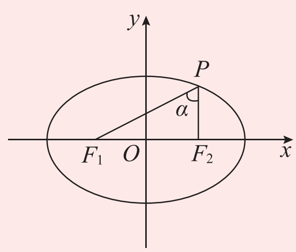
目 录

大招 1：椭圆焦点三角形面积

【结论】已知 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上的动点，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $S=c|y_P|=b^2\tan\frac{\alpha}{2}(\alpha=\angle F_1PF_2)$.

【解析】如图，设 $P(x, y)$，由椭圆的对称性，不妨设 $P(x, y)$，由椭圆的对称性，不妨设 P 在第一象限.



由余弦定理知：$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\alpha=4c^2$. ①

由椭圆定义知：$|PF_1|+|PF_2|=2a$. ②

则 ②^2 − ① 得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\alpha}$.

故 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\alpha=\frac{1}{2}\frac{2b^2}{1+\cos\alpha}\sin\alpha=b^2\tan\frac{\alpha}{2}$.

【例 1】若 P 是椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 上的一点，F_1、F_2 是其焦点，若 $\angle F_1PF_2=60°$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为________.

【答案】$\frac{64\sqrt{3}}{3}$

【解析】在椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 中，$b^2=64$，而 $\theta=60°$.

$\therefore S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=64\tan 30°=\frac{64\sqrt{3}}{3}$.

【例 2】已知 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上的点，F_1、F_2 分别是椭圆的左、右焦点，若 $\dfrac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|}=\dfrac{1}{2}$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为（　　）

A. $3\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】设 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\ \theta=60^\circ$，

$\therefore\ S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}=9\tan 30^\circ=3\sqrt{3}$，

故选答案 A.

大招 2：双曲线焦点三角形面积

【结论】已知 F_1，F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点，M 是双曲线上的动点，则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $S=c|y_M|=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=b^2\cot\frac{\theta}{2}(\theta=\angle F_1MF_2)$

【证明】由余弦定理可知 $|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cos\theta$.

假设 M 在双曲线的左支上，F_1，F_2 分别为双曲线的左、右焦点，由双曲线定义有 $|MF_2|-|MF_1|=2a$，可得 $|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_2|\cdot|MF_1|=4a^2$，故

$4c^2=2|MF_2|\cdot|MF_1|+4a^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cos\theta\Rightarrow|MF_1|\cdot|MF_2|=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$，则

$$S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}|MF_1|\cdot|MF_2|\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{b^2\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=b^2\cot\frac{\theta}{2}.$$

【例 1】已知 F_1、F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，P 在双曲线上，若 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 1，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的值是________.

【答案】0

【解析】$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cdot\cot\frac{\theta}{2}=\cot\frac{\theta}{2}=1$，$\therefore$ $\frac{\theta}{2}=45°$，即 $\theta=90°$.

$\therefore$ $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，从而 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$.

【例 2】已知 F_1、F_2 为双曲线 C：$x^2-y^2=1$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$\angle F_1PF_2=60°$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$ (　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【答案】B

【解析】由焦点三角形面积公式得：

$$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cot\frac{\theta}{2}=1^2\cot\frac{60°}{2}=\sqrt{3}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin60°=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$.

大招 3：椭圆的两个最大张角

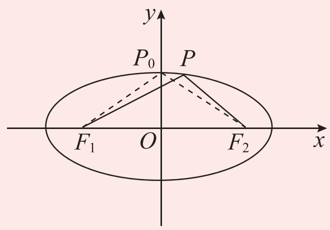
【结论 1】如图：已知 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为椭圆上任意一点，则当点 P 为椭圆短轴的端点时，$\angle F_1PF_2$ 最大.

【分析】$\angle F_1PF_2\in(0,\ \pi)$，而 $y=\cos x$ 在 $(0,\ \pi)$ 为减函数，

只要求 $y=\cos x$ 的最小值，又知 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，

利用余弦定理可得.

【证明】如图，由已知：$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，



所以 $|PF_1||PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=a^2$，（当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时取等号）

由余弦定理得：$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}$

$=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}$

$=\frac{4a^2-4c^2}{2|PF_1||PF_2|}-1=\frac{4b^2}{2|PF_1||PF_2|}-1\geqslant\frac{2b^2}{a^2}-1=1-2e^2$（当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时取等号），

所以当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时，$\cos\angle F_1PF_2$ 的值最小，因为 $\angle F_1PF_2\in(0,\ \pi)$，所以此时 $\angle F_1PF_2$ 最大．即点 P 为椭圆短轴的端点时 $\angle F_1PF_2$ 最大.

【结论 2】如图：已知 A，B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 长轴上的两个顶点，O 为椭圆上任意一点，则当点 Q 为椭圆短轴的端点时，$\angle AQB$ 最大.

【分析】当 $\angle AQB$ 最大时，$\angle AQB$ 一定是钝角，

而 $y=\tan x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 上是增函数，利用点 Q 的坐标，

表示出 $\tan\angle AQB$，再求 $\tan\angle AQB$ 的最大值.

【证明】如图，不妨设 $Q(x,\ y)(0\leqslant x<a,\ 0<y\leqslant b)$，则 $AP=a+x$，$BP=a-x$，$PQ=y$，

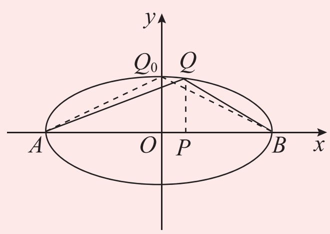
所以 $\tan\angle AQP=\dfrac{a+x}{y}$，$\tan\angle BQP=\dfrac{a-x}{y}$，

则 $\tan\angle AQB=\dfrac{\tan\angle AQP+\tan\angle BQP}{1-\tan\angle AQP\cdot\tan\angle BQP}=\dfrac{\dfrac{2a}{y}}{1-\dfrac{a^2-x^2}{y^2}}=\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$，

又 $x^2=a^2-\dfrac{a^2}{b^2}y^2$，所以 $\tan\angle AQB=\dfrac{2a}{\left(1-\dfrac{a^2}{b^2}\right)y^2}$，因为 $1-\dfrac{a^2}{b^2}<0$，$\angle AQB\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，

所以当 $y=b$ 时，$\tan\angle AQB$ 取得最大值，此时 $\angle AQB$ 最大，

所以当点 Q 为椭圆短轴的端点时，$\angle AQB$ 最大.



【例 1】已知 F_1，F_2 为椭圆的两个焦点，若椭圆上存在点 P 使得 $\angle F_1PF_2=60°$，求椭圆离心率的取值范围.

【分析】因为存在 $\angle F_1PF_2=60°$，所以只要最大角 $\angle F_1P_0F_2\geqslant 60°$，即 $\dfrac{1}{2}\angle F_1P_0F_2\geqslant 30°$，

即 $\tan\angle F_1P_0O\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，也就是 $\dfrac{c}{b}\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，从而求出 e 的范围.

【解析】由结论 1 知：当点 P_0 为椭圆短轴的端点时，$\angle F_1P_0F_2$ 最大，

因此要最大角 $\angle F_1P_0F_2\geqslant 60°$，即 $\dfrac{1}{2}\angle F_1P_0F_2\geqslant 30°$，即 $\tan\angle F_1P_0O\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，也就是 $\dfrac{c}{b}\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

解不等式 $\dfrac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，得 $e\geqslant\dfrac{1}{2}$，故椭圆的离心率 $e\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right)$.

【例 2】已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，长轴两端点为 A，B，如果椭圆上存在一点 Q 满足 $\angle AQB=120°$，求这个椭圆的离心率的取值范围.

【分析】由结论 2 知：当点 P_0 为椭圆短轴的端点时，$\angle AP_0B$ 最大，

因此只要最大角不小于 120° 即可.

【解析】由结论 2 知：当点 P_0 为椭圆短轴的端点时，$\angle AP_0B$ 最大，

因此只要 $\angle AP_0B \geqslant 120°$，则一定存在点 Q，使 $\angle AQB=120°$，$\frac{1}{2}\angle AQB \geqslant 60°$，

即 $\angle AP_0O \geqslant 60°$，所以 $\frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}} \geqslant \sqrt{3}$，得 $e \geqslant \frac{\sqrt{6}}{3}$，

故椭圆的离心率的取值范围是 $e \in \left[\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right)$.

大招 4：椭圆的第三定义

【结论】已知 M，N 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的两动点，P 是椭圆上异于 M，N 的一点，则

M、N 两点关于原点对称 $\Longleftrightarrow$ $k_{PM}\cdot k_{PN}=-\frac{b^2}{a^2}$

【例 1】设 M，N 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的长轴的两个端点，点 P 在椭圆上，则 $k_{PM}\cdot k_{PN}$ 为 (　　)

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

【答案】A

【解析】由前面所述的圆锥曲线第三定义易得 $k_{PM}\cdot k_{PN}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{3}{4}$. 故选 A.

【例 2】椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2，点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2，-1]$，那么直线 PA_1 斜率的取值范围是 (　　)

A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$　　D. $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$

【答案】B

【解析】设点 $P(x，y)$，则

直线 PA_1 的斜率为 $k_1=\frac{y-0}{x-(-2)}=\frac{y}{x+2}$，

直线 PA_2 的斜率为 $k_2=\frac{y-0}{x-2}=\frac{y}{x-2}$，

$k_1\cdot k_2=\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=\frac{y^2}{x^2-4}$.

$\because$ 点 $P(x，y)$ 满足 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

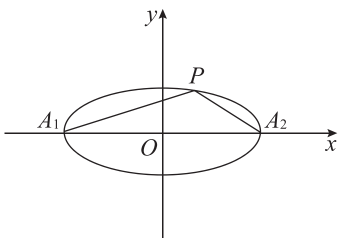
$\therefore\ x^2+\dfrac{4y^2}{3}=4$，即 $x^2-4=-\dfrac{4y^2}{3}$，

故 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y^2}{-\dfrac{4}{3}y^2}=-\dfrac{3}{4}$，$k_1=-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{k_2}$，

$\because\ k_2\in[-2,\ -1]$，$k_1=-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{k_2}$ 是增函数，

$\therefore\ k_1\in\left[\dfrac{3}{8},\ \dfrac{3}{4}\right]$，

应选 B．



大招 5：点差法

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 是圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两个不重合的两点，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，$\because$ $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 是直线 AB 的斜率，$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 是线段 AB 的中点，此种方法称为代点作差法，简称点差法.

【例 1】已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，求斜率为 2 的平行弦中点的轨迹方程.

【解析】设弦的两个端点分别为 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，PQ 的中点为 $M(x, y)$.

则 $\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$，①

$\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1$，②

① − ②得：$\frac{x_1^2-x_2^2}{2}+(y_1^2-y_2^2)=0$，

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(y_1+y_2)=0$.

又 $x_1+x_2=2x$，$y_1+y_2=2y$，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，

$\therefore x+4y=0$.

$\because$ 弦中点轨迹在已知椭圆内，

$\therefore$ 所求弦中点的轨迹方程为 $x+4y=0$（在已知椭圆内）.

【例 2】已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上不同的三点 $A(x_1,\ y_1)$，$B\left(4,\ \frac{9}{5}\right)$，$C(x_2,\ y_2)$ 与焦点 $F(4,\ 0)$ 的距离成等差数列，若线段 AC 的垂直平分线与 x 轴的交点为 T，求直线 BT 的斜率 k.

【解析】$\because x_1+x_2=8$，

$\therefore$ 设线段 AC 的中点为 $D(4,\ y_0)$.

又 A、C 在椭圆上，

$\therefore \frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{9}=1$，①

$\frac{x_2^2}{25}+\frac{y_2^2}{9}=1$，②

① − ②得：$\frac{x_1^2-x_2^2}{25}=-\frac{y_1^2-y_2^2}{9}$，

$\therefore \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{9(x_1+x_2)}{25(y_1+y_2)}=-\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{2y_0}=-\frac{36}{25y_0}$.

$\therefore$ 直线 DT 的斜率 $k_{DT}=\frac{25y_0}{36}$，

$\therefore$ 直线 DT 的方程为 $y-y_0=\frac{25y_0}{36}(x-4)$.

令 $y=0$，得 $x=\frac{64}{25}$，即 $T\left(\frac{64}{25},\ 0\right)$，

$\therefore$ 直线 BT 的斜率 $k=\frac{\frac{9}{5}-0}{4-\frac{64}{25}}=\frac{5}{4}$.

大招 6：椭圆中的垂径定理

【结论】已知 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 不垂直于 x 轴的任意一条弦，P 是 AB 的中点，O 为椭圆的中心，求证：直线 AB 和直线 OP 的斜率之积是定值 $-\frac{b^2}{a^2}$.

【证明】设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 且 $x_1\neq x_2$，

则 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，①

$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，②

① − ②得：$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}=-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}$，

$\therefore\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}$，$\therefore\ k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}$.

又 $k_{OP}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，$\therefore\ k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{k_{OP}}$，$\therefore\ k_{AB}\cdot k_{OP}=-\frac{b^2}{a^2}$（定值）.

【例 1】已知 A，B，C 是椭圆 W：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的三个点，O 是坐标原点.

（1）当点 B 是 W 的右顶点，且四边形 $OABC$ 为菱形时，求此菱形的面积；

（2）当点 B 不是 W 的顶点时，判断四边形 $OABC$ 是否可能为菱形，并说明理由.

【解析】（1）椭圆 W：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右顶点 B 的坐标为 $(2,\ 0)$，

因为四边形 $OABC$ 为菱形，所以 AC 与 OB 相互垂直平分，

所以可设 $A(1,\ m)$，代入椭圆方程得 $\frac{1}{4}+m^2=1$，即 $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以菱形 $OABC$ 面积是 $\frac{1}{2}|OB|\cdot|AC|=\frac{1}{2}\times2\times2|m|=\sqrt{3}$.

（2）四边形 $OABC$ 不可能为菱形，理由如下：

假设四边形 $OABC$ 为菱形.

因为点 B 不是 W 的顶点，且直线 AC 不过原点，

所以可设 AC 的方程为 $y=kx+m(k\neq0,\ m\neq0)$.

由 $\begin{cases} x^2+4y^2=4, \\ y=kx+m \end{cases}$ 消去 y 并整理得

$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0.$

设 $A(x_1,\ y_1)$，$C(x_2,\ y_2)$，则

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{4km}{1+4k^2}$，$\dfrac{y_1+y_2}{2}=k\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+m=\dfrac{m}{1+4k^2}$.

所以 AC 的中点为 $M\left(-\dfrac{4km}{1+4k^2},\ \dfrac{m}{1+4k^2}\right)$.

因为 M 为 AC 和 OB 的交点，所以直线 OB 的斜率为 $-\dfrac{1}{4k}$.

因为 $k\cdot\left(-\dfrac{1}{4k}\right)\neq -1$，所以 AC 和 OB 不垂直.

所以四边形 $OABC$ 不是菱形，与假设矛盾.

所以当点 B 不是 W 的顶点时，四边形 $OABC$ 不可能是菱形.

【例 2】已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点 $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 l：$y=kx+m(k\neq 0,\ m\neq 0)$ 与椭圆 C 交于 A、B 两点，线段 AB 中点为 M，点 O 为坐标原点. 证明：直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值.

【解析】（1）由题意得 $\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ 解得 $a^2=4$，$b^2=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）法一：设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$M(x_M,\ y_M)$.

将 $y=kx+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)>0$，$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1}$，

故 $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{4km}{4k^2+1}$，$y_M=kx_M+m=\dfrac{m}{4k^2+1}$.

于是直线 OM 的斜率 $k_{OM}=\dfrac{y_M}{x_M}=-\dfrac{1}{4k}$，即 $k_{OM}\cdot k=-\dfrac{1}{4}$.

所以直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值 $-\frac{1}{4}$.

法二：

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$M(x_M, y_M)$. 则 $x_M \neq 0$，$x_1 - x_2 \neq 0$，

由 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1, \\ \dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2=1 \end{cases}$ 得 $\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

则 $\dfrac{y_M(y_1-y_2)}{x_M(x_1-x_2)}=-\dfrac{1}{4}$,

即 $k_{OM}\cdot k=-\dfrac{1}{4}$.

所以直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值 $-\frac{1}{4}$.

大招 7：焦点弦比例模型

【结论】设圆锥曲线 C 的焦点 F 在 x 轴上，过点 F 且斜率为 k 的直线 l 交曲线 C 于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$，则 $e=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$.

【证明】如下图所示，过 A，B 分别作准线的垂线，垂足为 A_1，B_1，

过 B 作 $BC\perp AA_1$，垂足为 C.

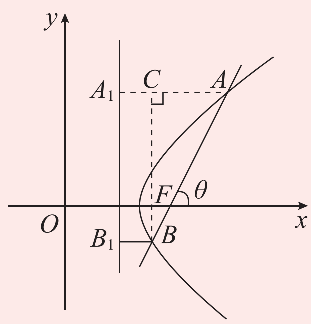
由圆锥曲线的第二定义可知 $|AA_1|=\dfrac{|AF|}{e}$，$|BB_1|=\dfrac{|BF|}{e}$，从而 $|AC|=|AA_1|-|BB_1|=\dfrac{|AF|-|BF|}{e}$，

又因为 $|AF|=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}|AB|$，$|BF|=\dfrac{1}{1+\lambda}|AB|$，所以 $|AC|=\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}-\dfrac{1}{\lambda+1}\right)|AB|$，

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$|BC|=k|AC|$.

由勾股定理 $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$，可得 $e=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$，若倾斜角为 θ，

则 $e=\sqrt{1+\tan^2\theta}\cdot\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$，即 $|e\cos\theta|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$.



【注】如果已知直线的倾斜角 θ，则 $|e\cos\theta|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$. 当曲线的焦点在 y 轴上时，$e=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$.

【注】要利用公式 $e=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$ 求解，需要注意对应 λ 的值，实际上，无论是 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$ 中的 λ，还是 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$ 中的 λ，$\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$ 的值都是一样的. 所以只需要知道其中任一个 λ 的值即可.

【注】根据圆锥曲线的第二定义，可以知道抛物线的离心率 $e=1$.

方法总结：在圆锥曲线中，当涉及模型中的情形，即过焦点的直线与曲线相交的 A，B 两点且满足 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$ 或 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$ 时，一定要注意“ $e=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$”等结论的应用.

【例 1】已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，则 C 的离心率为 ( )

A. $\dfrac{6}{5}$　　B. $\dfrac{7}{5}$　　C. $\dfrac{5}{8}$　　D. $\dfrac{9}{5}$

【答案】A

【解析】由结论得 $e=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\left|\dfrac{4-1}{4+1}\right|=\dfrac{6}{5}$，故选 A.

【例 2】已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线与 C 相交于 A、B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 $k=$ ( )

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】B

【解析】由结论得 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{3-1}{3+1}\right|$，解得 $k=\sqrt{2}$，故选 B.

大招 8：椭圆斜率之和为 0 模型

【结论】已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 及定点 $A(x_0,\ y_0)$，E，F 是 C 上的两个动点，如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数，证明直线 EF 的斜率为定值.

【解析】设 $E(x_1,\ y_1)$、$F(x_2,\ y_2)$，设直线 AE 的方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$，

令 $m=y_0-kx_0$，联立方程 $\begin{cases} y=k(x-x_0)+y_0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$

整理得 $(k^2a^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$，则 $x_0x_1=\dfrac{a^2m^2-a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$，

解得 $x_1=\dfrac{a^2[(y_0-kx_0)^2-b^2]}{(a^2k^2+b^2)x_0}$，同理 $x_2=\dfrac{a^2[(y_0+kx_0)^2-b^2]}{(a^2k^2+b^2)x_0}$.

则直线 EF 的斜率 $k_{EF}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2kx_0-k(x_2+x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$ 为定值.

【注】实际上，$k_{OA}=\dfrac{y_0}{x_0}$，故 $k_{OA}\cdot k_{EF}=\dfrac{b^2}{a^2}$ 显然成立.

【例 1】已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(0,\ \sqrt{2})$，且满足 $a+b=3\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线交椭圆 C 于两个不同点 A，B，点 M 的坐标为 $(2,\ 1)$，设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1，k_2.

① 若直线过椭圆 C 的左顶点，求此时 k_1，k_2 的值；

② 试探究 k_1+k_2 是不是定值，并说明理由.

【解析】（1）由椭圆过点 $(0,\ \sqrt{2})$，则 $b=\sqrt{2}$.

又 $a+b=3\sqrt{2}$，

故 $a=2\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）① 若直线过椭圆的左顶点，则直线的方程是 l：$y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{2}$，

由 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{2}, \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=\sqrt{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=-2\sqrt{2}, \\ y_2=0. \end{cases}$

故 $k_1=-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，$k_2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

② k_1+k_2 为定值，且 $k_1+k_2=0$.

设直线的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+m$.

由 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+m, \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消 y，得 $x^2+2mx+2m^2-4=0$.

当 $\Delta=4m^2-8m^2+16>0$，即 $-2<m<2$ 时，直线与椭圆交于两点.

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-4$.

又 $k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$，$k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$，

故 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

又 $y_1=\dfrac{1}{2}x_1+m$，$y_2=\dfrac{1}{2}x_2+m$，

所以 $(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)=\left(\dfrac{1}{2}x_1+m-1\right)(x_2-2)+\left(\dfrac{1}{2}x_2+m-1\right)(x_1-2)$

$=x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-4(m-1)=2m^2-4+(m-2)(-2m)-4(m-1)=0$.

故 $k_1+k_2=0$.

【例 2】已知，椭圆 C 过点 $A\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$，两个焦点为 $(-1, 0)$，$(1, 0)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）E，F 是椭圆 C 上的两个动点，如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数，证明直线 EF 的斜率为定值，并求出这个定值.

【解析】（1）由题意，$c=1$，可设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{1+b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

因为 A 在椭圆上，所以 $\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$，解得 $b^2=3$ 或 $b^2=-\dfrac{3}{4}$（舍去）.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设直线 AE 方程为 $y=k(x-1)+\frac{3}{2}$，代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得

$$(3+4k^2)x^2+4k(3-2k)x+4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12=0.$$

设 $E(x_E, y_E)$，$F(x_F, y_F)$. 因为点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上，

所以 $x_E=\dfrac{4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12}{3+4k^2}$，$y_E=kx_E+\frac{3}{2}-k$.

又直线 AF 的斜率与 AE 的斜率互为相反数，在上式中以 $-k$ 代 k，

可得 $x_F=\dfrac{4\left(\frac{3}{2}+k\right)^2-12}{3+4k^2}$，$y_F=-kx_F+\frac{3}{2}+k$.

所以直线 EF 的斜率 $k_{EF}=\dfrac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\dfrac{-k(x_F+x_E)+2k}{x_F-x_E}=\dfrac{1}{2}$.

即直线 EF 的斜率为定值，其值为 $\frac{1}{2}$.

大招 9：椭圆斜率之和（积）为定值模型

【结论】直线 AB 与椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 交于 A，B 两点，P 为上顶点.

（1）若 $k_{PA}\times k_{PB}=t$，则直线 AB 过定点 $\left(0,\ \dfrac{b^2+a^2t}{b^2-a^2t}b\right)$；

（2）若 $k_{PA}+k_{PB}=t$，则直线 AB 过定点 $\left(-\dfrac{2b}{t},\ -b\right)$.

【证明】设直线 AB 方程为 $y=kx+m$，

$$\begin{cases}y=kx+m,\\ b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,\end{cases}\quad (b^2+k^2a^2)x^2+2kma^2x+a^2(m^2-b^2)=0,$$

$$\Delta=4a^2b^2(k^2a^2+b^2-m^2)>0,\ x_1+x_2=\frac{-2kma^2}{k^2a^2+b^2},\ x_1\cdot x_2=\frac{a^2(m^2-b^2)}{k^2a^2+b^2},$$

（1）$k_{PA}\times k_{PB}=t\Leftrightarrow\dfrac{y_1-b}{x_1}\times\dfrac{y_2-b}{x_2}=t\Leftrightarrow\dfrac{kx_1+m-b}{x_1}\times\dfrac{kx_2+m-b}{x_2}=t$,

$$(k^2-t)x_1x_2+k(m-b)(x_1+x_2)+(m-b)^2=0$$

$$\Rightarrow(k^2-t)\frac{a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}+k(m-b)\frac{-2a^2km}{a^2k^2+b^2}+(m-b)^2=0,$$

等式两边同时除以 $(m-b)$，化简得：$(k^2-t)a^2(m+b)-2a^2k^2m+(m-b)(a^2k^2+b^2)=0\Rightarrow$

$$a^2k^2m+a^2k^2b-a^2mt-a^2bt-2a^2k^2m+a^2k^2m+b^2m-a^2k^2b-b^3=0\Rightarrow m=\frac{b^2+a^2t}{b^2-a^2t}b,$$

所以直线 AB 过定点 $\left(0,\ \dfrac{b^2+a^2t}{b^2-a^2t}b\right)$.

（2）$k_{PA}+k_{PB}=t\Leftrightarrow\dfrac{y_1-b}{x_1}+\dfrac{y_2-b}{x_2}=t\Leftrightarrow\dfrac{kx_1+m-b}{x_1}+\dfrac{kx_2+m-b}{x_2}=t$

$$\Rightarrow 2k+\frac{(m-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=t$$

$$\Rightarrow k=\frac{t(m+b)}{2b}\Rightarrow y=\frac{t(m+b)}{2b}x+m\Rightarrow 2by-tbx=(tx+2b)m\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{2b}{t},\\ y=-b,\end{cases}$$

所以直线 AB 过定点 $\left(-\dfrac{2b}{t},\ -b\right)$.

推论：设 $P_0(x_0,\ y_0)$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点，P_1P_2 为椭圆的动弦，且弦 P_0P_1，P_0P_2 斜率存在，记为 k_1，k_2，若 $k_1+k_2=m$，则直线 P_1P_2 通过定点 $M\left(x_0-\dfrac{2y_0}{m},\ -\dfrac{2b^2x_0}{a^2m}-y_0\right)$.

【例 1】已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，四点 $P_1(1,\ 1)$，$P_2(0,\ 1)$，$P_3\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆上.

（1）求椭圆方程；

（2）设直线 l 不经过点 P_2 且与椭圆相交于 A，B 两点，若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率之和为 -1，证明：l 过定点.

【解析】（1）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）① 当直线 l 斜率不存在时，设 l：$x=m$，$A(m,\ y_A)$，$B(m,\ -y_A)$.

$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\dfrac{y_A-1}{m}+\dfrac{-y_A-1}{m}=\dfrac{-2}{m}=-1$，得 $m=2$，

此时直线 l 过椭圆右顶点，无两个交点，故不满足.

② 当直线 l 斜率存在时，设 l：$y=kx+m(m\neq 1)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}\Rightarrow (1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$，

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$，

$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{x_2(kx_1+m)-x_2+x_1(kx_2+m)-x_1}{x_1x_2}$

$=\dfrac{2kx_1x_2+(m-1)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=2k+\dfrac{-8km(m-1)}{4(m^2-1)}=2k+\dfrac{-2km}{m+1}=-1$，

又 $m\neq 1\Rightarrow m=-2k-1$，此时 $\varDelta=16(4k^2+1-m^2)=-64k$，存在 k 使得 $\varDelta>0$，

所以直线 l 的方程为：$y=kx-2k-1\Leftrightarrow y+1=k(x-2)$，$l$ 过定点 $(2,\ -1)$.

【例 2】已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，椭圆 C 上一点 $A(2\sqrt{3},\ -1)$ 到两焦点距离之和为 8．若点 B 是椭圆 C 的上顶点，点 P，Q 是椭圆 C 上异于点 B 任意两点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 $BP\perp BQ$，且满足 $3\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{DQ}$ 的点 D 在 y 轴上，求直线 BP 的方程；

（3）若直线 BP 与 BQ 的斜率之积为常数 $\lambda(\lambda<0)$，试判断直线 PQ 是否经过定点．若经过定点，请求出定点坐标；若不经过定点，请说明理由.

【解析】（1）设椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

根据椭圆的定义可得 $2a=8$，所以 $a=4$，

因为点 $A(2\sqrt{3},-1)$ 在椭圆 C 上，

所以 $\dfrac{12}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，

所以解得 $b^2=4$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（2）因为 $BP\perp BQ$，B、P、Q 在椭圆 C 上，

所以直线 BP 的斜率存在且不为 0，

设直线 BP 的斜率为 $k(k\neq 0)$，

则直线 BQ 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$，

所以直线 BP 的方程为 $y=kx+2$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+2\end{cases}$ 得到 $(4k^2+1)x^2+16kx=0$，

所以得到 $x_P=-\dfrac{16k}{4k^2+1}$，

用 $-\dfrac{1}{k}$ 代替 x_P 中的 k，得到 $x_Q=\dfrac{16k}{k^2+4}$，

因为 $3\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{DQ}$ 且点 D 在 y 轴上，

所以 $-3x_P=2x_Q$，

所以 $\dfrac{48k}{4k^2+1}=\dfrac{32k}{k^2+4}$，

因为 $k\neq 0$，所以 $2(4k^2+1)=3(k^2+4)$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

所以直线 BP 的方程为 $y=\pm\sqrt{2}x+2$.

（3）设直线 PQ 的方程为 $y=mx+n$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=mx+n\end{cases}$ 得到 $(4m^2+1)x^2+8mnx+4n^2-16=0$，

所以 $\Delta=64m^2n^2-4(4m^2+1)(4n^2-16)=256m^2-16n^2+64>0$，

即 $16m^2-n^2+4>0$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{8mn}{4m^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4n^2-16}{4m^2+1}$，

所以 $k_{BP}\cdot k_{BQ}=\dfrac{y_1-2}{x_1}\cdot\dfrac{y_2-2}{x_2}$

$=\dfrac{y_1y_2-2(y_1+y_2)+4}{x_1x_2}$

$=\dfrac{(mx_1+n)(mx_2+n)-2(mx_1+n+mx_2+n)+4}{x_1x_2}$

$=\dfrac{m^2x_1x_2+(mn-2m)(x_1+x_2)+n^2-4n+4}{x_1x_2}=\lambda$,

所以 $(m^2-\lambda)x_1x_2+(mn-2m)(x_1+x_2)+(n-2)^2=0$,

所以 $(m^2-\lambda)\dfrac{4n^2-16}{4m^2+1}+m(n-2)\left(-\dfrac{8mn}{4m^2+1}\right)+(n-2)^2=0$,

所以 $4(m^2-\lambda)(n-2)(n+2)-8m^2n(n-2)+(n-2)^2(4m^2+1)=0$,

若 $n=2$，PQ 与椭圆的一个交点为 B，

而点 P，Q 是椭圆 C 上异于点 B 的任意两点，矛盾，所以 $n\neq2$，

所以可以继续化简为 $4(m^2-\lambda)(n+2)-8m^2n+(n-2)(4m^2+1)=0$,

整理可得 $-4\lambda n-8\lambda+n-2=0$,

所以 $n=-\dfrac{8\lambda+2}{4\lambda-1}$（为定值），

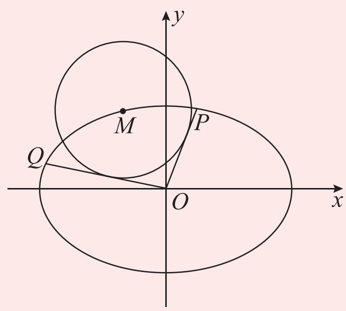
所以直线 PQ 过定点 $\left(0,-\dfrac{8\lambda+2}{4\lambda-1}\right)$.

大招 10：椭圆和圆结合模型

设点 $M(x_0, y_0)$ 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点，从原点 O 向圆 C：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 作两条切线分别与椭圆 C 交于点 P，Q，直线 OP，OQ 的斜率分别记为 k_1，k_2.

（1）$k_1\cdot k_2$ 为定值 $-\dfrac{b^2}{a^2}$；

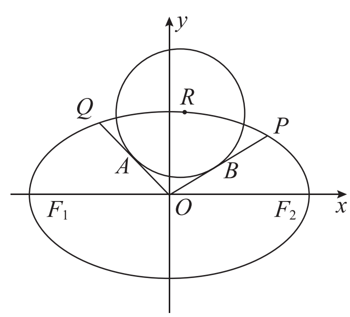
（2）$|OP|^2+|OQ|^2$ 为定值 a^2+b^2.



【例 1】如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $R(x_0, y_0)$ 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 上的一点，从原点 O 向圆 R：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=8$ 作两条切线，分别交椭圆于 P，Q.

（1）若直线 OP，OQ 的斜率存在，并记为 k_1，k_2，求 k_1，k_2 的值；

（2）试问 $|OP|^2+|OQ|^2$ 是不是定值？若是，求出该值；若不是，说明理由.



【解析】(1) 因为直线 OP: $y=k_1x$ 和 OQ: $y=k_2x$ 都与圆 R 相切,

所以 $\dfrac{|k_1x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_1^2}}=2\sqrt{2}$, $\dfrac{|k_2x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_2^2}}=2\sqrt{2}$,

化简得 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0^2-8}{x_0^2-8}$,

因为点 $R(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上, 所以 $\dfrac{x_0^2}{24}+\dfrac{y_0^2}{12}=1$, 即 $y_0^2=12-\dfrac{1}{2}x_0^2$,

所以 $k_1k_2=\dfrac{4-\dfrac{1}{2}x_0^2}{x_0^2-8}=-\dfrac{1}{2}$.

(2) 方法一: ①当直线 OP、OQ 不落在坐标轴上时, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

由①知 $2k_1k_2+1=0$, 所以 $\dfrac{2y_1y_2}{x_1x_2}=1$, 故 $y_1^2y_2^2=\dfrac{1}{4}x_1^2x_2^2$,

因为 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 在椭圆 C 上,

所以 $\dfrac{x_1^2}{24}+\dfrac{y_1^2}{12}=1$, $\dfrac{x_2^2}{24}+\dfrac{y_2^2}{12}=1$,

即 $y_1^2=12-\dfrac{1}{2}x_1^2$, $y_2^2=12-\dfrac{1}{2}x_2^2$, 所以 $\left(12-\dfrac{1}{2}x_1^2\right)\left(12-\dfrac{1}{2}x_2^2\right)=\dfrac{1}{4}x_1^2x_2^2$,

整理得 $x_1^2+x_2^2=24$, 所以 $y_1^2+y_2^2=\left(12-\dfrac{1}{2}x_1^2\right)+\left(12-\dfrac{1}{2}x_2^2\right)=12$,

所以 $OP^2+OQ^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=(x_1^2+x_2^2)+(y_1^2+y_2^2)=36$.

方法二: ①当直线 OP、OQ 不落在坐标轴上时, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y=kx, \\ \dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{12}=1, \end{cases}$ 解得 $x_1^2=\dfrac{24}{1+2k_1^2}$, $y_1^2=\dfrac{24k_1^2}{1+2k_1^2}$, $\therefore\ x_1^2+y_1^2=\dfrac{24(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}$.

同理, 得 $x_2^2+y_2^2=\dfrac{24(1+k_2^2)}{1+2k_2^2}$, 由①知 $2k_1k_2+1=0$, 得 $k_1k_2=-\dfrac{1}{2}$.

所以 $OP^2+OQ^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=\dfrac{24(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}+\dfrac{24(1+k_2^2)}{1+2k_2^2}$

$$=\frac{24(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}+\frac{24\left[1+\left(-\dfrac{1}{2k_1}\right)^2\right]}{1+2\left(-\dfrac{1}{2k_1}\right)^2}=\frac{36+72k_1^2}{1+2k_1^2}=36.$$

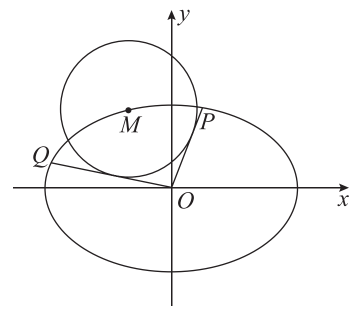
(2) 当直线 OP、OQ 落在坐标轴上时, 显然有 $OP^2+OQ^2=36$.

综上: $OP^2+OQ^2=36$.

【例 2】如图，O 为坐标原点，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，以椭圆 C 的长轴长、短轴长分别为两邻边长的矩形的面积为 8.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 P，Q，M 是椭圆上的点，且圆 M 与直线 OP、OQ 相切，$k_{OP}\cdot k_{OQ}=-\frac{1}{4}$，求 M 的半径 r.



【解析】（1）依题意可知 $\begin{cases}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ 2a\cdot 2b=8,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1.\end{cases}$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）设 $M(x_0，y_0)$，由条件可得直线 OP 的方程为 $y=k_{OP}x$，由直线 OP 与圆 M 相切，

可得 $\frac{|y_0-k_{OP}x_0|}{\sqrt{k_{OP}^2+1}}=r$，由此可得 $(x_0^2-r^2)k_{OP}^2-2x_0y_0k_{OP}+y_0^2-r^2=0$.

同理可得 $(x_0^2-r^2)k_{OQ}^2-2x_0y_0k_{OQ}+y_0^2-r^2=0$，

所以 k_{OP}，k_{OQ} 是方程 $(x_0^2-r^2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-r^2=0$ 的两个不相等实根，

由根与系数的关系得 $k_{OP}k_{OQ}=\frac{y_0^2-r^2}{x_0^2-r^2}$，

又 $k_{OP}k_{OQ}=-\frac{1}{4}$，由此得 $\frac{y_0^2-r^2}{x_0^2-r^2}=-\frac{1}{4}$，

即 $x_0^2+4y_0^2=5r^2$，结合 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，得 $5r^2=4$，$r=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

大招 11：椭圆中的仿射变换

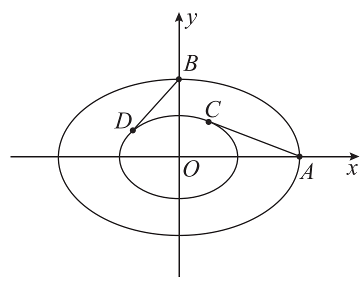
定义压缩变换 τ

xOy 平面上的所有点横坐标不变，纵坐标变为原来的 $\frac{a}{b}$，即 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=\frac{a}{b}y, \end{cases}$ xOy 平面上的椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在压缩变换下变为 $x'O'y'$ 平面上的圆 C'：$x'^2+y'^2=a^2$.

1. 研究直线的斜率

在压缩变换 τ 下，$x'O'y'$ 平面上直线的斜率 k' 变为原来 xOy 平面上对应直线斜率 k 的 $\frac{a}{b}$ 倍，即 $k'=\frac{a}{b}k$.

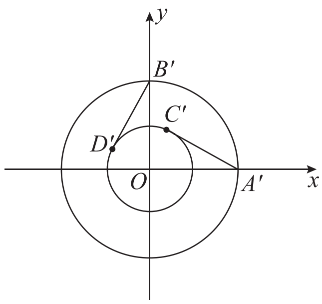
【例 1】北京奥运会主体育场“鸟巢”的钢结构俯视图如图所示，内外两圈的钢骨架是离心率相同的椭圆，外层椭圆顶点向内层椭圆引切线 AC，BD，设内层椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，外层椭圆方程可设为 $\frac{x^2}{(ma)^2}+\frac{y^2}{(mb)^2}=1(a>b>0,\ m>1)$，若 AC 与 BD 的斜率之积为 $-\frac{9}{16}$，求椭圆的离心率.



【解析】定义伸缩变换：φ：$\begin{cases} x'=bx, \\ y'=ay, \end{cases}$ 则在 φ 的作用下内外层椭圆分别对应圆 $x^2+y^2=a^2b^2$ 和圆 $x^2+y^2=(mab)^2$，点 A，B，C，D 分别对应点 A'，B'，C'，D'. 由题知 $A'C'$，$B'D'$ 是圆 $x^2+y^2=a^2b^2$ 的切线.

由已知 $k_{AC}k_{BD}=-\dfrac{9}{16}$，由圆的性质易知 $A'C'\perp B'D'$，即 $k_{A'C'}k_{B'D'}=-1$ 得 $k_{A'C'}k_{B'D'}=\dfrac{a}{b}k_{AC}\cdot\dfrac{a}{b}k_{BD}$，

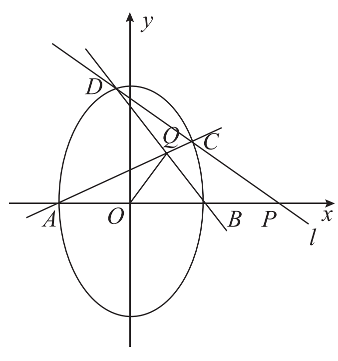
从而 $-1=-\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{a^2}{b^2}$，可得离心率 $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.



2. 研究横坐标（或纵坐标）之间的关系.

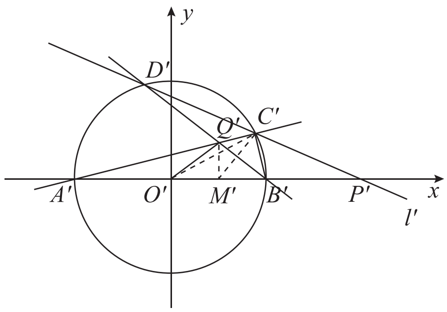
$x'O'y'$ 平面上对应点 P' 与原来 xOy 面上点 P 的横坐标相同，即 $x_P{}'=x_P$. 纵坐标变为原来的 $\dfrac{a}{b}$，即 $y_P{}'=\dfrac{a}{b}y_P$.

【例 2】如图所示，过 $(0,1)$ 作直线 l 与椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 交于 C，D 两点，与 x 轴交于点 P，AC 与 BD 交于点 Q. 求证 $x_P\cdot x_Q$ 为定值.



【解析】先把 xOy 平面上所有点横坐标不变，纵坐标变为原来的 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，得到 $x'O'y'$ 平面，于是得到问题：

“如图，在 $x'O'y'$ 平面内，过 $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 作直线 l' 与圆 $x'^2+y'^2=1$ 交于 C'，D' 两点，与 x 轴交于点 P'，$A'C'$ 与 $B'D'$ 交于点 Q'．求证 $x_P{}'\cdot x_Q{}'$ 为定值.”



证明：事实上，过 $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 是一个多余条件，只要 l' 与圆相交即可.

作 $Q'M'\perp A'B'$ 于 M'，连接 $B'C'$，再连接 $O'C'$，$C'M'$，

设弧 $A'D'$ 为 α 弧度，弧 $B'C'$ 为 β 弧度，

则 $\angle C'P'O'=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\angle C'Q'B'=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，

又 Q'，C'，B'，M' 四点共圆，

所以 $\angle C'M'B'=\angle C'Q'B'=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，

所以 $\angle O'C'M'=\angle C'M'B'-\angle B'O'C'=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\beta=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，

所以 $\triangle O'C'M'\backsim\triangle O'P'C'$，

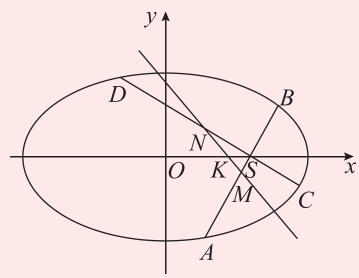
所以 $|O'C'|^2=|O'M'|\cdot|O'P'|$，

所以 $x_P{}'\cdot x_Q{}'=|O'P'|\cdot|O'M'|=r^2=1$.

由于，在压缩变换中横坐标不变，所以在 xOy 平面上，$x_P\cdot x_Q=1$.

大招 12：椭圆中互相垂直的弦过定点问题

【结论】过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的长轴上任意一点 $S(s,\ 0)(-a<s<a)$ 作两条互相垂直的弦 AB，CD. 若弦 AB，CD 的中点分别为 M，N，那么直线 MN 恒过定点 $\left(\frac{a^2s}{a^2+b^2},\ 0\right)$.



【证明】设 AB 的直线为 $x=my+s$，则 CD 的直线方程为 $x=-\frac{1}{m}y+s$，

$\begin{cases}x=my+s,\\ b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,\end{cases}$ $(m^2b^2+a^2)y^2+2b^2msy+b^2(s^2-a^2)=0$，

$\Delta=4a^2b^2(m^2b^2+a^2-s^2)>0$，$y_1+y_2=\frac{-2msb^2}{m^2b^2+a^2}$，$y_1\cdot y_2=\frac{b^2(s^2-a^2)}{m^2b^2+a^2}$，

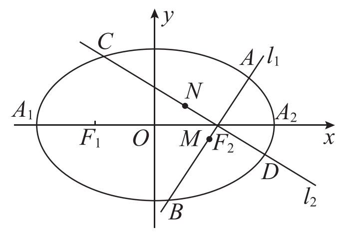
由中点公式得 $M\left(\frac{a^2s}{m^2b^2+a^2},\ \frac{-msb^2}{m^2b^2+a^2}\right)$，将 m 用 $\frac{-1}{m}$ 代换，

得到 N 的坐标 $\left(\frac{a^2sm^2}{m^2a^2+b^2},\ \frac{msb^2}{m^2a^2+b^2}\right)$，

MN 的直线方程为 $y+\frac{b^2sm}{b^2m^2+a^2}=\frac{(a^2+b^2)m}{a^2(m^2-1)}\left(x-\frac{a^2s}{b^2m^2+a^2}\right)$，令 $y=0$，得 $x=\frac{a^2s}{a^2+b^2}$，

所以直线 MN 恒过定点 $\left(\frac{a^2s}{a^2+b^2},\ 0\right)$.

【例 1】已知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左右焦点，过 F_2 作两条互相垂直的直线 l_1 与 l_2（均不与 x 轴重合）分别与椭圆交于 A、B、C、D 四点．线段 AB，CD 的中点分别是 M，N，求证：直线 MN 过定点，并求出该定点坐标．



【解析】设直线 AB：$y=k(x-1)$，联立椭圆方程 $3x^2+4y^2=12$ 得：

$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，$x_M=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8k^2}{4k^2+3}=\dfrac{4k^2}{4k^2+3}$，$y_M=-\dfrac{3k}{4k^2+3}$，

$x_N=\dfrac{\frac{4}{k^2}}{\frac{4}{k^2}+3}=\dfrac{4}{3k^2+4}$，$y_N=-\dfrac{1}{k}(x_N-1)=\dfrac{3k}{3k^2+4}$．

由结论可知该点必在 x 轴上．

设该定点坐标 $(t,0)$，$\dfrac{-y_M}{t-x_M}=\dfrac{y_N-y_M}{x_N-x_M}\Rightarrow t=\dfrac{x_My_N-y_Mx_N}{y_N-y_M}$，代入 M，N 坐标化简得

$t=\dfrac{4}{7}$，所以过定点 $\left(\dfrac{4}{7},0\right)$．

【例 2】已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过右焦点 $F(1,0)$ 作两条互相垂直的直线 l_1，l_2，分别交椭圆 E 于 A、B 和 C、D 四点，设 AB、CD 的中点为 M、N．

（1）求椭圆 E 的方程．

（2）直线 MN 是否经过定点？若是，求出定点坐标；若否，请说明理由．

【解析】（1）因为椭圆 E 的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$c=1$，

所以 $a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

（2）当直线 l_1 或直线 l_2 的斜率不存在时，

① 若直线 l_1 的斜率不存在，

则 $M(1, 0)$，$N(0, 0)$，

此时直线 MN 为 $y=0$；

② 若直线 l_2 的斜率不存在，

则 $M(0, 0)$，$N(1, 0)$，

此时直线 MN 为 $y=0$；

③ 当直线 l_1 和直线 l_2 的斜率均存在时，

设直线 l_1：$y=k(x-1)$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

则 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，其中 $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{k(x_1+x_2-2)}{2}$，

联立直线 l_1：$y=k(x-1)$ 与椭圆 E：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 并化简得：

$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

所以 $M\left(\dfrac{4k^2}{3+4k^2}, \dfrac{-3k}{3+4k^2}\right)$，

因为直线 l_2 与直线 l_1 垂直，所以直线 l_2 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$，

同理可求出 $N\left(\dfrac{4}{3k^2+4}, \dfrac{3k}{3k^2+4}\right)$.

设直线 MN 与 x 轴的交点为 $(a, 0)$，

则有 $\dfrac{\dfrac{-3k}{3+4k^2}}{\dfrac{4k^2}{3+4k^2}-a}=\dfrac{\dfrac{3k}{3k^2+4}}{\dfrac{4}{3k^2+4}-a}$，

化简得 $a=\dfrac{4k^2+4}{7k^2+7}=\dfrac{4}{7}$，

所以直线 MN 经过定点 $\left(\dfrac{4}{7}, 0\right)$.

大招 13：椭圆焦半径秒杀公式

【结论】如下图所示，F 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，AB 是过焦点的弦且直线 AB 的倾斜角为 θ，点 A 在 x 轴上方，则 $|AF|=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}$，$|BF|=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}$.

【证明】设左准线 l 交 x 轴于点 P，过点 A 作 AM 垂直 x 轴于 M，作 $AN\perp l$ 于 N，

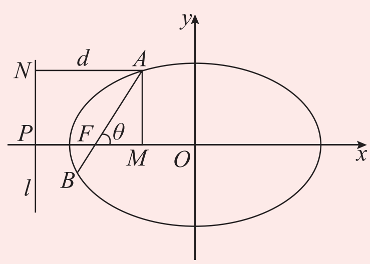
设 d 为点 A 到准线 l 的距离，其中 $|PF|=\dfrac{a^2}{c}-c$，$|MF|=|AF|\cdot|\cos\theta|$，

而 $d=|AN|=|PF|+|FM|=\dfrac{a^2}{c}-c+|AF|\cdot\cos\theta$，

由 $e=\dfrac{|AF|}{d}$，得到 $|AF|=\left(\dfrac{a^2}{c}-c+|AF|\cos\theta\right)\cdot e=\dfrac{b^2}{a}+e|AF|\cos\theta$，

因此 $|AF|=\dfrac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\theta}=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}$.

同理，$|BF|=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}$.



【例 1】过椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点 F 作两条相互垂直的直线分别交椭圆于 A、B、C、D 四点，求 $\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$ 的值.

【解析】依题意，得椭圆的右焦点为 $F(1,0)$，

当直线的斜率不存在时，直线 AB 的方程为 $x=1$，此时直线 CD 的方程为 $y=0$，

由此可得 $|AB|=3$，$|CD|=4$，则 $\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$；

当直线 AB 的斜率存在时，设 AB 的直线方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，

则 CD 的方程 $y=-\dfrac{1}{k}(x-1)$，

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，联立 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{12(k^2+1)}{3+4k^2}$，

同理可得，$|CD|=\dfrac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$，则 $\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}=\dfrac{7(k^2+1)}{12(k^2+1)}=\dfrac{7}{12}$.

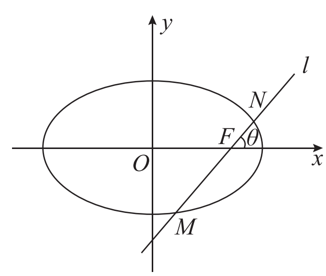
综上，$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}=\dfrac{7}{12}$.

【例 2】在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(4m,\ 0)$（$m>0$，m 为常数），离心率等于 $\dfrac{4}{5}$，过焦点 F、倾斜角为 θ 的直线 l 交椭圆 C 于 M、N 两点.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）当 $\theta=90°$ 时，$\dfrac{1}{MF}+\dfrac{1}{NF}=\dfrac{5\sqrt{2}}{9}$，求实数 m；

（3）试问 $\dfrac{1}{MF}+\dfrac{1}{NF}$ 的值是否与 θ 的大小无关，并证明你的结论.



【解析】（1）$\because$ $c=4m$，椭圆离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$，$\therefore$ $a=5m$. $\therefore$ $b=3m$.

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{25m^2}+\dfrac{y^2}{9m^2}=1$.

（2）在椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中，令 $x=4m$，解得 $y=\pm\dfrac{9m}{5}$.

$\because$ 当 $\theta=90°$ 时，直线 $MN\perp x$ 轴，此时 $FM=FN=\frac{9m}{5}$. $\therefore \frac{1}{MF}+\frac{1}{NF}=\frac{10}{9m}$.

$\because \frac{1}{MF}+\frac{1}{NF}=\frac{5\sqrt{2}}{9}$，$\therefore \frac{10}{9m}=\frac{5\sqrt{2}}{9}$. 解得 $m=\sqrt{2}$.

（3）$\frac{1}{MF}+\frac{1}{NF}$ 的值与 θ 的大小无关.

证明如下：法一：设点 M、N 到右准线的距离分别为 d_1、d_2.

$\because \frac{MF}{d_1}=\frac{4}{5}$，$\frac{NF}{d_2}=\frac{4}{5}$，$\therefore \frac{1}{MF}+\frac{1}{NF}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)$.

又由图可知，$MF\cos\theta+d_1=\frac{a^2}{c}-c=\frac{9m}{4}$，

$\therefore d_1\left(\frac{4}{5}\cos\theta+1\right)=\frac{9m}{4}$. 即 $\frac{1}{d_1}=\frac{4}{9m}\left(\frac{4}{5}\cos\theta+1\right)$.

同理，$\frac{1}{d_2}=\frac{4}{9m}\left[\frac{4}{5}\cos(\pi-\theta)+1\right]=\frac{4}{9m}\left(-\frac{4}{5}\cos\theta+1\right)$，

$\therefore \frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{4}{9m}\left(\frac{4}{5}\cos\theta+1\right)+\frac{4}{9m}\left(-\frac{4}{5}\cos\theta+1\right)=\frac{8}{9m}$.

$\therefore \frac{1}{MF}+\frac{1}{NF}=\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{9m}=\frac{10}{9m}$.

显然该值与 θ 的大小无关.

法二：当直线 MN 的斜率不存在时，由（2）知 $\frac{1}{MF}+\frac{1}{NF}$ 的值与 θ 的大小无关.

当直线 MN 的斜率存在时，设直线 MN 的方程为 $y=k(x-4m)$，

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{25m^2}+\frac{y^2}{9m^2}=1$，得 $(25k^2+9)m^2x^2-200m^3k^2x+25m^4(16k^2-9)=0$.

设点 $M(x_1, y_1)$、$N(x_2, y_2)$，

$\because \Delta>0$ 恒成立，$\therefore x_1+x_2=\frac{200mk^2}{25k^2+9}$，$x_1\cdot x_2=\frac{25m^2(16k^2-9)}{25k^2+9}$.

$\because \frac{MF}{\frac{25m}{4}-x_1}=\frac{4}{5}$，$\frac{NF}{\frac{25m}{4}-x_2}=\frac{4}{5}$，$\therefore MF=5m-\frac{4}{5}x_1$，$NF=5m-\frac{4}{5}x_2$.

$$\therefore \frac{1}{MF}+\frac{1}{NF}=\frac{1}{5m-\frac{4}{5}x_1}+\frac{1}{5m-\frac{4}{5}x_2}=\frac{10m-\frac{4}{5}(x_1+x_2)}{\frac{16}{25}x_1x_2-4m(x_1+x_2)+25m^2}=\frac{90k^2+90}{81mk^2+81m}=\frac{10}{9m}.$$

显然该值与 θ 的大小无关.

大招 14：抛物线焦半径秒杀公式

【结论】若 F 为抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点，AB 是过焦点的弦且直线 AB 的倾斜角为 θ（A 在 x 轴上方），则 $|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\theta}$.

【证明】设准线 l 交 x 轴于 P 点，过点 A 作 AM 垂直 x 轴于 M，作 $AN\perp l$ 于 N．设 d 为点 A 到准线 l 的距离，于是 $|AF|=|AN|$．其中 $|PF|=p$，$|FM|=|AF|\cdot|\cos\theta|$，于是 $|AN|=|PF|+|FM|=p+|AF|\cos\theta$，所以 $|AF|=p+|AF|\cos\theta$，故 $|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$．同理，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\theta}$.

推论：$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$.

【例 1】过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作直线 l 与其交于 A，B 两点，若 $|AF|=4$，则 $|BF|=$（　　）

A. 2　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 1

【答案】B

【解析】由于 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$，所以 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{2}=1$，$|BF|=\dfrac{4}{3}$.

【例 2】过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 $45°$ 的直线交抛物线于 A、B 两点，若线段 AB 的长为 8，则 $p=$________.

【答案】2

【解析】由题意可知过焦点的直线方程为 $y=x-\dfrac{p}{2}$，联立有 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=x-\dfrac{p}{2}\end{cases}\Rightarrow x^2-3px+\dfrac{p^2}{4}=0$，

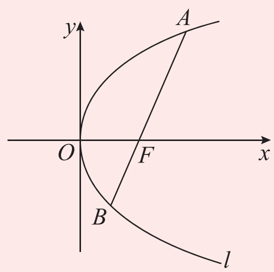
又 $|AB|=\sqrt{1+1^2}\sqrt{(-3p)^2-4\times\dfrac{p^2}{4}}=8\Rightarrow p=2$.

大招 15：抛物线焦点弦定值模型

【结论】若 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的弦．设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

则（1）$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$;（2）$y_1y_2=-p^2$.

【证明】如图，



（1）若 AB 的斜率不存在时，

依题意 $x_1=x_2=\dfrac{p}{2}$，

$\therefore x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$.

若 AB 的斜率存在时，设为 k，则 AB：$y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，与 $y^2=2px$ 联立，得

$k^2\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2=2px \Rightarrow k^2x^2-(k^2+2)px+\dfrac{k^2p^2}{4}=0$，

$\therefore x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$.

综上：$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$.

（2）证法一：$\because x_1=\dfrac{y_1^2}{2p}$，$x_2=\dfrac{y_2^2}{2p}$，

$\therefore y_1^2y_2^2=p^4 \Rightarrow y_1y_2=\pm p^2$，

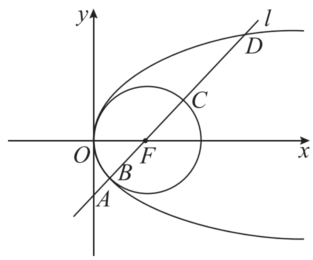
但 $y_1y_2<0$，

$\therefore y_1y_2=-p^2$.

证法二：设 AB：$x=my+\dfrac{p}{2}$ 与 $y^2=2px$ 联立，得 $y^2-2pmy-p^2=0$，

$\therefore y_1y_2=-p^2$.

【例 1】如图，抛物线 C_1：$y^2=2px$ 和圆 C_2：$\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{p^2}{4}$，其中 $p>0$，直线 l 经过 C_1 的焦点，依次交 C_1，C_2 于 A，B，C，D 四点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值为（　　）



A. $\dfrac{p^2}{4}$　　B. $\dfrac{p^2}{3}$　　C. $\dfrac{p^2}{2}$　　D. p^2

【答案】A

【解析】此题宜取特殊值，不妨设直线 l 的方程为 $x=\dfrac{p}{2}$，于是分别联立 l 与 C_1，C_2，

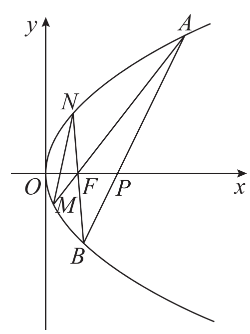
解得 $A\left(\dfrac{p}{2},-p\right)$，$B\left(\dfrac{p}{2},-\dfrac{p}{2}\right)$，$C\left(\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{2}\right)$，$D\left(\dfrac{p}{2},p\right)$.

于是 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{p}{2}\cdot\dfrac{p}{2}=\dfrac{p^2}{4}$.

【例 2】如图，已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F．过点 $P(2,0)$ 的直线交抛物线于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，直线 AF，BF 分别与抛物线交于点 M，N.

（1）求 y_1y_2 的值；

（2）记直线 MN 的斜率为 k_1，直线 AB 的斜率为 k_2，证明：$\dfrac{k_1}{k_2}$ 为定值.



【解析】（1）依题意，设直线 AB 的方程为 $x=my+2$，

将其代入 $y^2=4x$，消去 x，整理得 $y^2-4my-8=0$，

从而 $y_1y_2=-8$.

（2）设 $M(x_3, y_3)$，$N(x_4, y_4)$.

则 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}\times\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=\dfrac{y_3-y_4}{\dfrac{y_3^{\ 2}}{4}-\dfrac{y_4^{\ 2}}{4}}\times\dfrac{\dfrac{y_1^{\ 2}}{4}-\dfrac{y_2^{\ 2}}{4}}{y_1-y_2}=\dfrac{y_1+y_2}{y_3+y_4}$.

设直线 AM 的方程为 $x=ny+1$，将其代入 $y^2=4x$，消去 x，整理得 $y^2-4my-4=0$.

所以 $y_1y_3=-4$.

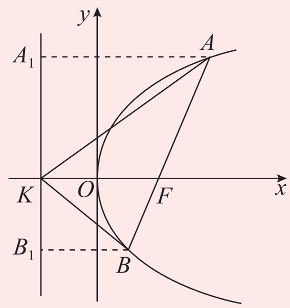
同理可得 $y_2y_4=-4$，故 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{y_1+y_2}{y_3+y_4}=\dfrac{y_1+y_2}{\dfrac{-4}{y_1}+\dfrac{-4}{y_2}}=\dfrac{y_1y_2}{-4}$.

由（1）得 $\dfrac{k_1}{k_2}=2$，为定值.

大招 16：抛物线角平分线模型

【结论】若 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的弦，抛物线的准线与 x 轴相交于点 K，则 $\angle AKF=\angle BKF$.

【证明】过点 A、B 分别作准线的垂线，垂足分别为 A_1、B_1.



$\because AA_1 /\!/ KF /\!/ BB_1$,

$\therefore \dfrac{A_1K}{B_1K}=\dfrac{AF}{FB}$. 而 $AF=A_1A$，$BF=B_1B$,

$\therefore \dfrac{A_1K}{B_1K}=\dfrac{A_1A}{B_1B}$,

$\therefore \dfrac{A_1K}{A_1A}=\dfrac{B_1K}{B_1B}$，而 $\angle AA_1K=\angle BB_1K=90°$,

$\therefore \triangle AA_1K \backsim \triangle BB_1K$,

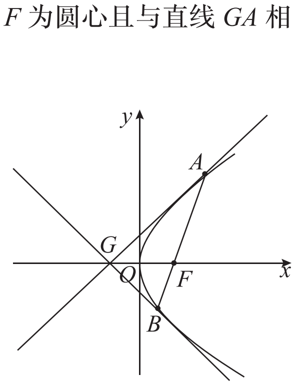
$\therefore \angle A_1KA=\angle B_1KB$,

$\therefore \angle AKF=\angle BKF$.

【例 1】已知点 F 为抛物线 E：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 $A(2, m)$ 在抛物线 E 上，且 $|AF|=3$.

（1）求抛物线 E 的方程；

（2）已知点 $G(-1, 0)$，延长 AF 交抛物线 E 于点 B，证明：以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆，必与直线 GB 相切.



【解析】（1）由抛物线的定义得 $|AF|=2+\dfrac{p}{2}$.

因为 $|AF|=3$，即 $2+\dfrac{p}{2}=3$，解得 $p=2$，所以抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$.

（2）证法一：因为点 $A(2,\ m)$ 在抛物线 E：$y^2=4x$ 上，

所以 $m=\pm2\sqrt{2}$，由抛物线的对称性，不妨设 $A(2,\ 2\sqrt{2})$.

由 $A(2,\ 2\sqrt{2})$，$F(1,\ 0)$ 可得直线 AF 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=2\sqrt{2}(x-1), \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $2x^2-5x+2=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$，从而 $B\left(\dfrac{1}{2},\ -\sqrt{2}\right)$.

又 $G(-1,\ 0)$，

所以 $k_{GA}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{2-(-1)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$k_{GB}=\dfrac{-\sqrt{2}-0}{\dfrac{1}{2}-(-1)}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $k_{GA}+k_{GB}=0$，从而 $\angle AGF=\angle BGF$，这表明点 F 到直线 GA，GB 的距离相等，故以 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆必与直线 GB 相切.

证法二：设以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆的半径为 r.

因为点 $A(2,\ m)$ 在抛物线 E：$y^2=4x$ 上，

所以 $m=\pm2\sqrt{2}$，由抛物线的对称性，不妨设 $A(2,\ 2\sqrt{2})$.

由 $A(2,\ 2\sqrt{2})$，$F(1,\ 0)$ 可得直线 AF 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=2\sqrt{2}(x-1), \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $2x^2-5x+2=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$，从而 $B\left(\dfrac{1}{2},\ -\sqrt{2}\right)$.

又 $G(-1,\ 0)$，故直线 GA 的方程为 $2\sqrt{2}x-3y+2\sqrt{2}=0$.

从而 $r=\dfrac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{8+9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

又直线 GB 的方程为 $2\sqrt{2}x+3y+2\sqrt{2}=0$，

所以点 F 到直线 GB 的距离 $d=\dfrac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{8+9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=r$.

这表明以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆必与直线 GB 相切.

【例 2】在直角坐标系 xOy 中，曲线 C：$y=\frac{x^2}{4}$ 与直线 l：$y=kx+a(a>0)$ 交于 M，N 两点. y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$？说明理由.

【解析】设点 $P(0,\ b)$ 为符合题意的点，$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，k_2.

联立方程 $\begin{cases} y=kx+a, \\ y=\frac{x^2}{4}, \end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4a=0$，故 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4a$，

从而 $k_1+k_2=\frac{y_1-b}{x_1}+\frac{y_2-b}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+(a-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{k(a+b)}{a}$.

当 $b=-a$ 时，有 $k_1+k_2=0$，则直线 PM 与直线 PN 的倾斜角互补，

故 $\angle OPM=\angle OPN$，所以点 $P(0,\ -a)$ 符合题意.