^2}$, $t=\frac{2}{3}b^2$，$|AF_1|=2b^2=2a-\frac{b^2}{a}=2-b^2$，得 $b^2=\frac{2}{3}$。

2. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A、B 两点，若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　*B.* $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　*C.* $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　*D.* $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$



【法一】设 $|BF_2|=t$，则 $|AF_2|=2t$，$|AB|=|BF_1|=3t$,

利用椭圆定义得：$|BF_1|+|BF_2|=4t=2a$，$t=\frac{a}{2}$，则有 $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}=\frac{3}{a}=\frac{2a}{b^2}$，$2a^2=3b^2$，而 $c=1$，选 B。

【法二】由法一可知 $|AF_2|=a$，A 为椭圆的顶点,

设 $\angle F_1AO=\theta$，则 $\sin\theta=\frac{1}{a}$，

在 ΔAF_1B 中，由余弦定理得 $\cos 2\theta=\frac{1}{3}=1-2\sin^2\theta=1-\frac{2}{a^2}$，得 $a^2=3$，

选 B。

题型三 离心率与焦点弦的关系

焦点弦被焦点 F 分为两段 AF 、 BF ，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{BF}$，则有 $e|\cos\theta|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$（$\theta$ 为直线与焦点所在轴的夹角）。

※圆锥曲线中简答题中已知 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$（$A,B$ 为直线与曲线两交点。）条件时，答题模板。

步骤 1：设(或写出)直线 AB 的方程；

步骤 2：直线方程与曲线方程联立，整理成关于 x(或 y)的一元二次方程(如果 P 为 x 轴上的点，则整理成关于 y 的一元二次方程，反之整理成关于 x 的一元二次方程。)；

步骤 3：写出根与系数的关系；

步骤 4：利用 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，找 x_1,x_2（或 y_1,y_2）的关系，代入根与系数的关系中，消去 x_1,x_2（或 y_1,y_2），建立关于参数的方程。

1. 设 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点，M 是 C 上一点，且 MF_2 与 x 轴垂直，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N 。

（1）若直线 MN 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$，求 C 的离心率；

（2）若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2，且 $|MN|=5|F_1N|$，求 a,b 。

【解析】（1）$\dfrac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\dfrac{3}{4}$，得 $2b^2=3ac$，即 $2c^2+3ac-2a^2=0$，$2e^2+3e-2=0$，$e=\dfrac{1}{2}$ 或 $e=-2$（舍去）；

（2）由三角形中位线可知：$MF_2=\dfrac{b^2}{a}=4$，$N\left(-\dfrac{3}{2}c,-1\right)$，代入椭圆中得：$a=7,b=2\sqrt{7}$ 。

2. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，过点 F 的直线与椭圆 C 相交于 A,B 两点，直线 l 的倾斜角为 $60°$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$ 。

（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）如果 $|AB|=\dfrac{15}{4}$，求椭圆 C 的方程。

【解析】(1) 步骤 1：设出直线 AB 的方程：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题意知 y_1＜0，y_2＞0，直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-c)$；

步骤 2：直线与曲线方程联立：直线与曲线联立：$\begin{cases} y=\sqrt{3}(x-c), \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得

$(3a^2+b^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy-3b^4=0$，

步骤 3：韦达定理：$y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{3a^2+b^2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3b^4}{3a^2+b^2}$；

步骤 4：因为 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，所以 $-y_1=2y_2$，得 $-y_2=\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{3a^2+b^2}$，${y_2}^2=\dfrac{12b^4c^2}{\left(3a^2+b^2\right)^2}$，消去 y_2 得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$。

秒杀方法：由二级结论得：$e\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$，得 $e=\dfrac{2}{3}$。

(2) 因为 $|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}|y_2-y_1|$，由 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$ 得 $b=\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$，所以 $\dfrac{5}{4}a=\dfrac{15}{4}$，得 a=3，$b=\sqrt{5}$，

椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$。

秒杀方法：$|AB|=\dfrac{15}{4}=\dfrac{\frac{2b^2}{a}}{1-\frac{1}{4}e^2}=\dfrac{\frac{2b^2}{a}}{\frac{8}{9}}=\dfrac{9b^2}{4a}$，即 $5a=3b^2$，得 $5a^2=9b^2$，即 $a=3$，$b=\sqrt{5}$，

椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$。

3. (2019 年新课标全国卷 I19) 已知抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A、B，与 x 轴的交点为 P。

(1) 若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

(2) 若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$。

【解析】(1) 设直线 l 方程为：$y=\dfrac{3}{2}x+m$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，由抛物线焦半径公

式得：$|AF|+|BF|=x_1+x_2+\frac{3}{2}=4$，$\therefore x_1+x_2=\frac{5}{2}$，联立$\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+m\\ y^2=3x\end{cases}$得：

$9x^2+(12m-12)x+4m^2=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{12m-12}{9}=\frac{5}{2}$，解得：$m=-\frac{7}{8}$。$\therefore$直线$l$的方程为：$y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$。

（2）设直线l方程为：$x=\frac{2}{3}y+t$；联立$\begin{cases}x=\frac{2}{3}y+t\\ y^2=3x\end{cases}$得：$y^2-2y-3t=0$；

步骤3：韦达定理：$y_1+y_2=2$，$y_1y_2=-3t$；

$\because \overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，$y_1=-3y_2$，$y_2=-1$，$y_1=3$，$t=1$，则代入弦长公式得：

$|AB|=\sqrt{1+\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{\sqrt{13}}{3}\cdot\sqrt{4+12}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$。

抛物线的焦点弦中常考的二级结论

题型一 焦点弦两端点坐标定值关系

过抛物线$y^2=2px(p>0)$焦点的直线交抛物线于A、B两点，则：$y_Ay_B=-p^2$，

$x_Ax_B=\frac{p^2}{4}$。(焦点在y轴上的性质对比给出。)

引伸：M $(a,0)$ $(a>0)$在抛物线$y^2=2px(p>0)$的对称轴上，过M的直线交抛物线于两点。$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$y_1.y_2=-2pa$ (定值)。

题型二 焦点弦长

$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$（$\alpha$是直线$AB$与焦点所在轴的夹角）（小题或简答题用于验证答案。）

$=x_1+x_2+p$ (焦点在x轴正半轴上) (其它三种同理可以推导。)（简答题常用。），焦点弦中通径(垂直于对称轴的焦点弦，长为$2p$)最短。

题型三 焦点弦被焦点分成两段焦半径的关系及焦半径公式

$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{BF}$，则有：$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$（定值）。$|\cos\theta|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$，$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$，

$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\theta}$（$\theta$为直线与焦点所在轴的夹角。）

1. 设抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，直线l过F且与C交于A，B两点，若$|AF|=3|BF|$，则l的方程为（　　）

A. $y=x-1$或$y=-x+1$

B. $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$或$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

C. $y=\sqrt{3}(x-1)$或$y=-\sqrt{3}(x-1)$

D. $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$或$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

【解析】法一：由$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$，得$|AB|=\dfrac{16}{3}=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}$，得$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$k=\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$，选$C$。

秒杀方法：$|\cos\theta|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3}$或$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，选$C$。

题型四 由焦点弦围成图形的面积

面积：$S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\theta}$，**过 A、B 分别向准线作垂线，垂足分别为 M、N。**$S_{AMNB}=\dfrac{2p^2}{\sin^3\theta}$（$\theta$ **是直线** AB **与焦点所在轴的夹角。**）。

1. 设F为抛物线$C:y^2=3x$的焦点,过F且倾斜角为30°的直线交C于A,B两点,O为坐标原点,则ΔOAB的面积为（　　）

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$　　C. $\dfrac{63}{32}$　　D. $\dfrac{9}{4}$

【解析】代入公式$S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$中，得$\dfrac{9}{4}$，选$D$。

题型五 以焦点弦为直径的圆的性质

过 A、B 分别向准线作垂线，垂足分别为 M、N。以 AB 为直径的圆与准线相切，切点为 MN 中点 Q，AQ,BQ 分别是抛物线的切线，并且分别是 $\angle MAB,\angle NBA$ 的角平分线。

1. 已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 $C:y^2=4x$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点. 若 $\angle AMB=90°$，则 k =_______。

【解析】 依题意得，抛物线 C 的焦点为 $F(1,0)$，设直线 AB：$x=my+1$，与抛物线联立：

$\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$，得 $y^2-4my-4=0$，设 $A\left(\frac{y_1{}^2}{4},y_1\right)$、$B\left(\frac{y_2{}^2}{4},y_2\right)$，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，

由 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，代入根与系数的关系，得 $m=\frac{1}{2}$，即 $k=2$。

或由性质知 AB 中点的纵坐标为 1，即 $4m=2$，得 $m=\frac{1}{2}$，即 $k=2$。

秒杀方法：$\because$ 以 AB 为直径的圆与准线相切，而 M 在准线上，$\therefore M$ 是切，知 AB 中点的纵坐标为 1，由点差法得 $y_{中}\times k=p$，$\therefore k=2$。

2. 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，$|AB|=8$。

（1）求 l 的方程；

（2）求过点 A、B 且与 C 的准线相切的圆的方程。

【解析】（1）由题意得 $F(1,0)$，l 的方程为 $y=k(x-1)(k>0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由

$\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$，得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，$\Delta=16k^2+16>0$，故 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$，

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\frac{4k^2+4}{k^2}$，由题设知 $\frac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得 $k=-1$（舍去），$k=1$，因此 l 的方程为 $y=x-1$。

秒杀方法：$AB=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{4}{\sin^2\theta}=8$，得 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$k=1$。

（2）由（1）得 AB 中点坐标为 $(3,2)$，所以 AB 垂直平分线方程为 $y-2=-(x-3)$，即 $y=-x+5$

设所求圆的圆心坐标为 (x_0,y_0)，r=圆心到准线的距离=$|x_0+1|$，$r^2=\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2$+圆心到直线

AB 距离的平方，$\begin{cases} y_0 = -x_0 + 5, \\ (x_0+1)^2 = \dfrac{(y_0 - x_0 + 1)^2}{2} + 16 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = 11 \\ y_0 = -6 \end{cases}$，

因此所求圆的方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ 或 $(x-11)^2 + (y+6)^2 = 144$ 。

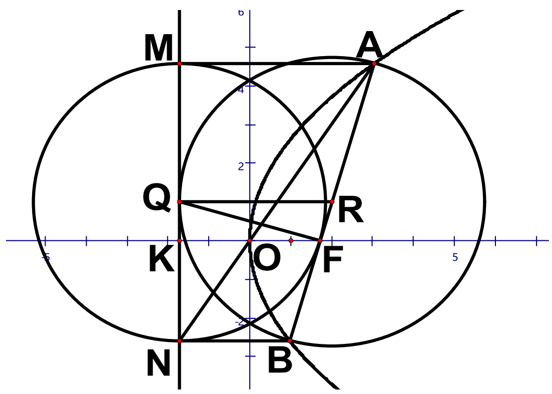
题型六 如图两圆的性质

以 MN 为直径的圆与 AB 相切，切点为焦点 F 。以焦半径为直径的圆与 y 轴相切。

1. 设抛物线 C： $y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，$|MF| = 5|$，若以 MF 为直径的圆过点 $(0,2)$，则 C 的方程为 （　　）

A. $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 8x$　　　　*B*. $y^2 = 2x$ 或 $y^2 = 8x$

C. $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 16x$　　　　*D*. $y^2 = 2x$ 或 $y^2 = 16x$



【解析】可知 M 的横坐标为 $5-\dfrac{p}{2}$，纵坐标为：$\sqrt{2p(5-\dfrac{p}{2})}$，$(0,2)$ 是切点，

即 $\sqrt{2p(5-\dfrac{p}{2})}$ =4，得 $p=2$ 或 $p=8$，选 *C*。

专题十一　圆锥曲线中点弦

圆、椭圆、双曲线的中点弦问题。

注：方程：$mx^2+ny^2=1$，

①当$m,n>0$且$m\neq n$时，表示椭圆；

②当$m,n>0$且$m=n$时，表示圆；

③当m,n异号时，表示双曲线。

点差法：

步骤 1：设直线与曲线 ：设直线$l:y=kx+t$与曲线：$mx^2+ny^2=1$交于两点A、B，AB中点为$P(x_{中},y_{中})$，则有A,B既在直线上又在曲线上，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$；

步骤 2：代入点坐标：即$\begin{cases}y_1=kx_1+t\\y_2=kx_2+t\end{cases}$；$\begin{cases}mx_1^{\ 2}+ny_1^{\ 2}=1......(1)\\mx_2^{\ 2}+ny_2^{\ 2}=1......(2)\end{cases}$；

步骤 3：作差得出结论：（1）-（2）得：$k_{AB}.\dfrac{y_{中}}{x_{中}}=-\dfrac{m}{n}=k_{AB}.k_{OP}$。

题型一 求值，利用结论求 k 或斜率乘积定值

1. 已知椭圆$G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(3,0)$，过点$F$的直线交椭圆于$A,B$两点，若$AB$的中点坐标为$(1,-1)$，则$E$的方程为　（　　　）

$A.\ \dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$　　$B.\ \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$　　$C.\ \dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=1$　　$D.\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

【解析】由结论可得：$\dfrac{-1}{1}\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，得$a^2=2b^2$，$c=3$，选$D$。

2. 已知双曲线E的中心为原点，$F\left(3,0\right)$是E的焦点，过F的直线l与E相交于A,B两点，且AB的中点为$N\left(-12,-15\right)$，则E的方程为　（　　）

$A.\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$　　$B.\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$　　$C.\ \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$　　$D.\ \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$

【解析】由结论可得：$\dfrac{-15}{-12}\times\dfrac{0-\left(-15\right)}{3-\left(-12\right)}=\dfrac{b^2}{a^2}$，得$5a^2=4b^2$，$c=3$，选$B$。

3. 已知倾斜角为$45°$的直线l过点$A(1,-2)$和点B，B在第一象限，$|AB|=3\sqrt{2}$。

（1）求点B的坐标；

（2）若直线l与双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$相交于$E$、$F$两点，且线段$EF$的中点坐标为$(4,1)$，求$a$的值。

【解析】(1) $x_B=1+3\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=4$，$y_B=-2+3\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=1$，点$B$的坐标为$\left(4,1\right)$。

(2)点差法：步骤 1：设直线与曲线 ：设直线$l:y=kx+t$与曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$交于两点E、F，EF中点为（4，1），则有E、F既在直线上又在曲线上；

步骤 2：代入点坐标：即$\begin{cases}y_1=kx_1+t\\y_2=kx_2+t\end{cases}$；$\begin{cases}\dfrac{{x_1}^2}{a^2}-{y_1}^2=1\cdots(1)\\\dfrac{{x_2}^2}{a^2}-{y_2}^2=1\cdots(2)\end{cases}$；

步骤 3：作差得出结论：（1）-（2）得：$k_{EF}.\dfrac{y_{中}}{x_{中}}=\dfrac{1}{a^2}$，代入点$(4,1)$，得$a=2$。

4. 已知椭圆$C:9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线l不过原点O且不平行于坐标轴，l与C有两个交点A,B，线段AB的中点为M。

（1）证明：直线OM的斜率与l的斜率的乘积为定值；

（2）若l过点$\left(\dfrac{m}{3},m\right)$，延长线段$OM$与$C$交于点$P$，四边形$OAPB$能否平行四边行？若能，求此时$l$的斜率，若不能，说明理由。

【解析】：（1）点差法：步骤 1：设直线与曲线 ：设直线 $l:y=kx+t$ 与曲线 $C:9x^2+y^2=m^2(m>0)$ 交于两点 A 、B ，AB 中点为 $P(x_{中},y_{中})$，则有 A,B 既在直线上又在曲线上，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$；

步骤 2：代入点坐标：即 $\begin{cases} y_1=kx_1+t \\ y_2=kx_2+t \end{cases}$； $\begin{cases} 9{x_1}^2+{y_1}^2=m^2\cdots(1) \\ 9{x_2}^2+{y_2}^2=m^2\cdots(2) \end{cases}$；

步骤 3：作差得出结论：（1）-（2）得：$k_{OM}\cdot k_l=-9$；

（2）设 l 的斜率为 k ，由 $\dfrac{y_M}{x_M}.k=-9$ ①， $y_M-m=k\left(x_M-\dfrac{m}{3}\right)$ ②，联立得 $M\left(\dfrac{-3mk+k^2m}{3(k^2+9)},\dfrac{9m-3km}{k^2+9}\right)$，得 $P\left(\dfrac{-6mk+2k^2m}{3(k^2+9)},\dfrac{18m-6km}{k^2+9}\right)$，代入椭圆中得：

$k^4-8k^3+18k^2-72k+81=0$，

$\left(k^2+9\right)\left(k^2-8k+9\right)=0$，$k=4\pm\sqrt{7}$，即存在。

5.(2013 年新课标卷 II)平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 M: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）右焦点的直线 $x+y-\sqrt{3}=0$ 交 M 于 A、B 两点，且 P 为 AB 的中点，OP 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$。

（1）求 M 的方程；

（2）C,D 为 M 上的两点，若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD\perp AB$，求四边形 $ACBD$ 面积的最大值。

【解析】(1) 代入右焦点 $\left(c,0\right)$ 可得 $c=\sqrt{3}$ ，仿照前面步骤，由点差法得 $k_{OP}\times k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$， $a^2=2b^2$，椭圆的方程为： $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$。

(2)设 CD 方程： $y=x+m$ ，AB、CD 方程与椭圆联立，由弦长公式得：$\left|AB\right|=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，

$\left|CD\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{18-2m^2}$ ， $-3<m<3$， $S=\dfrac{1}{2}\left|AB\right|\left|CD\right|=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\sqrt{18-2m^2}$ ，

当 $m=0$ 时， $S_{\max}=\dfrac{8}{3}\sqrt{6}$。结论：平行直线系，过椭圆中心（原点）时弦长最大。

题型二 求当 k_{AB} 为定值时，平行弦中点轨迹

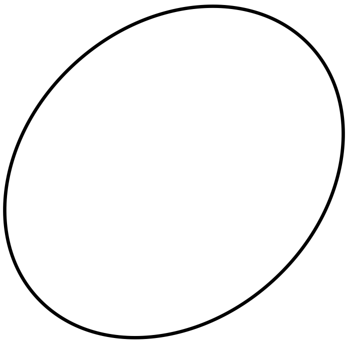
法一：直线与曲线联立，利用根与系数的关系，求出中点坐标的参数方程，消参数即得中点弦轨迹方程。

法二：利用点差法得：$\frac{y_{中}}{x_{中}}\times k=-\frac{m}{n}$，即 $y=-\frac{m}{kn}x$（过原点的直线在曲线内部的部分）。

1.（1）求右焦点坐标是 $(2,0)$，且经过点 $(-2,-\sqrt{2})$ 的椭圆的标准方程；

（2）已知椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，设斜率为 k 的直线 l，交椭圆 C 于 A、B 两点，AB 的中点为 M，证明：当直线 l 平行移动时，动点 M 在一条过原点的定直线上；

（3）利用（2）所揭示的椭圆几何性质，用作图方法找出下面给定椭圆的中心，简要写出作图步骤，并在图中标出椭圆的中心。



【解析】(1)法一：设椭圆标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$a^2=b^2+4$，即 $\frac{x^2}{b^2+4}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\because$ 点 $(-2,-\sqrt{2})$ 在椭圆上，$\therefore$ $\frac{4}{b^2+4}+\frac{2}{b^2}=1$，解得 $b^2=4$ 或 $b^2=-2$（舍），得 $a^2=8$，

即椭圆的方程为：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$。

法二：利用椭圆的定义，点 $(-2,-\sqrt{2})$ 到两焦点 $(2,0)$、$(-2,0)$ 距离之和为 $2a=4\sqrt{2}$，

$a=2\sqrt{2}$，$b=2$ 。

（2）步骤 1：设直线与曲线：设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，与椭圆 C 交于 A（x_1,y_1），B（x_2,y_2）两点；

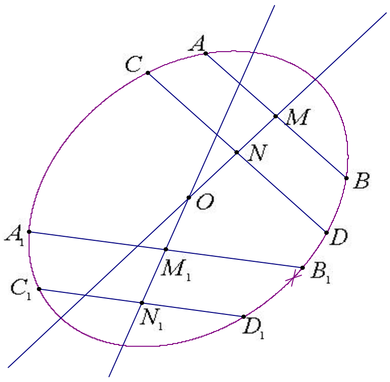
步骤 2：直线与曲线联立：$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，得 $(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$；

步骤 3：由韦达定理写出根与系数的关系：∵ $\Delta>0$，∴ $m^2<b^2+a^2k^2$，即

$-\sqrt{b^2+a^2k^2}<m<\sqrt{b^2+a^2k^2}$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{2a^2km}{b^2+a^2k^2}, y_1+y_2=\dfrac{2b^2m}{b^2+a^2k^2}$；

步骤 4：代入得出结论：∴ AB 中点 M 的坐标为$\left(-\dfrac{a^2km}{b^2+a^2k^2},\ \dfrac{b^2m}{b^2+a^2k^2}\right)$，即线段 AB 的中点 M 在过原点的直线 $b^2x+a^2ky=0$ 上。

法二：利用点差法可得（步骤同上）：$k\cdot\dfrac{y_{中}}{x_{中}}=-\dfrac{a^2}{b^2}$，即 $y_{中}=-\dfrac{a^2}{kb^2}x_{中}$，即在过原点的定直线上。



（3）如图，作两条平行直线分别交椭圆于 A、B 和 C、D，并分别取 AB、CD 的中点 M、N，连接直线 MN；再作两条平行直线(与前两条直线不平行)分别交椭圆于 A_1、B_1 和 C_1、D_1，并分别取 A_1B_1、C_1D_1 的中点 M_1、N_1，连接直线 M_1N_1，那么直线 MN 和 M_1N_1 的交点 O 即为椭圆中心。

题型三 当直线l恒过定点(e,f)时，得定点弦中点轨迹：用$k_{AB}=\dfrac{y_中-f}{x_中-e}$消去$k_{AB}$

法一：直线与曲线联立，利用根与系数的关系，求出中点坐标的参数方程，消参数即得中点弦轨迹方程。

法二：利用点差法得：$\dfrac{y_中}{x_中}\times k=-\dfrac{m}{n}$，即$\dfrac{y_中}{x_中}\times\dfrac{y_中-f}{x_中-e}=-\dfrac{m}{n}$。

1. 设椭圆方程为: $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，过点$M(0,1)$的直线l交椭圆于点A,B，O是坐标原点，点P满足$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，点$N$的坐标为$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，当$l$绕点$M$旋转时。

求:（1）动点P的轨迹方程;（2）求$|PN|$的最值。

【解析】（1）法一：步骤 1：设直线方程：当k存在时，设l的方程为$y=kx+1$

直线与曲线联立：$\begin{cases}y=kx+1\\x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得$(4+k^2)x^2+2kx-3=0$；

由韦达定理写出根与系数的关系：$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2k}{4+k^2},\\y_1+y_2=\dfrac{8}{4+k^2}.\end{cases}$；

代入关系式：$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})=(\dfrac{-k}{4+k^2},\dfrac{4}{4+k^2})$，设点$P$的坐标为$(x,y)$, 则$\begin{cases}x=\dfrac{-k}{4+k^2},\\y=\dfrac{4}{4+k^2}.\end{cases}$，消去参数$k$得$4x^2+y^2-y=0$；

当k不存在时，得 P(0, 0)，满足$4x^2+y^2-y=0$，即 P 点的轨迹为：$4x^2+y^2-y=0$。

法二：利用点差法可得（步骤同上）：$\dfrac{y_中}{x_中}\times\dfrac{y_中-1}{x_中-0}=-4$，化简得：$4x^2+y^2-y=0$。

（2）$\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{16}}+\dfrac{\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{4}}=1$，$x^2\le\dfrac{1}{16},-\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{1}{4}.|\overrightarrow{NP}|^2=(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=-3(x+\dfrac{1}{6})^2+\dfrac{7}{12}$，

当 $x=\dfrac{1}{4}$ 时，$|\overrightarrow{NP}|$ 取最小值，最小值为 $\dfrac{1}{4}$；当 $x=-\dfrac{1}{6}$ 时，$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最大值，最大值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$。

抛物线中点弦问题。

抛物线：① $y^2=2px\Rightarrow y_{中}.k=p$ 。

简答题步骤规范模板：

方法一：

①设直线 AB 的方程；

②直线与曲线联立，整理成关于 x（或 y）的一元二次方程；

③写出根与系数的关系；

④利用 $x_{中}=\dfrac{x_1+x_2}{2},y_{中}=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，把根与系数的关系代入。

方法二：点差法：

步骤 1：设直线与曲线 ：设直线 $l:y=kx+t$ 与曲线：$y^2=2px$ 交于两点 A 、B ，AB 中点为 $P(x_{中},y_{中})$，则有 A,B 既在直线上又在曲线上，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$；

步骤 2：代入点坐标：即 $\begin{cases}y_1=kx_1+t\\y_2=kx_2+t\end{cases}$，$\begin{cases}{y_1}^2=2px_1\cdots(1)\\{y_2}^2=2px_2\cdots(2)\end{cases}$；

步骤 3：作差得出结论：（1）－（2）得：$y^2=2px\Rightarrow y_{中}.k=p$ 。

同理可推出其余三类方程的中点弦结论：

② $y^2=-2px\Rightarrow y_{中}.k=-p$ 。

③ $x^2=2py\Rightarrow x_{中}=p.k$ 。

④ $x^2=-2py\Rightarrow x_{中}=-p\cdot k$ 。

题型四 求值(求 k 或 p)

1. 已知抛物线 C 的顶点在坐标原点，焦点为 $F\ (1,0)$，直线 l 与抛物线 C 相交于 A,B 两点，若 AB 的中点为(2,2)，则直线 l 的方程为________。

【解析】抛物线方程为：$y^2=4x$，由结论得：$2\times k=2$，$k=1$，直线方程为 $y=x$。

2. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，过其焦点且斜率为 1 的直线交抛物线于 A、B 两点，若线段 AB 的中点的纵坐标为 2，则该抛物线的准线方程为 (　　)

A. $x=1$　　B. $x=-1$　　C. $x=2$　　D. $x=-2$

【解析】由结论得：2×k=p，k=1，p=2，抛物线方程为：$y^2=4x$，选 B。

3. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，A,B 是 C 上的两个点，线段 AB 的中点为 $M(2,2)$，则 ΔABF 的面积等于________。

【解析】由结论得：$2\times k=2$，$k=1$，直线 AB 方程为 $y=x$，$A(0,0)$，$B(4,4)$，S=2。

4. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，过点 $P(-1,0)$ 的直线 l 交抛物线 C 于 A,B 两点，点 Q 为线段 AB 的中点，若 $|FQ|=2$，则直线 l 的斜率等于_______。

【解析】设 $l:y=k(x+1)$，$y_{中}=\dfrac{2}{k}$，代入直线得 $x_{中}=\dfrac{2}{k^2}-1$，代入 $|FQ|=2$，得 $k=\pm 1$。

专题十二　圆锥曲线中最值

题型一 定点与椭圆上动点的距离的最值问题。

定点与椭圆上动点的距离的最值：写出定点与椭圆上动点的距离表示，利用点在椭圆上可消去 x 或 y，然后转化为关于 y 或 x 的二次函数，利用椭圆的有界性确定最值；或设椭圆的参数方程，利用三角函数的有界性去限定。

椭圆上的点到两焦点距离最大、最小值的点为长轴两端点：$\min: a-c; \max: a+c$。

1. 设 P,Q 分别为圆 $x^2+(y-6)^2=2$ 和椭圆 $\dfrac{x^2}{10}+y^2=1$ 上的点，则 P,Q 两点间的最大距离是(　　)

A. $5\sqrt{2}$　　*B*. $\sqrt{46}+\sqrt{2}$　　*C*. $7+\sqrt{2}$　　*D*. $6\sqrt{2}$

【解析】法一：转化为圆心到椭圆上点的距离的最大值加（半径）$\sqrt{2}$，$\sqrt{x^2+(y-6)^2}=\sqrt{-9y^2-12y+46}$，转化为二次函数，$1\geq y\geq -1$，

当 $y=-\dfrac{2}{3}$ 时，取到最大值 $5\sqrt{2}$，选 D。

法二：参数法，设 $\begin{cases} x=\sqrt{10}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$，代入转化为关于 $\sin\theta$（或 $\cos\theta$）的二次函数。

2. 设椭圆方程为: $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，过点 $M(0,1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A,B，O 是坐标原点，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，点 N 的坐标为 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，当 l 绕点 M 旋转时。

求:（1）动点 P 的轨迹方程；　（2）求 $|PN|$ 的最值。

【解析】（1）法一：设直线方程：当 k 存在时，设 l 的方程为 $y=kx+1$；

直线与曲线联立：$\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $(4+k^2)x^2+2kx-3=0$；

由韦达定理写出根与系数的关系：$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2k}{4+k^2}, \\ y_1+y_2=\dfrac{8}{4+k^2}. \end{cases}$；

代入关系式：$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})=(\frac{-k}{4+k^2},\frac{4}{4+k^2})$，设点 P 的坐标为 (x,y)，则 $\begin{cases} x=\frac{-k}{4+k^2}, \\ y=\frac{4}{4+k^2}. \end{cases}$，消去参数 k 得 $4x^2+y^2-y=0$；

当 k 不存在时，得 P(0, 0)，满足 $4x^2+y^2-y=0$，即 P 点的轨迹为：$4x^2+y^2-y=0$。

法二：利用点差法可得（步骤同上）：$\frac{y_{中}}{x_{中}}\times\frac{y_{中}-1}{x_{中}-0}=-4$，化简得：$4x^2+y^2-y=0$。

（2）$\frac{x^2}{\frac{1}{16}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$，$x^2\le\frac{1}{16},-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}.$

$|\overrightarrow{NP}|^2=(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=-3(x+\frac{1}{6})^2+\frac{7}{12}$，

当 $x=\frac{1}{4}$ 时，$|\overrightarrow{NP}|$ 取最小值，最小值为 $\frac{1}{4}$；当 $x=-\frac{1}{6}$ 时，$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最大值，最大值为 $\frac{\sqrt{21}}{6}$。

题型二 椭圆或双曲线上的动点到一个定点与一个焦点的距离的和或差的最值问题。

椭圆或双曲线上一点 M 与一定点 P，$|MF|+|MP|$ 最大或最小，转化为椭圆（或双曲线）上点 M 到另一个焦点的距离，P,F' 连线与椭圆（或双曲线）的交点为所求的 P 点。

1. 已知 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点，$A(1,4),P$ 是双曲线右支上的动点，则 $|PF|+|PA|$ 的最小值为_________。

【解析】 $|PF|=|PF_1|+4$，$(|PF_1|+|PA|)_{\min}=|AF_1|=5$，即最小值为 9。

2. 已知 F 是双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 的右焦点，P 是 C 左支上一点，$A\left(0,6\sqrt{6}\right)$，当 ΔAPF 周长最小时，该三角形的面积为________。

【解析】到右焦点的距离转化为到左焦点的距离 $+2a$，设左焦点为 F_1，则有 $|AP|+|PF|+|AF|=$

$|AP|+|PF|+15=15+|PF_1|+|PA|+2a=17+|PF_1|+|PA|$，当 A、P、F_1 三点共线时周长最小为 32，可求得 P$\left(-2,2\sqrt{6}\right)$，则 $S=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{6}-\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{6}=12\sqrt{6}$。

3. 已知点 $A(1,1)$，而且 F_1 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左焦点，P 是椭圆上任意一点，求 $|PF_1|+|PA|$ 的最小值和最大值。

【解析】$\left(|PF_1|+|PA|\right)_{\max(\min)}=\left(2a+|PA|-|PF_2|\right)_{\max(\min)}=\left(6\pm|AF_2|\right)=6\pm\sqrt{2}$，$A$、$F_2$ 与椭圆的两个交点为所求的 P 点。

题型三 抛物线上的动点到定点(定直线)与焦点（或准线或 y 轴）的距离之和的最值问题。

抛物线上的点到焦点的距离 $\leftrightarrow$ 到准线（或 y 轴）的距离(转化后连线与抛物线的交点为所求的点。)。

1. 已知点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，那么点 P 到点 $Q(2,-1)$ 的距离与点 P 到抛物 线焦点距离之和取得最小值时，点 P 的坐标为　（　　　）

$A.\ \left(\frac{1}{4},-1\right)$　　　　$B.\ \left(\frac{1}{4},1\right)$　　　　$C.\ (1,2)$　　　　$D.\ (1,-2)$

【解析】点 P 到焦点的距离转化为到准线的距离，即点 P 到准线的距离与到点 Q 的距离之和最小，即 Q 到准线的距离最小，选 A。

2. 已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的一个动点，则点 P 到点 $\left(0,2\right)$ 的距离与 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值为________

【解析】点 P 到准线的距离转化为到焦点的距离，即焦点与点（0，2）两点之间距离最小，

$$\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

3. 已知直线 $l_1:4x-3y+6=0$ 和直线 $l_2:x=-1$，抛物线 $y^2=4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是　（　　　）

A. 2　　　　*B*. 3　　　　*C*. $\frac{11}{5}$　　　　*D*. $\frac{37}{16}$

【解析】l_2 是抛物线的准线，点 P 到直线 l_2 的距离等于点 P 到焦点的距离，即在抛物线上找一点到焦点的距离与到 l_1 的距离之和最小，只需过焦点向 l_1 作垂线，与抛物线的交点为所求的点，最小值为 $\left(1,0\right)$ 到直线 $l_1:4x-3y+6=0$ 的距离，即最小值为 2，选 *A*。

题型四　抛物线上的动点到定点或定直线的距离的最值问题。

设出抛物线上的点的坐标，利用距离公式表示，然后转化为二次函数的最值问题。到定直线的距离亦可以利用切线（导数）。

1. 若抛物线 $x^2=2y$ 的顶点是抛物线上到点 $A(0,a)$ 的距离最近的点，求 a 的取值范围。

【解析】设抛物线上的点 P$\left(x_0,\frac{x_0^{\ 2}}{2}\right)$，$|PA|=\sqrt{x_0^{\ 2}+\left(\frac{x_0^{\ 2}}{2}-a\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}x_0^{\ 4}+(1-a)x_0^{\ 2}+a^2}$，

只需二次函数的对称轴：$-2(1-a)\le 0$，$a\le 1$。

秒杀结论：

当抛物线对称轴上的点 P 到抛物线上的点距离最近的点是顶点时，需点 P 到顶点的距离 $\le$ p。

应用：在抛物线型酒杯(轴截面是抛物线)中放入一小球，当小球的半径 r≤p 时，小球会落到杯底，当 r>p 时，小球会卡到中间。

1. 对于抛物线 $y^2=4x$ 上任意一点 Q，点 $P\ (a,0)$ 都满足 $|PQ|\ge|a|$，则 a 的范围是(　　)

$A.\ (-\infty,0)$　　　　$B.\ (-\infty,2]$　　　　$C.\ [0,2]$　　　　$D.\ (0,2)$

【解析】法一：设 Q(x,y)，

$|PQ|=\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{(x-a)^2+4x}=\sqrt{x^2+(4-2a)x+a^2}\ge|a|$，平方得：$x^2+(4-2a)x\ge0$

因为 $x\ge0$，即 $x+4-2a\ge0$，只需 $4-2a\ge0$，即 $a\le2$，选 B。

或分离参数：只需 $2a-4\le x_{\min}=0$，即 $a\le2$，选 B。

法二：同上，转化为抛物线的顶点是抛物线上到点 P$(a,0)$ 的距离最近的点，即 $a\le2$，选 B。

2. 抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $2x-y=4$ 的距离最小的点的坐标是________

【解析】法一：设 P$\left(x_0,{x_0}^2\right)$，则 $d=\dfrac{\left|2x_0-{x_0}^2-4\right|}{\sqrt5}$，当 $x_0=1$ 时最小，选 B。

法二：设 P$\left(x_0,{x_0}^2\right)$，当过点 P 的切线与已知直线平行时，切点为所求的点，$k=y'=2x_0=2$，

$x_0=1$，即 P$(1,1)$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,-1)$，B 点在直线 $y=-3$ 上，M 点满足：$\overrightarrow{MB}//\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}$，$M$ 点的轨迹为曲线 C。

（1）求 C 的方程；

（2）P 为 C 上的动点，l 为 C 在 P 点处得切线，求 O 点到 l 距离的最小值。

【解析】：（1）设 $M(x,y)$，$B(x_0,3)$，代入向量关系得：x=x_0，C 的方程为：$y=\dfrac14x^2-2$；

（2）转化为关于 x_0 的函数，利用基本不等式求最值：设点 P$\left(x_0,y_0\right)$，利用导数求切线斜率，k= y' =$\dfrac12x_0$，得切线方程为：$l:x_0x-2y+2y_0-x_0^2=0$，(或设点 P$\left(x_0,\dfrac14{x_0}^2-2\right)$)，

则 O 点到 l 的距离 $d=\dfrac{|2y_0-x_0^2|}{\sqrt{x_0^2+4}}$，又 $y_0=\dfrac14x_0^2-2$，

$\therefore\ d=\dfrac{\frac12x_0^2+4}{\sqrt{x_0^2+4}}=\dfrac12\left(\sqrt{x_0^2+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x_0^2+4}}\right)\ge2$;(仅当 x_0^2=0 取等号，$\therefore$ O 点到 l 距离最小为 2。)。

题型五 弦长或面积最值问题。

答题步骤：

步骤 1：设直线的方程；

步骤 2：直线与曲线联立，整理成关于 x(或 y)的一元二次方程；

步骤 3：写出根与系数的关系；

步骤 4：写出面积(或弦长)的几何表示(在求面积时最好选底或高其中一个为定值。)，把根与系数的关系

代入。

步骤 5：转化为某个变量的函数，根据函数的特点求最值(一般利用基本不等式或二次函数或导数求最值。)。

二级结论：

①在椭圆中，过焦点作互相垂直的两条弦，构成四边形的面积与两条弦长度之和的最值为：当斜率不存在与斜率为 0 时面积与长度和最大；当斜率为 ± 1 时面积与长度和最小。

②在抛物线中，过焦点作互相垂直的两条弦，构成四边形的面积与两条弦长度之和最值为：当斜率为 ± 1 时面积与长度和最小，无最大值。

1. 已知 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2，直线 l_1 与 C 交于 A、B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D、E 两点，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为 （　　）

$A.\ 16$　　　　$B.\ 14$　　　　$C.\ 12$　　　　$D.\ 10$

【解析】设 $l_1: y=k(x-1)$，与抛物线联立得：$k^2x^2-\left(2k^2+4\right)x+k^2=0$，$|AB|=x_1+x_2+p=4+\dfrac{4}{k^2}$，

将 $k \to -\dfrac{1}{k}$，得 $|DE|=4+4k^2$，$|AB|+|DE|=8+4\left(k^2+\dfrac{1}{k^2}\right)\geq 16$，仅当 $k=\pm 1$ 时取等号。

秒杀方法：设 l_1 的倾斜角为 θ，

则 $|AB|+|DE|=\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{4}{\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{16}{\sin^2 2\theta}\geq 16$。

2. 已知点 $A\left(0,-2\right)$，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆的右焦点，直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点。

（1）求 E 的方程；

（2）设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P,Q 两点，当 ΔOPQ 的面积最大时，求 l 的方程。

【解析】（1）由 $\frac{0-\left(-2\right)}{c-0}=\frac{2}{c}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，得 $c=\sqrt{3}$，由离心率得 $a=2$，$\therefore$ 椭圆 E 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）法一：步骤 1：设直线方程 ：i. 当 k 不存在时，不符合题意；ii. 当 k 存在时，设 $l:y=kx-2$；

步骤 2：直线与曲线联立：将直线与椭圆联立得：$(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$，

由 $\Delta=16(4k^2-3)>0$，得 $k^2>\frac{3}{4}$，$PQ=\frac{4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$，

点 O 到直线的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$；

步骤 3：写出面积关于 k 的函数关系式：$S=\frac{1}{2}\times\left|PQ\right|\times d=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$，设 $\sqrt{4k^2-3}=t$，

$S_{\Delta OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}$；

步骤 4：利用基本不等式求最值：则基本不等式得 $t+\frac{4}{t}\ge 4$，当且仅当 $t=2$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时等号成立，即 $l:y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$。

法二：$S=\left|S_{\Delta OPA}-S_{OQA}\right|=\frac{1}{2}\times\left|OA\right|\times\left|x_1-x_2\right|=\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$，

同上。

3. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(2,3)$，点 A 为其左顶点，且 AM 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

（1）求 C 的方程；

（2）点 N 为椭圆上任意一点，求 ΔAMN 的面积的最大值.

【解析】（1）根据题意，把点 $M(2,3)$ 代入椭圆得到 $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$ ①，设 $A(-a,0)$，又 $k_{AM}=\frac{3}{2+a}=\frac{1}{2}$，$\therefore a=4$，代入①式，求得 $b^2=12$，$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

（2）法一：转化为椭圆上的点到直线 AM 距离的最值，

由题意，可知 AM 的直线方程为 $x-2y+4=0$，

设与之平行的直线：$x-2y+m=0$，

当与椭圆相切时，切点为所求的点 N，切点到直线的距离为最大距离，

直线与椭圆联立 $\begin{cases} x-2y+m=0 \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$，得 $16y^2-12my+3m^2-48=0$，

$\Delta=144m^2-64(3m^2-48)=0$，得 $m=\pm 8$，

由题意知当 $m=-8$ 时，ΔAMN 面积最大，

两条平行直线 $x-2y+4=0$ 与 $x-2y-8=0$ 的距离 $d=\frac{|4-(-8)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，

$|AM|=3\sqrt{5}$，$\therefore S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=18$。

法二：参数法，设 $N\left(4\cos\theta,2\sqrt{3}\sin\theta\right)$，

则 $d=\frac{\left|4\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta+4\right|}{\sqrt{5}}$，$d_{\max}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，同上。

专题十三　圆锥曲线中定值与定点

圆锥曲线中的定值与定点。

解析几何中证明(求)直线(曲线)过定点，一般是先选择一个参数建立直线(曲线)系方程，再根据直线(曲线)系过定点时与参数没有关系，得到一个关于x, y的方程组，以这个方程组的解为坐标的点为所求定点；定值问题是通过已知条件(主要利用根与系数的关系)，化简为与参数没有关系的常数。

简答题步骤规范模板：

步骤 1：设直线的方程；

步骤 2：直线与曲线联立，整理成关于x(或y)的一元二次方程；

步骤 3：写出根与系数的关系；

步骤 4：把根与系数的关系代入已知条件；

步骤 5：如果直线中两量k, b有一定关系，则恒过定点；如果消去参数，则为定值。

【二级结论 1】

过椭圆或抛物线上一点$P\left(x_0, y_0\right)$作两条弦，与曲线交于A，B，PA，PB的斜率互为相反数(倾斜角互补或与x轴围成等腰三角形。)。则AB的斜率为定值。

抛物线：$k=-\dfrac{p}{y_0}$，椭圆：$\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，亦可理解为过$P\left(x_0, y_0\right)$作曲线切线斜率的相反数。

方法一答题规范模板：

步骤 1：设直线的方程；

步骤 2：直线与曲线联立，整理成关于x(或y)的一元二次方程；

步骤 3：写出根与系数的关系；

步骤 4：利用$k_{PA}+k_{PB}=0$，把根与系数的关系代入。

方法二答题规范模板：

步骤 1：设直线PA的方程；

步骤 2：直线与曲线联立，整理成关于x(或y)的一元二次方程；

步骤 3：利用根与系数的关系求出点A的坐标，把点A的坐标中的k换为-k得到点B坐标；

步骤 4：由两点式求出AB的方程，进而求出斜率为定值。

1. 已知椭圆C过点$A\ (1,\dfrac{3}{2})$，两个焦点为$(-1,0)$，$(1,0)$。

（1）求椭圆C的方程；

（2）E,F是椭圆C上的两个动点，如果直线AE的斜率与AF的斜率互为相反数，证明直线EF的斜率

为定值，并求出这个定值。

【解析】（1）方法一：待定系数法，由题意知，$c=1$，设椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{1+b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，代入点 A 得：$\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$，解得$b^2=3$，$b^2=-\dfrac{3}{4}$（舍去），所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$。

方法二：定义法，A 到两焦点距离之和分别是$\dfrac{3}{2}$、$\dfrac{5}{2}$，则$2a=4$，c=1，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$。

（2）方法二：步骤 1：设直线方程：设直线AE的方程为：$y=k(x-1)+\dfrac{3}{2}$；

步骤 2：直线与曲线联立：代入$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$得$(3+4k^2)x^2+4k(3-2k)x+4(\dfrac{3}{2}-k)^2-12=0$；

步骤 3：利用根与系数的关系求点 E、F 的坐标：设$E(x_E,y_E)$，$F(x_F,y_F)$，因为点$A(1,\dfrac{3}{2})$在椭圆上，所以$x_E=\dfrac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}$，$y_E=kx_E+\dfrac{3}{2}-k$，又直线$AF$的斜率与$AE$的斜率互为相反数，在上式中以$-k$代$k$，可得$x_F=\dfrac{4k^2+12k-3}{3+4k^2}$，$y_E=-kx_E+\dfrac{3}{2}+k$；

步骤 4：求出直线 EF 的斜率：$K_{EF}=\dfrac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\dfrac{-k(x_F+x_E)+2k}{x_F-x_E}=\dfrac{1}{2}$（定值）。

秒杀方法：由 k=$\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$=$\dfrac{3\times1}{4\times\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{2}$。

【二级结论 2】

①直线 $x=my+n$ 与抛物线 $y^2=2px$ 交于 A、B，在 x 轴上存在定点 P（$-n,0$），使 PA、PB 的斜率互为相反数(倾斜角互补或斜率和为 0 或对称轴是∠APB 的平分线。)。逆过来亦成立。即 AB 恒过定点（$n,0$）。

②过椭圆焦点的直线与椭圆交于 A、B，存在定点 P(对应准线与焦点所在轴的交点 $\left(\pm\frac{a^2}{c},0\right)$.)，使 P$A$、P$B$ 的斜率互为相反数(倾斜角互补或与斜率和为 0 或 x 轴是∠APB 的平分线。)。逆过来亦成立。即 AB 恒过定点焦点。

方法一答题规范模板：

步骤 1：设直线 AB 的方程；

步骤 2：直线与曲线联立，整理成关于 x(或 y)的一元二次方程；

步骤 3：写出根与系数的关系；

步骤 4：利用 $k_{PA}+k_{PB}=0$，把根与系数的关系代入。

方法二答题规范模板：

步骤 1：设直线 PA 的方程；

步骤 2：直线与曲线联立，整理成关于 x(或 y)的一元二次方程；

步骤 3：利用根与系数的关系求出点 A 的坐标，把点 A 的坐标中的 k 换为$-k$ 得到点 B 的坐标；

步骤 4：由两点式求出 AB 的方程，进而求出恒过的定点。

1. 直角坐标系中，曲线 $C:y=\frac{x^2}{4}$ 与直线 $y=kx+a$（$a>0$）交于 M、N 两点

（1）当 k=0 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程；

（2）y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$？说明理由。

【解析】 （1）$y'=\frac{1}{2}x$，交点 M,N 坐标为 $\left(\pm2\sqrt{a},a\right)$，$k=\pm\sqrt{a}$，切线方程分别为 $\sqrt{a}x-y-a=0$、$\sqrt{a}x+y+a=0$；

（2）设点（抛物线特有思路）：设 $M\left(x_1,\frac{x_1^{\ 2}}{4}\right),N\left(x_2,\frac{x_2^{\ 2}}{4}\right)$；

代入关系：$\angle OPM=\angle OPN\Rightarrow k_{MP}+k_{NP}=0$，设 $P(0,b)$，则有 $\dfrac{\frac{x_1^{\ 2}}{4}-b}{x_1}+\dfrac{\frac{x_2^{\ 2}}{4}-b}{x_2}=0$，

化简得：$(x_1+x_2)\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{b}{x_1x_2}\right)$=0；

直线与曲线联立：直线与抛物线联立得：$x^2-4kx-4a=0$，由根与系数的关系代入得：

$x_1x_2=-4a$，$4k\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{b}{4a}\right)=0$，即 $b=-a$，即存在点 $P(0,-a)$，使得 $\angle OPM=\angle OPN$。

2.(2018 年卷 I)设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A、B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$。

（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

（2）设 0 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$。

【解析】（1）将 $x=1$ 代入椭圆方程得：$\dfrac{1}{2}+y^2=1$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $A(1,\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，∴ $k_{AM}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴直线 AM 的方程为：$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$。

（2）证明：设直线方程：当 l 斜率不存在时，由（1）可知，结论成立；当 l 斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-1)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$；

直线与曲线联立：直线与椭圆联立，$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，即 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$；

写出根与系数的关系：∴ $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$；

将根与系数的关系代入：$k_{AM}+k_{BM}=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{k[(2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4]}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$=\dfrac{k(\frac{4k^2-4}{2k^2+1}-\frac{12k^2}{2k^2+1}+4)}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$，∴ $k_{AM}=-k_{BM}$，∴ $\angle OMA=\angle OMB$。

秒杀方法：$\left(\pm\dfrac{a^2}{c},0\right)$=(2, 0)。

4. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,-1)$，且 $a=2b$。

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M、N，直线 MA,NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P,Q，求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$ 的值。

【解析】（1）椭圆方程可设为：$\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，将点 A 代入，得 $b^2=2$，$\therefore$ 椭圆的方程为：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$。

（2）步骤 1：设直线方程：设直线 MN 的方程为：$y=k(x+4)$；

步骤 2：直线与曲线联立：将直线 MN 与椭圆联立得：$(4k^2+1)x^2+32k^2x+64k^2-8=0$；

步骤 3：写出根与系数的关系：设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，则有：$x_1+x_2=-\dfrac{32k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-8}{4k^2+1}$；

步骤 4：将根与系数的关系代入：设 P$(-4,y_P)$、Q$(-4,y_Q)$，由 M、A、P 三点共线得：$y_p=\dfrac{-(2k+1)(x_1+4)}{x_1+2}$，同理由 N、A、Q 三点共线得：$y_Q=\dfrac{-(2k+1)(x_2+4)}{x_2+2}$。

$y_P+y_Q=-(2k+1)\dfrac{2x_1x_2+6(x_1+x_2)+16}{(x_1+2)(x_2+2)}=0$，

$\therefore \dfrac{|PB|}{|BQ|}=\dfrac{|y_P|}{|y_Q|}=1$。

5. 已知 A、B 分别为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，P 为直线 x=6 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D。

（1）求 E 的方程；

（2）证明：直线 CD 过定点。

【解析】(1) $G(0,1)$，$A(-a,0)$，$B(a,0)$，$\overrightarrow{AG}=(a,1)$，$\overrightarrow{GB}=(a,-1)$，由 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$ 得 $a^2=9$，

$\therefore$ 椭圆的方程为：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$。

（2）方法一：设直线方程：设直线 CD 方程为：$x=my+n$；

直线与曲线联立：直线 CD 与椭圆联立得：$(m^2+9)y^2+2mny+n^2-9=0$，$3>n>-3$；

写出根与系数的关系：设 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，则有：$y_1+y_2=\frac{-2mn}{m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{n^2-9}{m^2+9}$；

将根与系数的关系代入：设 P$(6,t)$，当 $t\neq 0$ 时，由 P、A、C 三点共线得：$y_1=\frac{t}{9}(x_1+3)$，

同理由 P、B、D 三点共线得：$y_2=\frac{t}{3}(x_2-3)$，消去 t 得：$3y_1(x_2-3)=y_2(x_1+3)$，

由于 $\frac{{x_2}^2}{9}+\frac{{y_2}^2}{1}=1$①，得 $9{y_2}^2=(3+x_2)(3-x_2)$②，

①×②得：$27y_1y_2=-(x_1+3)(x_2+3)=-(my_1+n+3)(my_2+n+3)$，

$(27+m^2)y_1y_2+m(n+3)(y_1+y_2)+(n+3)^2=0$，代入得：$n$=−3（舍去），$n=\frac{3}{2}$，即过 $\left(\frac{3}{2},0\right)$

当 t=0 时，CD 的方程为 y=0，亦过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$，

即直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$

方法二：设直线 PA 的方程为：$y=\frac{t}{9}(x+3)$，与椭圆联立，求出点 C 的坐标，同理求出点 D 的坐标，由两点式求出 CD 的方程，再求定点

专题十四　圆锥曲线中切线

当抛物线开口向上或开口向下时（此时抛物线可看作函数），主要利用导数解决，当抛物线开口向左或开口向右时利用 $\Delta=0$ 解决。椭圆利用 $\Delta=0$ 解决。

题型一 过曲线上一点作曲线的切线

二级结论：

①过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 作切线，则切线方程为：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$。

证明:(此步骤必须牢记,在大题中要体现)设过 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为: $y-y_0=k(x-x_0)$，与椭圆方程联立，利用 $\Delta=0$。

②过抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 作切线，则切线方程为：$y_0y=p(x+x_0)$。

证明:(此步骤必须牢记,在大题中要体现)设过 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为: $y-y_0=k(x-x_0)$，与抛物线方程联立，利用 $\Delta=0$。若为开口向上或开口向下的抛物线，求导，代点，求出切线的斜率，利用点斜式求出切线的方程 。

1. 抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $2x-y=4$ 的距离最小的点的坐标是　(　　　)

A. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$　　*B.* $(1,1)$　　*C.* $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$　　*D.* $(2,4)$

【解析】法一：设 P$(x_0,x_0{}^2)$，则 $d=\frac{|2x_0-x_0{}^2-4|}{\sqrt{5}}$，当 $x_0=1$ 时最小，选 B。

法二：设切点为 $(x_0,x_0{}^2)$，则切线方程为：$\frac{y+x_0{}^2}{2}=x_0x$，$\therefore k=2x_0=2$，即切点为 $(1,1)$，由点到直线的距离可求得，选 B。

法三：设 P$(x_0,x_0{}^2)$，过 P 的切线与直线平行，切点为所求的点，$k=y'=2x_0=2$，$x_0=1$，选 B。

题型二 过曲线外一点作曲线的切线

设过 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为：$y-y_0=k(x-x_0)$，与曲线方程联立，利用 $\Delta=0$。

二级结论：

①过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作椭圆的两条切线，则两切点连线方程为：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$。

证明：（此步骤必须牢记，在大题中要体现）设两切点为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则切线 PA：$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$；同理，切线 PB：$\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1$；点 P 在两切线上，则有：$\frac{x_1x_0}{a^2}+\frac{y_1y_0}{b^2}=1$ ①，$\frac{x_2x_0}{a^2}+\frac{y_2y_0}{b^2}=1$ ②，构造直线 l：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，则由①②可知点 A、B 均在直线 l 上，即直线 AB 的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$。

②过 $y^2=2px$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作抛物线的两条切线，则两切点连线方程为：$y_0y=p(x+x_0)$。

题型三 阿基米德三角形

圆锥曲线的弦 AB 与过弦的端点的两条切线围成的 ΔPAB 叫做阿基米德三角形。

抛物线中阿基米德三角形的性质：

①当 AB 过焦点时，则 P 在准线上；$PA\perp PB$；$PF\perp AB$。

证明：（此步骤必须牢记，在大题中要体现。）

方法一：设抛物线方程为：$y^2=2px$，AB 方程为：$x=my+\frac{p}{2}$，直线与曲线方程联立：

$\begin{cases} y^2=2px \\ x=my+\frac{p}{2} \end{cases}$，得：$y^2-2pmy-p^2=0$，设 $A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$，由前面步骤可知

PA：$y_1y=p\left(x+\frac{y_1^2}{2p}\right)$，同理 PB：$y_2y=p\left(x+\frac{y_2^2}{2p}\right)$，两直线求交点可得

$x=\frac{y_1y_2}{2p}=-\frac{p}{2}$，$y=\frac{-p^2}{2y_1}+\frac{y_1}{2}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=pm$，即点 P 在准线上，$k_{PF}=-m$，

$\therefore PF \perp AB$。$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{p}{y_1} \times \frac{p}{y_2} = -1$，$\therefore PA \perp PB$。

方法二：设两条切线 PA、PB 的交点 $P(x_0, y_0)$，则由前面步骤可知 AB 方程：$y_0 y = p(x + x_0)$，焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 在直线上，代入得 $x_0 = -\frac{p}{2}$，$\therefore$ 点 P 在准线上。

※当抛物线方程为 $x^2 = \pm 2py$ 时可利用导数求切线。

②当点 P 在准线上时，AB 过焦点，底边 AB 的中线平行于对称轴，且 S_{PAB} 的最小值为 p^2。

证明：设抛物线方程为：$y^2 = 2px$，设 $P\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$，由前面步骤可知 AB：$y_0 y = p\left(x - \frac{p}{2}\right)$，即过焦点。$AB$ 的中点为 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$，由上面步骤可知：$\frac{y_1 + y_2}{2} = pm = y_P$，即底边 AB 的中线平行于对称轴。

$$S_{PAB} = \frac{1}{2}|PF||AB| = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + p^2 m^2} \times |x_1 + x_2 + p| = \frac{1}{2}p\sqrt{1+m^2}|m(y_1 + y_2) + 2p| = p^2(1+m^2)^{\frac{3}{2}},$$

当 $m = 0$ 时，其面积最小为 p^2。

1. 已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 C：$y^2 = 2px$ 的准线上，过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B，记 C 的焦点为 F，则直线 BF 的斜率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

【解析】 可知抛物线：$y^2 = 8x$，设 $B\left(\frac{y_0^{\ 2}}{8}, y_0\right)$，则切线方程为：$yy_0 = 4(x + \frac{y_0^{\ 2}}{8})$，代入点 A，得 $y_0 = 8$，则 $B(8,8)$，$k_{BF} = \frac{4}{3}$。选 D。

二级结论：阿基米德三角形：由 $AF \perp BF$，选 D。

题型四 蒙日圆。

过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作椭圆的两条互相垂直的切线，则 P 点的轨迹为圆，方程为：$x_0{}^2+y_0{}^2=a^2+b^2$。

证明：（此步骤必须牢记，在大题中要体现。）

步骤 1：当 k 存在时，设过 $P(x_0,y_0)$ 的直线为 $y-y_0=k(x-x_0)$；

步骤 2：直线与椭圆联立；

步骤 3：由韦达定理，$\Delta=0$（利用相切），得到关于 k 的一元二次方程；

步骤 4：由韦达定理，$k_1\cdot k_2=-1$，得 x_0,y_0 的关系，即轨迹方程。

当 k 不存在时，P(a,b)、$(-a,b)$、$(a,-b)$、$(-a,-b)$ 亦满足。

1. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$。

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若动点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程。

【解析】（1）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$。

（2）步骤 1：设直线方程为：当 k 存在时，设过 P 点的直线方程为：$y-y_0=k(x-x_0)$；

步骤 2：直线与椭圆联立得：$(9k^2+4)x^2+18k(-kx_0+y_0)x+9(-kx_0+y_0)^2-36=0$；

步骤 3：由 $\Delta=0$ 得：$(x_0{}^2-9)k^2-2x_0y_0k+y_0{}^2-4=0$；

步骤 4：当 $x_0{}^2\neq 9$ 时，$k_1\cdot k_2=\frac{y_0{}^2-4}{x_0{}^2-9}=-1$，得 $x_0{}^2+y_0{}^2=13$，当 k 不存在时，即 $x_0{}^2=9$，亦满足。

专题十五　圆锥曲线中轨迹

题型一：定义法求轨迹

【二级结论 1】

一般涉及到动圆与两定圆相切问题(包括内切、外切)，利用定义求圆心轨迹，轨迹为椭圆或双曲线，主要确定和还是差能消去动圆半径 r。

1. 与两圆 $x^2+y^2=1, x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切的圆的圆心在　(　　　)

$A.$ 一个椭圆上　　$B.$ 双曲线的一支上　　$C.$ 一条抛物线上　　$D.$ 一个圆上

【解析】选 B

2. 已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$，圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与圆 M 外切并 且与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C。

（1）求 C 的方程;

（2）l 是与圆 P，圆 M 都相切的一条直线，l 与曲线 C 交于 A、B 两点，当圆 P 的半径最长时，求 $|AB|$

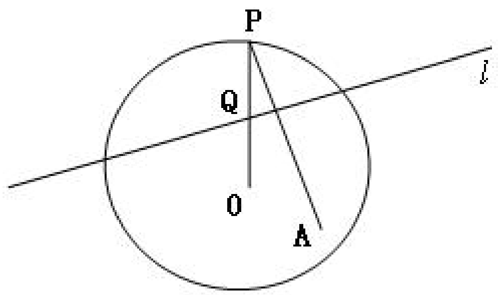
【解析】（1）设圆 P 的半径为 r，$PM=r+1$，$PN=3-r$，$PM+PN=4$，动点 P 到两定点 M、N 距离之和等于定值 4，所以 P 的轨迹是以 M、N 为焦点的椭圆，$a=2$，$c=1$，C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$。

（2）从图得半径最长时圆的方程为：$(x-2)^2+y^2=4$，公切线有三条：

$x=0, y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}$，与椭圆联立，代入弦长公式得弦长分别为：$2\sqrt{3}$，$\dfrac{18}{7}$

【二级结论 2】

如图，圆 O 的半径为定长 r，A 是圆 O 内一个定点，P 是圆上的动点，线段 AP 的垂直平分线 l 和半径 OP 相交于点 Q，当点 P 在圆上运动时，点 Q 的轨迹是以 O、A 为焦点，r 为长轴长的椭圆。

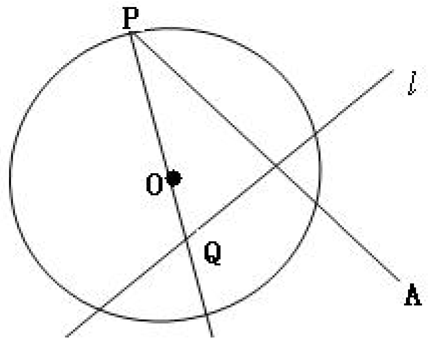


1. 已知 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$B$ 是圆 $F:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=4$（$F$ 为圆心）上一动点，线段 AB 的垂直平分线交 BF 于 P，则动点 P 的轨迹方程为__________。

【解析】 A,F 关于原点对称，$|FB|=|PB|+|PF|=2$，$|PA|=|PB|$，$|PA|+|PF|=2$，点 P 到两定点 A、F 距离之和为定值 $2>|AF|=1$，动点 p 的轨迹是以 A、F 为焦点，以 2 为 $2a$ 的椭圆，即 $a=1,c=\frac{1}{2},b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以椭圆方程为：$x^2+\frac{4y^2}{3}=1$。

【二级结论 3】

如图，圆 O 的半径为定长 r，A 是圆 O 外一个定点，P 是圆上的动点，线段 AP 的垂直平分线 l 和直线 OP 交于点 Q，当点 P 在圆上运动时，点 Q 的轨迹是以 O、A 为焦点，r 为实轴长的双曲线。



【二级结论 4】

已知定点 F 和定直线 l，F 不在直线 l 上，动圆 M 过 F 且与直线 l 相切，则圆心 M 的轨迹是一条抛物线。

1. 点 M 与点 $F(4,0)$ 的距离比它到直线 $l: x+6=0$ 的距离小 2，求点 M 的轨迹方程。

【解析】 转化为点 M 到定点 $(4,0)$ 的距离等于到定直线 $x=-4$ 的距离，即 $y^2=16x$。

2. 设圆 C 与圆 $x^2+(y-3)^2=1$ 外切, 与直线 $y=0$ 相切, 则 C 的圆心轨迹为（　　）

$A.$ 抛物线　　$B.$ 双曲线　　$C.$ 椭圆　　$D.$ 圆

【解析】 方法一：设圆心为 (x,y)，半径为 r，则有 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=r+1$，$|y|=r$，消去 r，选 A。

方法二：转化为圆心到定点 $(0,3)$ 的距离等于到定直线 $y=-1$ 的距离，选 A。

题型二：直接法求轨迹。

设动点坐标（x，y），写出动点的几何关系，转化为方程，建立 x、y 的关系。

1. ΔABC 两个顶点 A、B 的坐标分别是 $(-6,0),(6,0)$，AC、BC 所在直线的斜率之积等于 $-\dfrac{4}{9}$，求顶点 C 的轨迹方程。

【解析】 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1(y\neq 0)$。

2. 已知 ΔABC 的两个顶点 A、B 的坐标分别是 $(-5,0),(5,0)$，且 AC，BC 所在直线的斜率之积等于 $m(m\neq 0)$，试探求顶点 C 的轨迹。

【解析】 当 $m<0$ 时，点 C 的轨迹是椭圆 $(m\neq -1)$、或者圆 $(m=-1)$，并除去两点 $(-5,0),(5,0)$；当 $m>0$

时，点 C 的轨迹是双曲线，并除去两点 $(-5,0),(5,0)$。

二级结论：

A,B 是曲线 $mx^2+ny^2=1$ 上关于原点对称的两点，曲线上任意一点 P 满足：

$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{m}{n}$。

两类型题：

①求轨迹，代入关系化简，但一定要注意挖去两定点。

②求定值(直接利用结论)。

1. 已知椭圆 C 的中心为直角坐标系 xOy 的原点，焦点在 x 轴上，它的一个顶点到两个焦点的距离分别是 7 和 1。

（1）求椭圆 C 的方程;、

（2）若 P 为椭圆 C 上的动点，M 为过 P 且垂直于 x 轴的直线上的点，$\dfrac{|OP|}{|OM|}=\lambda$，求点 M 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线。

【解析】（1）$a+c=7$，$a-c=1$，得 $a=4$，$c=3$，所以椭圆的方程为：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$。

（2）设 $M\left(x,y\right)$，$x\in\left[-4,4\right]$，由已知 $\dfrac{|OP|^2}{|OM|^2}=\lambda^2$ 及点 P 在椭圆 C 上得 $\dfrac{9x^2+112}{16(x^2+y^2)}=\lambda^2$，

整理得：$(16\lambda^2-9)x^2+16\lambda^2y^2=112,x\in\left[-4,4\right]$，（ⅰ）当 $\lambda=\dfrac{3}{4}$ 时，$y=\pm\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$，轨迹是两条平行于 x 轴的线段；

（ⅱ）当 $\lambda\neq\dfrac{3}{4}$ 时，方程变形为 $\dfrac{x^2}{\dfrac{112}{16\lambda^2-9}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{112}{16\lambda^2}}=1,x\in\left[-4,4\right]$，当 $0<\lambda<\dfrac{3}{4}$ 时，点 M 的轨迹为中心在原点、实轴在 y 轴上的双曲线满足 $-4\le x\le 4$ 的部分；当 $\dfrac{3}{4}<\lambda<1$ 时，点 M 的轨迹为中心在原点、长轴在 x 轴上的椭圆满足 $-4\le x\le 4$ 的部分，当 $\lambda\ge 1$ 时，点 M 的轨迹为中心在原点、长轴在 x 轴上的椭圆。

题型三：代换法（相关点法）求轨迹

已知点的轨迹确定，所求点与已知点有相关关系，用代换法求轨迹。

步骤

步骤 1：设点：设所求点坐标（x，y），已知点坐标（x_0，y_0）；

步骤 2：建立坐标关系：建立 x、y 与 x_0、y_0 的关系；

步骤 3：代换：把已知点方程中的 x_0、y_0 代换为 x、y。

题型四：参数法求轨迹

步骤

步骤 1：选中间变量 t 作为参数；

步骤 2：与 t 建立关系：$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$；