椭圆二级结论大全

1.$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$　　2.标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　3.$\frac{\left|PF_1\right|}{d_1}=e<1$

4．点 P 处的切线 PT 平分△PF_1F_2在点 P 处的外角.

5．PT 平分△PF_1F_2在点 P 处的外角，则焦点在直线 PT 上的射影 H 点的轨迹是以长轴为直径的圆，除去长轴的两个端点.

6．以焦点弦 PQ 为直径的圆必与对应准线相离.　7．以焦点半径 PF_1 为直径的圆必与以长轴为直径的圆内切.

8．设 A_1、A_2 为椭圆的左、右顶点，则△PF_1F_2在边 PF_2（或 PF_1）上的旁切圆，必与 A_1A_2 所在的直线切于 A_2（或 A_1）.

9．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的两个顶点为 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，与 y 轴平行的直线交椭圆于 P_1、P_2 时 A_1P_1 与 A_2P_2 交点的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

10．若 $P_0(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，则过 P_0 的椭圆的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

11．若 $P_0(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外，则过 Po 作椭圆的两条切线切点为 P_1、P_2，则切点弦 P_1P_2 的直线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

12．AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的不平行于对称轴的弦，M 为 AB 的中点，则 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$.

13．若 $P_0(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内，则被 Po 所平分的中点弦的方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}$.

14．若 $P_0(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内，则过 Po 的弦中点的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}$.

15．若 PQ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上对中心张直角的弦，则 $\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}(r_1=|OP|,r_2=|OQ|)$.

16．若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上中心张直角的弦 L 所在直线方程为 $Ax+By=1$ $(AB\neq 0)$，则(1) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=A^2+B^2$;(2) $L=\frac{2\sqrt{a^4A^2+b^4B^2}}{a^2A^2+b^2B^2}$.

17．给定椭圆 C_1：$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$（a＞b＞0），C_2：$b^2x^2+a^2y^2=(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}ab)^2$，则(i)对 C_1 上任意给定的点 $P(x_0,y_0)$，它的任一直角弦必须经过 C_2 上一定点 M$(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0)$.

(ii)对 C_2 上任一点 $P'(x_0',y_0')$ 在 C_1 上存在唯一的点 M'，使得 M' 的任一直角弦都经过 P' 点.

18．设 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆（或圆）C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0,. b＞0)上一点，P_1P_2 为曲线 C 的动弦,且弦 PP_1, PP_2

斜率存在，记为 k_1, k_2, 则直线 P_1P_2 通过定点 $M(mx_0,-my_0)$ $(m\neq 1)$ 的充要条件是 $k_1\cdot k_2=-\frac{1+m}{1-m}\cdot\frac{b^2}{a^2}$.

19．过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0, b＞0)上任一点 $A(x_0,y_0)$ 任意作两条倾斜角互补的直线交椭圆于 B,C 两点，则直线 BC 有定向且 $k_{BC}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$（常数）.

20．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞b＞0)的左右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 为椭圆上任意一点 $\angle F_1PF_2=\gamma$，则椭圆的焦点三角形的面积为 $S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\gamma}{2}$，$P(\pm\frac{a}{c}\sqrt{c^2-b^2\tan^2\frac{\gamma}{2}},\pm\frac{b^2}{c}\tan\frac{\gamma}{2})$.

21．若 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上异于长轴端点的任一点,$F_1$, F_2 是焦点，$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，则 $\frac{a-c}{a+c}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$.

22．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的焦半径公式：$|MF_1|=a+ex_0$，$|MF_2|=a-ex_0$（$F_1(-c,0)$ ，$F_2(c,0)$，$M(x_0,y_0)$).

23．若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右焦点分别为 F_1、F_2，左准线为 L，则当 $\sqrt{2}-1\le e<1$ 时，可在椭圆上求一点 P，使得 PF_1 是 P 到对应准线距离 d 与 PF_2 的比例中项.

24．P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上任一点,$F_1$,$F_2$ 为二焦点，A 为椭圆内一定点，则 $2a-|AF_2|\le|PA|+|PF_1|\le 2a+|AF_2|$,当且仅当 A,F_2,P 三点共线时，等号成立.

25．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上存在两点关于直线 l：$y=k(x-x_0)$ 对称的充要条件是 ${x_0}^2\le\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2k^2}$.

26．过椭圆焦半径的端点作椭圆的切线，与以长轴为直径的圆相交，则相应交点与相应焦点的连线必与切线垂直.

27．过椭圆焦半径的端点作椭圆的切线交相应准线于一点，则该点与焦点的连线必与焦半径互相垂直.

28．P 是椭圆 $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$（a＞b＞0）上一点，则点 P 对椭圆两焦点张直角的充要条件是 $e^2=\frac{1}{1+\sin^2\varphi}$.

29．设 A,B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k(k>0,k\neq 1)$ 上两点，其直线 AB 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相交于 P,Q ,则 $AP=BQ$.

30．在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，定长为 2m（o＜m≤a）的弦中点轨迹方程为 $m^2=\left[1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\right]\left(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)$,其中 $\tan\alpha=-\frac{bx}{ay}$,当 $y=0$ 时，$\alpha=90^\circ$.

31. 设 S 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0)的通径，定长线段 L 的两端点 A,B 在椭圆上移动，记|AB|=l，$M(x_0,y_0)$ 是 AB 中点，则当 $l\ge\Phi S$ 时，有 $(x_0)_{\max}=\frac{a^2}{c}-\frac{l}{2e}$ ($c^2=a^2-b^2$，$e=\frac{c}{a}$); 当 $l<\Phi S$ 时，有

$(x_0)_{\max}=\dfrac{a}{2b}\sqrt{4b^2-l^2}$, $(x_0)_{\min}=0$.

32．椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 有公共点的充要条件是 $A^2a^2+B^2b^2\ge C^2$.

33．椭圆 $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 有公共点的充要条件是 $A^2a^2+B^2b^2\ge(Ax_0+By_0+C)^2$.

34．设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的两个焦点为 F_1、F_2,P（异于长轴端点）为椭圆上任意一点，在△PF_1F_2 中，记 $\angle F_1PF_2=\alpha$，$\angle PF_1F_2=\beta$, $\angle F_1F_2P=\gamma$，则有 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}=\dfrac{c}{a}=e$.

35．经过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$（a＞b＞0）的长轴的两端点 A_1 和 A_2 的切线，与椭圆上任一点的切线相交于 P_1 和 P_2，则 $|P_1A_1|\cdot|P_2A_2|=b^2$.

36．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0），O 为坐标原点，P、Q 为椭圆上两动点，且 $OP\perp OQ$.（1）$\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$；（2）$|OP|^2+|OQ|^2$ 的最小值为 $\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$；（3）$S_{\Delta OPQ}$ 的最小值是 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

37．MN 是经过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$（a＞b＞0）焦点的任一弦，若 AB 是经过椭圆中心 O 且平行于 MN 的弦，则 $|AB|^2=2a|MN|$.

38．MN 是经过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$（a＞b＞0）焦点的任一弦，若过椭圆中心 O 的半弦 $OP\perp MN$，则 $\dfrac{2}{a|MN|}+\dfrac{1}{|OP|^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$.

39．设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）,M(m,o) 或(o, m)为其对称轴上除中心，顶点外的任一点，过 M 引一条直线与椭圆相交于 P、Q 两点，则直线 A_1P、A_2Q(A_1,A_2 为对称轴上的两顶点)的交点 N 在直线 l：$x=\dfrac{a^2}{m}$(或 $y=\dfrac{b^2}{m}$)上.

40．设过椭圆焦点 F 作直线与椭圆相交 P、Q 两点，A 为椭圆长轴上一个顶点，连结 AP 和 AQ 分别交相应于焦点 F 的椭圆准线于 M、N 两点，则 MF⊥NF.

41．过椭圆一个焦点 F 的直线与椭圆交于两点 P、Q, A_1、A_2 为椭圆长轴上的顶点，A_1P 和 A_2Q 交于点 M，A_2P 和 A_1Q 交于点 N，则 MF⊥NF.

42．设椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,则斜率为 k(k≠0)的平行弦的中点必在直线 l： $y=kx$ 的共轭直线 $y=k'x$ 上,而且 $kk'=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

43．设 A、B、C、D 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上四点,AB、CD 所在直线的倾斜角分别为 α,β，直线 AB 与 CD 相交于 P,且 P 不在椭圆上,则 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\dfrac{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$.

44．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）,点 P 为其上一点 F_1, F_2 为椭圆的焦点，$\angle F_1PF_2$ 的外（内）角平分线

为 l，作 F_1、F_2 分别垂直 l 于 R、S，当 P 跑遍整个椭圆时，R、S 形成的轨迹方程是 $x^2+y^2=a^2$（$c^2y^2=\frac{\left[a^2y^2+b^2x\left(x\pm c\right)\right]^2}{a^2y^2+b^2\left(x\pm c\right)^2}$）.

45．设△ABC 内接于椭圆Γ，且 AB 为Γ的直径，l 为 AB 的共轭直径所在的直线，l 分别交直线 AC、BC 于 E 和 F，又 D 为 l 上一点，则 CD 与椭圆Γ相切的充要条件是 D 为 EF 的中点.

46．过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的右焦点 F 作直线交该椭圆右支于 M,N 两点，弦 MN 的垂直平分线交 x 轴于 P，则 $\frac{|PF|}{|MN|}=\frac{e}{2}$.

47．设 A（x_1,y_1）是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上任一点，过 A 作一条斜率为 $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ 的直线 L，又设 d 是原点到直线 L 的距离，r_1,r_2 分别是 A 到椭圆两焦点的距离，则 $\sqrt{r_1r_2}d=ab$.

48．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）和 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda$（$0<\lambda<1$），一直线顺次与它们相交于 A、B、C、D 四点，则│AB│=|CD│.

49．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0） ,A、B、是椭圆上的两点，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 $P(x_0,0)$，则 $-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

50．设 P 点是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）上异于长轴端点的任一点,$F_1$、$F_2$ 为其焦点记 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 (1)$|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$.(2) $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

51．设过椭圆的长轴上一点 B（m,o）作直线与椭圆相交于 P、Q 两点，A 为椭圆长轴的左顶点，连结 AP 和 AQ 分别交相应于过 H 点的直线 MN：$x=n$ 于 M，N 两点,则 $\angle MBN=90^\circ\Leftrightarrow\frac{a-m}{a+m}=\frac{a^2\left(n-m\right)^2}{b^2(n+a)^2}$.

52．L 是经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）长轴顶点 A 且与长轴垂直的直线，E、F 是椭圆两个焦点，e 是离心率,点 $P\in L$，若 $\angle EPF=\alpha$，则 α 是锐角且 $\sin\alpha\le e$ 或 $\alpha\le arc\sin e$（当且仅当 $|PH|=b$ 时取等号).

53．L 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）的准线,A、B 是椭圆的长轴两顶点,点 $P\in L$，e 是离心率，$\angle EPF=\alpha$，H 是 L 与 X 轴的交点 c 是半焦距,则 α 是锐角且 $\sin\alpha\le e$ 或 $\alpha\le arc\sin e$（当且仅当 $|PH|=\frac{ab}{c}$ 时取等号).

54．L 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）的准线,E、F 是两个焦点,H 是 L 与 x 轴的交点,点 $P\in L$，$\angle EPF=\alpha$，离心率为 e，半焦距为 c，则 α 为锐角且 $\sin\alpha\le e^2$ 或 $\alpha\le arc\sin e^2$（当且仅当 $|PH|=\frac{b}{c}\sqrt{a^2+c^2}$ 时取等号）.

55．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0），直线 L 通过其右焦点 F_2,且与椭圆相交于 A、B 两点，将 A、B 与椭圆左焦点 F_1 连结起来，则 $b^2\le|F_1A|\cdot|F_1B|\le\frac{(2a^2-b^2)^2}{a^2}$（当且仅当 AB⊥x 轴时右边不等式取等号，当

且仅当A、F_1、B三点共线时左边不等式取等号）.

56．设A、B是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）的长轴两端点，P是椭圆上的一点，$\angle PAB=\alpha$，$\angle PBA=\beta$，$\angle BPA=\gamma$，c、e分别是椭圆的半焦距离心率，则有(1) $|PA|=\frac{2ab^2|\cos\alpha|}{a^2-c^2\cos^2\alpha}$.(2) $\tan\alpha\tan\beta=1-e^2$.(3) $S_{\Delta PAB}=\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\cot\gamma$.

57．设A、B是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）长轴上分别位于椭圆内（异于原点）、外部的两点，且x_A、x_B的横坐标$x_A\cdot x_B=a^2$，（1）若过A点引直线与这椭圆相交于P、Q两点，则$\angle PBA=\angle QBA$；（2）若过B引直线与这椭圆相交于P、Q两点，则$\angle PAB+\angle QAB=180^\circ$.

58．设A、B是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）长轴上分别位于椭圆内（异于原点），外部的两点，（1）若过A点引直线与这椭圆相交于P、Q两点，(若B P交椭圆于两点，则P、Q不关于x轴对称)，且$\angle PBA=\angle QBA$，则点A、B的横坐标x_A、x_B满足$x_A\cdot x_B=a^2$；（2）若过B点引直线与这椭圆相交于P、Q两点，且$\angle PAB+\angle QAB=180^\circ$,则点A、B的横坐标满足$x_A\cdot x_B=a^2$.

59．设A,A'是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的长轴的两个端点，$QQ'$是与$AA'$垂直的弦，则直线$AQ$与$A'Q'$的交点P的轨迹是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

60．过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）的左焦点$F$作互相垂直的两条弦AB、CD则$\frac{8ab^2}{a^2+b^2}\le|AB|+|CD|\le\frac{2(a^2+b^2)}{a}$.

61．到椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）两焦点的距离之比等于$\frac{a-c}{b}$（c为半焦距）的动点M的轨迹是姊妹圆$(x\pm a)^2+y^2=b^2$.

62．到椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）的长轴两端点的距离之比等于$\frac{a-c}{b}$（c为半焦距）的动点M的轨迹是姊妹圆$(x\pm\frac{a}{e})^2+y^2=(\frac{b}{e})^2$.

63．到椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）的两准线和x轴的交点的距离之比为$\frac{a-c}{b}$（c为半焦距）的动点的轨迹是姊妹圆$(x\pm\frac{a}{e^2})^2+y^2=(\frac{b}{e^2})^2$（e为离心率）.

64．已知P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）上一个动点，$A',A$是它长轴的两个端点，且$AQ\perp AP,A'Q\perp A'P$，则Q点的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}=1$.

65．椭圆的一条直径(过中心的弦)的长，为通过一个焦点且与此直径平行的弦长和长轴之长的比例中项.

66．设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）长轴的端点为$A,A'$，$P(x_1,y_1)$是椭圆上的点过P作斜率为$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$的直

线l，过A,A'分别作垂直于长轴的直线交l于M,M',则（1）$|AM||A'M'|=b^2$.（2）四边形$MAA'M'$面积的最小值是$2ab$.

67．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）的右准线$l$与 x 轴相交于点$E$，过椭圆右焦点$F$ 的直线与椭圆相交于 A、B 两点,点C在右准线l上，且$BC//x$轴，则直线 AC 经过线段 EF 的中点.

68．OA、OB 是椭圆$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞0,b＞0）的两条互相垂直的弦，O 为坐标原点，则（1）直线 AB 必经过一个定点$(\frac{2ab^2}{a^2+b^2},0)$.(2) 以 O A、O B 为直径的两圆的另一个交点 Q 的轨迹方程是$(x-\frac{ab^2}{a^2+b^2})^2+y^2=(\frac{ab^2}{a^2+b^2})^2\ (x\neq 0)$.

69．$P(m,n)$是椭圆$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上一个定点，P A、P B 是互相垂直的弦，则（1）直线 AB 必经过一个定点$(\frac{2ab^2+m(a^2-b^2)}{a^2+b^2},\frac{n(b^2-a^2)}{a^2+b^2})$.（2）以 P A、P B 为直径的两圆的另一个交点 Q 的轨迹方程是

$$(x-\frac{ab^2+a^2m}{a^2+b^2})^2+(y-\frac{b^2n}{a^2+b^2})^2=\frac{a^2[b^4+n^2(a^2-b^2)]}{(a^2+b^2)^2}\ (x\neq m \text{ 且 } y\neq n).$$

70．如果一个椭圆短半轴长为 b，焦点 F_1、F_2 到直线L的距离分别为 d_1、d_2，那么（1）$d_1d_2=b^2$，且 F_1、F_2 在L 同侧$\Leftrightarrow$直线 L 和椭圆相切.(2)$d_1d_2>b^2$,且 F_1、F_2 在 L 同侧$\Leftrightarrow$直线L 和椭圆相离,(3)$d_1d_2<b^2$，或 F_1、F_2 在 L 异侧$\Leftrightarrow$直线 L 和椭圆相交.

71．AB 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的长轴，$N$是椭圆上的动点，过$N$的切线与过 A、B 的切线交于$C$、$D$两点，则梯形 ABDC 的对角线的交点 M 的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}=1(y\neq 0)$.

72．设点$P(x_0,y_0)$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ a＞b＞0）的内部一定点，AB 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$过定点$P(x_0,y_0)$的任一弦，当弦 AB 平行（或重合）于椭圆长轴所在直线时$(|PA|\cdot|PB|)_{\max}=\frac{a^2b^2-(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2)}{b^2}$.当弦 AB 垂直于长轴所在直线时，$(|PA|\cdot|PB|)_{\min}=\frac{a^2b^2-(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2)}{a^2}$.

73．椭圆焦三角形中,以焦半径为直径的圆必与以椭圆长轴为直径的圆相内切.

74．椭圆焦三角形的旁切圆必切长轴于非焦顶点同侧的长轴端点.

75．椭圆两焦点到椭圆焦三角形旁切圆的切线长为定值 a+c 与 a-c.

76．椭圆焦三角形的非焦顶点到其内切圆的切线长为定值 a-c.

77. 椭圆焦三角形中,内点到一焦点的距离与以该焦点为端点的焦半径之比为常数 e(离心率). (注:在椭圆焦三角形中,非焦顶点的内、外角平分线与长轴交点分别称为内、外点.)

78．椭圆焦三角形中,内心将内点与非焦顶点连线段分成定比 e.

79．椭圆焦三角形中,半焦距必为内、外点到椭圆中心的比例中项.

80．椭圆焦三角形中,椭圆中心到内点的距离、内点到同侧焦点的距离、半焦距及外点到同侧焦点的距离成比例.

81．椭圆焦三角形中,半焦距、外点与椭圆中心连线段、内点与同侧焦点连线段、外点与同侧焦点连线段成比例.

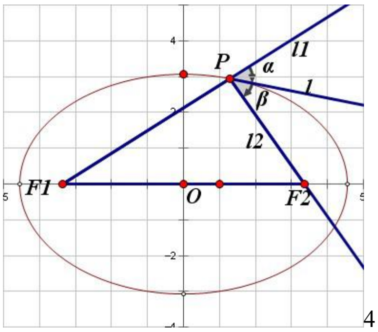
82．椭圆焦三角形中,过任一焦点向非焦顶点的外角平分线引垂线,则椭圆中心与垂足连线必与另一焦半径所

在直线平行.
83．椭圆焦三角形中,过任一焦点向非焦顶点的外角平分线引垂线,则椭圆中心与垂足的距离为椭圆长半轴的长.
84．椭圆焦三角形中,过任一焦点向非焦顶点的外角平分线引垂线,垂足就是垂足同侧焦半径为直径的圆和椭圆长轴为直径的圆的切点.
85．椭圆焦三角形中,非焦顶点的外角平分线与焦半径、长轴所在直线的夹角的余弦的比为定值 e.
86．椭圆焦三角形中,非焦顶点的法线即为该顶角的内角平分线.
87．椭圆焦三角形中,非焦顶点的切线即为该顶角的外角平分线.
88．椭圆焦三角形中,过非焦顶点的切线与椭圆长轴两端点处的切线相交,则以两交点为直径的圆必过两焦点.
89. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ (包括圆在内)上有一点 P ,过点 P 分别作直线 $y=\frac{b}{a}x$ 及 $y=-\frac{b}{a}x$ 的平行线，与 x 轴于 M,N ，与 y 轴交于 R,Q ., O 为原点，则：（1） $|OM|^2+|ON|^2=2a^2$ ；（2） $|OQ|^2+|OR|^2=2b^2$.
90. 过平面上的 P 点作直线 $l_1: y=\frac{b}{a}x$ 及 $l_2: y=-\frac{b}{a}x$ 的平行线，分别交 x 轴于 M,N ，交 y 轴于 R,Q .（1）若 $|OM|^2+|ON|^2=2a^2$ ，则 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.(2)若 $|OQ|^2+|OR|^2=2b^2$ ，则 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.
91. 点 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ (包括圆在内)在第一象限的弧上任意一点，过 P 引 x 轴、 y 轴的平行线，交 y 轴、 x 轴于 M,N ，交直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 于 Q,R ，记 ΔOMQ 与 ΔONR 的面积为 S_1,S_2 ，则：$S_1+S_2=\frac{ab}{2}$.
92. 点 P 为第一象限内一点，过 P 引 x 轴、y 轴的平行线，交 y 轴、x 轴于 M,N ，交直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 于 Q,R ，记 ΔOMQ 与 ΔONR 的面积为 S_1,S_2 ，已知 $S_1+S_2=\frac{ab}{2}$ ，则 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

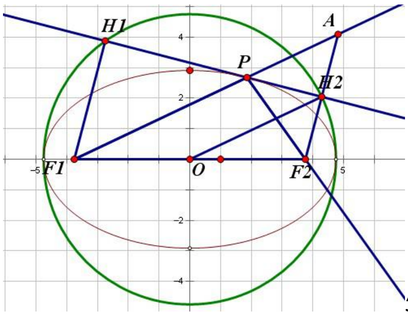
椭圆性质 92 条证明

1.椭圆第一定义。2.由定义即可得椭圆标准方程。3.椭圆第二定义。

4. 如图，设 $P(x_0,y_0)$，切线 PT（即 l）的斜率为 k，PF_1 所在直线 l_1 斜率为 k_1，PF_2 所在直线 l_2 斜率为 k_2。



4 图



5 图

由两直线夹角公式 $\tan\theta=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$ 得：

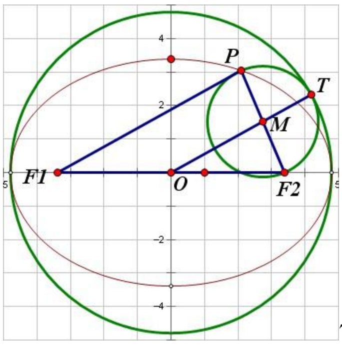
$$\tan\alpha=\left|\frac{k-k_1}{1+kk_1}\right|=\left|\frac{\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}+\dfrac{y_0}{x_0+c}}{1-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+c}}\right|=\left|\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2+b^2x_0c}{a^2x_0y_0+a^2cy_0-b^2x_0y_0}\right|=\left|\frac{a^2b^2+b^2cx_0}{c^2x_0y_0+a^2cy_0}\right|=\left|\frac{b^2\left(a^2+cx_0\right)}{cy_0\left(a^2+cx_0\right)}\right|=\frac{b^2}{c\,|y_0|}$$

$$\tan\beta=\left|\frac{k-k_2}{1+kk_2}\right|=\left|\frac{\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}+\dfrac{y_0}{x_0-c}}{1-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-c}}\right|=\left|\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-b^2x_0c}{a^2x_0y_0-a^2cy_0-b^2x_0y_0}\right|=\left|\frac{a^2b^2-b^2cx_0}{c^2x_0y_0-a^2cy_0}\right|=\left|\frac{b^2\left(a^2-cx_0\right)}{cy_0\left(a^2-cx_0\right)}\right|=\frac{b^2}{c\,|y_0|}$$

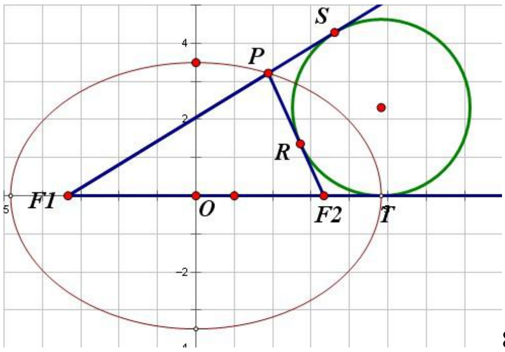
$\because \alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\therefore\alpha=\beta$　　同理可证其它情况。故切线 PT 平分点 P 处的外角。

5.如图，延长 F_1P 至 A，使 $PA=PF_2$，则 ΔPAF_2 是等腰三角形，AF_2 中点即为射影 H_2。则 $OH_2=\dfrac{F_1A}{2}=a$，同理可得 $OH_1=a$，所以射影 H_1，H_2 的轨迹是以长轴为直径的圆除去两端点。

6.设 P，Q 两点到与焦点对应的准线的距离分别为 d_1,d_2，以 PQ 中点到准线的距离为 d，以 PQ 为直径的圆的半径为 r，则 $d=\dfrac{d_1+d_2}{2}=\dfrac{PF+FQ}{2e}=\dfrac{r}{e}>r$，故以 PQ 为直径的圆与对应准线相离。



7图



8图

7.如图，两圆圆心距为$d=\left|OM\right|=\dfrac{\left|PF_1\right|}{2}=\dfrac{2a-\left|PF_2\right|}{2}=a-\dfrac{\left|PF_2\right|}{2}=a-r$，故两圆内切。

8.如图，由切线长定理：$\left|F_1S\right|+\left|F_1T\right|=\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|+\left|F_1F_2\right|=2a+2c$，$\left|F_1S\right|=\left|F_1T\right|=a+c$

而$\left|F_1T\right|=a+c=\left|F_1A_2\right|$，$T$与$A_2$重合，故旁切圆与 x 轴切于右顶点，同理可证 P 在其他位置情况。

9. 易知$A_1\left(-a,0\right)A_2\left(a,0\right)$, 设$P_1\left(x_0,y_0\right),P_2\left(x_0,-y_0\right)$, 则$\dfrac{{x_0}^2}{a^2}+\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1$

$A_1P_1:y=\dfrac{y_0}{a+x_0}\left(x+a\right),A_2P_2:y=\dfrac{y_0}{a-x_0}\left(x-a\right)$

则$x_P=\dfrac{a^2}{x_0}\Rightarrow P\left(\dfrac{a^2}{x_0},\dfrac{ay_0}{x_0}\right)\therefore\dfrac{{x_P}^2}{a^2}-\dfrac{{y_P}^2}{b^2}=\dfrac{a^2}{{x_0}^2}-\dfrac{a^2{y_0}^2}{b^2{x_0}^2}=\dfrac{a^2b^2-a^2{y_0}^2}{b^2{x_0}^2}=1\therefore P$点的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

10. $\because$ $P_0(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上 $\therefore\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，对 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 求导得：

$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2yy'}{b^2}=0\therefore y'=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

$\therefore$切线方程为$y-y_0=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(x-x_0\right)$即$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$

11.设$P_1\left(x_1,y_1\right),P_2\left(x_2,y_2\right)$，由 10 得：$\dfrac{x_0x_1}{a^2}+\dfrac{y_0y_1}{b^2}=1,\dfrac{x_0x_2}{a^2}+\dfrac{y_0y_2}{b^2}=1$，因为点$P_1,P_2$在直线$P_1P_2$上，且同时满足方程$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，所以$P_1P_2:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

12.设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),M\left(x_0,y_0\right)$则有$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$作差得：$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$

$\Rightarrow\dfrac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)}{a^2}+\dfrac{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1+y_2\right)}{b^2}=0$

$$\Rightarrow k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2\left(x_1+x_2\right)}{a^2\left(y_1+y_2\right)}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=-\frac{b^2}{a^2k_{OM}}\Rightarrow k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$$

13.由 12 可得：$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(x-x_0\right)\Rightarrow a^2y_0y-a^2y_0^2+b^2x_0x-b^2x_0^2=0$

$$\Rightarrow b^2x_0x+a^2y_0y=b^2x_0^2+a^2y_0^2\Rightarrow\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$$

14. .由 12 可得：$\frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\frac{y}{x}=-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow a^2y^2-a^2y_0y+b^2x^2-b^2x_0x=0$

$$\Rightarrow b^2x^2+a^2y^2=b^2x_0x+a^2y_0y\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}$$

15.设 $P\left(a\cos t,b\sin t\right),Q\left(a\cos t',b\sin t'\right)$，则 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=\frac{b\sin t}{a\cos t}\cdot\frac{b\sin t'}{a\cos t'}=-1\ \therefore\tan t\cdot\tan t'=-\frac{a^2}{b^2}$

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{r_1^2+r_2^2}{r_1^2r_2^2}=\frac{a^2\left(\cos^2t+\cos^2t'\right)+b^2\left(\sin^2t+\sin^2t'\right)}{\left(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t\right)\left(a^2\cos^2t'+b^2\sin^2t'\right)}$$

$$=\frac{a^2\left(\frac{1}{\cos^2t}+\frac{1}{\cos^2t'}\right)+b^2\left(\frac{\tan^2t'}{\cos^2t}+\frac{\tan^2t}{\cos^2t'}\right)}{\left(a^2+b^2\tan^2t\right)\left(a^2+b^2\tan^2t'\right)}=\frac{a^2\left(2+\tan^2t+\tan^2t'\right)+b^2\left(\tan^2t+\tan^2t'\right)+2b^2\tan^2t\tan^2t'}{a^4+a^2b^2\left(\tan^2t+\tan^2t'\right)+b^4\tan^2t\tan^2t'}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(\tan^2t+\tan^2t'\right)+2a^2\frac{a^2+b^2}{b^2}}{2a^4+a^2b^2\left(\tan^2t+\tan^2t'\right)}=\frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left[\left(\tan^2t+\tan^2t'\right)+2\frac{a^2}{b^2}\right]}{2\frac{a^2}{b^2}+\left(\tan^2t+\tan^2t'\right)}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

16.将直线 AB 代入椭圆方程中得：$\left(A^2a^2+B^2b^2\right)x^2-2Aa^2x+a^2\left(1-B^2b^2\right)=0$

$\Delta=4a^2B^2b^2\left(A^2a^2+B^2b^2-1\right)$，$\left|AB\right|=\frac{2ab\sqrt{A^2+B^2}}{A^2a^2+B^2b^2}\sqrt{A^2a^2+B^2b^2-1}$

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 则 $x_1+x_2=\frac{2Aa^2}{A^2a^2+B^2b^2}$，$x_1x_2=\frac{a^2\left(1-B^2b^2\right)}{A^2a^2+B^2b^2}$，$y_1y_2=\frac{b^2\left(1-A^2a^2\right)}{A^2a^2+B^2b^2}$

$\because OA\perp OB$

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow a^2+b^2=a^2b^2\left(A^2+B^2\right)\Rightarrow A^2+B^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

$$\left|AB\right|=\frac{2ab\sqrt{A^2+B^2}}{A^2a^2+B^2b^2}\sqrt{A^2a^2+B^2b^2-1}=\frac{2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(A^2a^2+B^2b^2-1\right)}}{A^2a^2+B^2b^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{A^2a^4+B^2b^4+a^2b^2\left(A^2+B^2\right)-\left(a^2+b^2\right)}}{A^2a^2+B^2b^2}=\frac{2\sqrt{A^2a^4+B^2b^4}}{A^2a^2+B^2b^2}$$

17.(I) 设椭圆内直角弦 AB 的方程为：$y-m=k\left(x-n\right)$ 即 $y=kx+m-kn$ 。

当斜率 k 存在时，代入椭圆 C_1 方程中得：$\left(a^2k^2+b^2\right)x^2+2a^2k\left(m-kn\right)x+a^2\left[\left(m-kn\right)^2-b^2\right]=0$

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 得 $x_1+x_2=-\frac{2a^2k\left(m-kn\right)}{a^2k^2+b^2}$，$x_1x_2=\frac{a^2\left[\left(m-kn\right)^2-b^2\right]}{a^2k^2+b^2}$

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)+\left(y_0-y_1\right)\left(y_0-y_2\right)$

$$=\left(k^2+1\right)x_1x_2-\left(k^2n+ky_0+x_0-mk\right)\left(x_1+x_2\right)+x_0^2+\left[y_0-\left(m-kn\right)\right]^2=0$$

$$\Rightarrow a^2\left(k^2+1\right)\left[\left(m-kn\right)^2-b^2\right]+\left(k^2n+ky_0+x_0-mk\right)2a^2k\left(m-kn\right)+\left(a^2k^2+b^2\right)x_0^2+\left(a^2k^2+b^2\right)\left[y_0-\left(m-kn\right)\right]^2=0$$

$$\Rightarrow a^2\left(k^2+1\right)\left(m-kn\right)^2-a^2\left(k^2+1\right)b^2+\left(a^2k^2+b^2\right)x_0^2+\left(a^2k^2+b^2\right)y_0^2+\left(a^2k^2+b^2\right)\left(m-kn\right)^2$$

$$-2y_0\left(m-kn\right)\left(a^2k^2+b^2\right)-2a^2k^2\left(m-kn\right)^2+2a^2kx_0\left(m-kn\right)+2a^2k^2y_0\left(m-kn\right)=0$$

$$\Rightarrow a^2\left(m-kn\right)^2-a^2\left(k^2+1\right)b^2+\left(a^2k^2+b^2\right)x_0^2+\left(a^2k^2+b^2\right)y_0^2+b^2\left(m-kn\right)^2-2y_0\left(m-kn\right)b^2+2a^2kx_0\left(m-kn\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(a^2k^2+b^2\right)\left(x_0^2+y_0^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\left(m-kn\right)^2-a^2b^2\left(k^2+1\right)+2\left(m-kn\right)\left(a^2kx_0-b^2y_0\right)=0$$

$$\Rightarrow a^2k^2\left(x_0^2+y_0^2\right)+b^2\left(x_0^2+y_0^2\right)+\left(a^2+b^2\right)m^2+\left(a^2+b^2\right)k^2n^2-2kmn\left(a^2+b^2\right)-a^2b^2k^2-a^2b^2$$

$$+2ma^2kx_0-2mb^2y_0-2k^2na^2x_0+2knb^2y_0=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2x_0^2+\left(a^2+b^2\right)n^2-b^2x_0^2-2na^2x_0=0\\ ma^2x_0+nb^2y_0=mn\left(a^2+b^2\right)\\ b^2y_0^2+\left(a^2+b^2\right)m^2-a^2y_0^2-2mb^2y_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\\ n=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0\end{cases}$$

即直线 AB 过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right)$，此点在 C_2 上。当直线斜率不存在时，直线 AB 也过 C_2 上的定点。

(II) 由上可知 C_1 和 C_2 上点由此建立起一种一一对应的关系，即证。

18.必要性：设 P_1P_2：$y+my_0=k\left(x-mx_0\right)$。k 存在时，代入椭圆方程中得：

$$\left(a^2k^2+b^2\right)x^2-2a^2km\left(y_0+kx_0\right)x+a^2m^2\left(y_0+kx_0\right)^2-a^2b^2=0$$

设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 得 $x_1+x_2=\frac{2a^2km(y_0+kx_0)}{a^2k^2+b^2}$， $x_1x_2=\frac{a^2m^2(y_0+kx_0)^2-a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$

$$k_1\cdot k_2=\frac{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{k^2x_1x_2-k(my_0+mkx_0+y_0)(x_1+x_2)+(my_0+mkx_0+y_0)^2}{x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2}$$

$$=\frac{b^2(m+1)\left[2kmx_0y_0+k^2x_0^2(m-1)+y_0^2(m+1)\right]}{a^2(m-1)\left[2kmx_0y_0+k^2x_0^2(m-1)+y_0^2(m+1)\right]}=\frac{b^2(m+1)}{a^2(m-1)}$$

k 不存在时，P_1P_2：x=mx_0 则 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2x_0^2}$，

$$k_1\cdot k_2=\frac{\left(y_0-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2x_0^2}\right)\left(y_0+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2x_0^2}\right)}{x_0^2(1-m)^2}=\frac{y_0^2-\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-m^2x_0^2\right)}{x_0^2(1-m)^2}=\frac{b^2x_0^2\left(m^2-1\right)}{a^2x_0^2(1-m)^2}=\frac{b^2(m+1)}{a^2(m-1)}$$

必要性得证。

充分性：设 P_1P_2 过定点 (q,p)，则 P_1P_2： $y=kx+p-kq$ 。代入椭圆方程得：

$$\left(a^2k^2+b^2\right)x^2+2a^2k(p-kq)x+a^2(p-kq)^2-a^2b^2=0$$

设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 得 $x_1+x_2=-\frac{2a^2k(p-kq)}{a^2k^2+b^2}$， $x_1x_2=\frac{a^2(p-kq)^2-a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$

则 $k_1\cdot k_2=\frac{(y_1-y_0)(y_2-y_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=\frac{k^2x_1x_2+k(p-kq-y_0)(x_1+x_2)+(p-kq-y_0)^2}{x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2}$

$$=\frac{a^2k^2(p-kq)^2-a^2b^2k^2-2a^2k^2(p-kq)(p-kq-y_0)+(p-kq-y_0)^2\left(a^2k^2+b^2\right)}{a^2(p-kq)^2-a^2b^2+2a^2kx_0(p-kq)+x_0^2\left(a^2k^2+b^2\right)}$$

$$=\frac{b^2\left[(p-kq)^2-2y_0(p-kq)+\left(y_0^2-k^2x_0^2\right)\right]}{a^2\left[(p-kq)^2+2kx_0(p-kq)+\left(k^2x_0^2-y_0^2\right)\right]}=\frac{m+1}{m-1}\cdot\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow\frac{(p-kq)^2-2y_0(p-kq)+\left(y_0^2-k^2x_0^2\right)}{(p-kq)^2+2kx_0(p-kq)+\left(k^2x_0^2-y_0^2\right)}=\frac{m+1}{m-1}$$

$$\Rightarrow k^2\left(mx_0^2+q^2-mqx_0-qx_0\right)+k\left(mpx_0+px_0-mqy_0+qy_0-2pq\right)+\left(mpy_0-py_0+p^2-my_0^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}mx_0^2+q^2-mqx_0-qx_0=0\\mpx_0+px_0-mqy_0+qy_0-2pq=0\\mpy_0-py_0+p^2-my_0^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(q-x_0)(q-mx_0)=0\cdots\cdots(1)\\px_0(m+1)+qy_0(1-m)=2pq\cdots\cdots(2)\\(p-y_0)(my_0+p)=0\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

注意到 m≠1，解（1）（3）得 $p=-my_0,q=mx_0$，代入（2）式，成立。

验证 k 不存在的情况，也得到此结论。故 l 过定点 $\left(mx_0,-my_0\right)\left(m\neq 1\right)$，充分性得证。

19. 设 AB： $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$ 即 $y=kx+y_0-kx_0$

$$\begin{cases} y=kx+y_0-kx_0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \left(a^2k^2+b^2\right)x^2+2a^2k\left(y_0-kx_0\right)x+a^2\left[\left(y_0-kx_0\right)^2-b^2\right]=0$$

$$\Rightarrow x_0+x_B=\frac{2a^2k\left(kx_0-y_0\right)}{a^2k^2+b^2}\Rightarrow x_B=\frac{a^2k^2x_0-2a^2ky_0-b^2x_0}{a^2k^2+b^2}\Rightarrow B\left(\frac{a^2k^2x_0-2a^2ky_0-b^2x_0}{a^2k^2+b^2},\frac{b^2y_0-a^2k^2y_0-2b^2kx_0}{a^2k^2+b^2}\right)$$

同理 $C\left(\dfrac{a^2k^2x_0+2a^2ky_0-b^2x_0}{a^2k^2+b^2},\dfrac{b^2y_0-a^2k^2y_0+2b^2kx_0}{a^2k^2+b^2}\right)\therefore k_{BC}=\dfrac{4b^2kx_0}{4a^2ky_0}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

20. 由余弦定理：

$$\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2-2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\cos\gamma=\left(2c\right)^2\Rightarrow\left(\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|\right)^2=4c^2+2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\left(\cos\gamma+1\right)$$

$$\Rightarrow 4a^2=4c^2+2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\left(\cos\gamma+1\right)\Rightarrow\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|=\frac{2b^2}{\cos\gamma+1}=\frac{b^2}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$S_{\Delta F_1PF_2}=\frac{1}{2}\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\sin\gamma=\frac{b^2\sin\gamma}{\cos\gamma+1}=\frac{2b^2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}=b^2\tan\frac{\gamma}{2}=c\left|y_P\right|$$

$$\Rightarrow\left|y_P\right|=\frac{b^2}{c}\tan\frac{\gamma}{2},\left|x_P\right|=\sqrt{a^2-\frac{a^2b^2}{c^2}\tan^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-b^2\tan^2\frac{\gamma}{2}}\therefore P\left(\pm\frac{a}{c}\sqrt{c^2-b^2\tan^2\frac{\gamma}{2}},\pm\frac{b^2}{c}\tan\frac{\gamma}{2}\right)$$

21.由 34： $\dfrac{a-c}{a+c}=\dfrac{1-e}{1+e}=\dfrac{\sin\beta+\sin\alpha-\sin\gamma}{\sin\beta+\sin\alpha+\sin\gamma}=\dfrac{\sin\beta+\sin\alpha-\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\sin\beta+\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\beta\right)}$

$$=\frac{\sin\beta+\sin\alpha-\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\beta+\sin\alpha+\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}=\frac{\sin\beta\left(1-\cos\alpha\right)+\sin\alpha\left(1-\cos\beta\right)}{\sin\beta\left(1+\cos\alpha\right)+\sin\alpha\left(1+\cos\beta\right)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$$

22.由第二定义得：$\left|MF_1\right| = e\left(x_0 + \dfrac{a^2}{c}\right) = a + ex_0, \left|MF_2\right| = e\left(\dfrac{a^2}{c} - x_0\right) = a - ex_0$

23.$\dfrac{PF_1}{d} = \dfrac{PF_2}{PF_1} = e \Rightarrow PF_2 = e \cdot PF_1 \Rightarrow a - ex_0 = e\left(a + ex_0\right) \Rightarrow x_0 = \dfrac{1-e}{e^2+e}a$

$\because x_0 \in \left(0, a\right] \therefore \dfrac{1-e}{e^2+e} \le 1 \Rightarrow e^2 + 2e - 1 \ge 0 \Rightarrow e \ge \sqrt{2} - 1$ 或 $e \le -1 - \sqrt{2} \because e \in \left(0,1\right) \therefore e \in \left[\sqrt{2}-1, 1\right)$

24.在ΔAPF_2中，有$PF_2 - AF_2 \le PA \le PF_2 + AF_2$

$\therefore PF_1 + PA \le PF_1 + PF_2 + AF_2 = 2a + AF_2, PF_1 + PA \ge PF_1 + PF_2 - AF_2 = 2a - AF_2$

都当且仅当A、P、F_2三点共线时取等号。

25.设椭圆上的点 $A\left(x_1, y_1\right), B\left(x_2, y_2\right)$ 关于 $l: y = kx + m$ 对称，$M\left(x_0', y_0'\right)$。

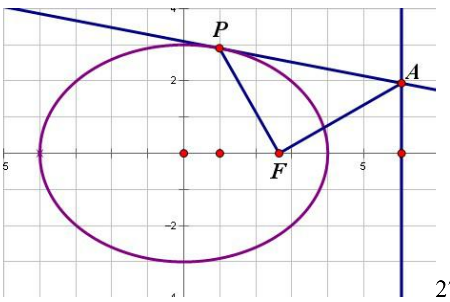
由 12 得：$k_{AB} = -\dfrac{b^2 x_0'}{a^2 y_0'} = -\dfrac{1}{k} \Rightarrow k = \dfrac{a^2 y_0'}{b^2 x_0'} = \dfrac{a^2\left(kx_0' + m\right)}{b^2 x_0'} \Rightarrow x_0' = -\dfrac{a^2 m}{c^2 k}, y_0' = -\dfrac{b^2 m}{c^2}$

又 $\because M$ 在椭圆内，$\therefore \dfrac{a^2 m^2}{c^4 k^2} + \dfrac{b^2 m^2}{c^4} = \dfrac{\left(a^2 + b^2 k^2\right) m^2}{c^4 k^2} < 1 \Rightarrow m^2 < \dfrac{c^4 k^2}{a^2 + b^2 k^2}$ 若 $m = -kx_0$，则

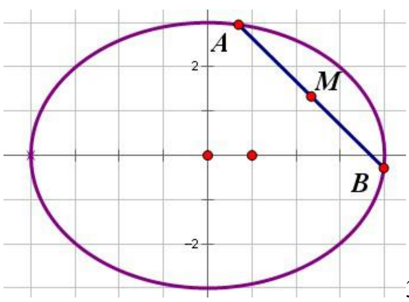
$x_0^2 < \dfrac{c^4}{a^2 + b^2 k^2} = \dfrac{\left(a^2 - b^2\right)^2}{a^2 + b^2 k^2}$

26.由 5 即可得证。

27.设 P$\left(a\cos\varphi, b\sin\varphi\right)$，则切线$l: \dfrac{\cos\varphi}{a}x + \dfrac{\sin\varphi}{b}y = 1$，A$\left(\dfrac{a^2}{c}, \dfrac{b}{\sin\varphi}\left(1 - \dfrac{a\cos\varphi}{c}\right)\right)$



27 图



30 图

$\therefore \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FA} = \left(a\cos\varphi - c, b\sin\varphi\right) \cdot \left(\dfrac{b^2}{c}, \dfrac{b}{\sin\varphi}\left(1 - \dfrac{a\cos\varphi}{c}\right)\right) = \dfrac{ab^2\cos\varphi}{c} - b^2 + b^2 - \dfrac{ab^2\cos\varphi}{c} = 0 \therefore FP \perp FA$

28.设$P\left(a\cos\varphi, b\sin\varphi\right)$，由射影定理有：$b^2\sin^2\varphi = \left(c - a\cos\varphi\right)\left(c + a\cos\varphi\right) = c^2 - a^2\cos^2\varphi$

$$\Rightarrow c^2=a^2\cos^2\varphi+\left(a^2-c^2\right)\sin^2\varphi\Rightarrow e^2=\cos^2\varphi+\left(1-e^2\right)\sin^2\varphi$$

$$\Rightarrow\left(1+\sin^2\varphi\right)e^2=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1\Rightarrow e^2=\frac{1}{1+\sin^2\varphi}$$

29.设 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,C_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k\left(k>1\right),AB\left(l\right):Ax+By+C=0$ 。联立 C_1,l 得：

$\left(A^2a^2+B^2b^2\right)x^2+2Aa^2Cx+a^2C^2-a^2b^2B^2=0$ ，由韦达定理：$x_A+x_B=-\frac{2Aa^2C}{A^2a^2+B^2b^2}$

同理 $x_P+x_Q=-\frac{2Aa^2C}{A^2a^2+B^2b^2}$ 。则

$\text{AP}-\text{BQ}=\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}\left|x_A-x_P\right|-\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}\left|x_B-x_Q\right|=\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}\left(\left|x_A-x_P\right|-\left|x_B-x_Q\right|\right)$

而 x_A-x_P,x_B-x_Q 的符号一定相反，故 $\left|x_A-x_P\right|-\left|x_B-x_Q\right|=x_A+x_B-\left(x_P+x_Q\right)=0$。所以 AP=BQ

30.设 $A\left(a\cos\theta,b\sin\theta\right),B\left(a\cos\varphi,b\sin\varphi\right)$，$M\left(x_0,y_0\right)$ 为 AB 中点。

则

$$\left|AB\right|^2=a^2\left(\cos\theta-\cos\varphi\right)^2+b^2\left(\sin\theta-\sin\varphi\right)^2=4a^2\sin^2\frac{\theta+\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}+4b^2\cos^2\frac{\theta+\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}=4m^2$$

$$\Rightarrow a^2\sin^2\frac{\theta+\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}+b^2\cos^2\frac{\theta+\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}=m^2$$

而 $x_0=\frac{a\cos\theta+a\cos\varphi}{2}=a\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2},y_0=\frac{b\sin\theta+b\sin\varphi}{2}=b\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$

设 $A=\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2},B=\sin^2\frac{\theta+\varphi}{2}$，则 $x_0^2=a^2\left(1-A\right)\left(1-B\right),y_0^2=b^2\left(1-A\right)B,m^2=a^2AB+b^2A\left(1-B\right)$

解得 $A=1-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right),B=\frac{\frac{y_0^2}{b^2}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}$，代入 m² 得：$m^2=\left[1-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)\right]\left(\frac{\frac{a^2y_0^2}{b^2}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}+\frac{\frac{b^2x_0^2}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}\right)$

令 $\tan\alpha=-\frac{bx_0}{ay_0}$ 得：

$$m^2=\left[1-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)\right]\left(\frac{a^2}{\tan^2\alpha+1}+\frac{b^2\cdot\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}\right)=\left[1-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)\right]\left(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)$$

所以定长为 2m（0＜m≤a）的弦中点轨迹方程为 $m^2=\left[1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\right]\left(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)$。

其中 $\tan\alpha=-\dfrac{bx}{ay}$,当 $y=0$ 时，$\alpha=90^{\circ}$ 。

31. 设 $A(a\cos\alpha,b\sin\alpha),B(a\cos\beta,b\sin\beta)$，$M(x_0,y_0)$ 为 AB 中点。则：

$$x_0=\frac{a\cos\alpha+a\cos\beta}{2}=a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Rightarrow\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{x_0}{a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$|AB|^2=a^2(\cos\alpha-\cos\beta)^2+b^2(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}+4b^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

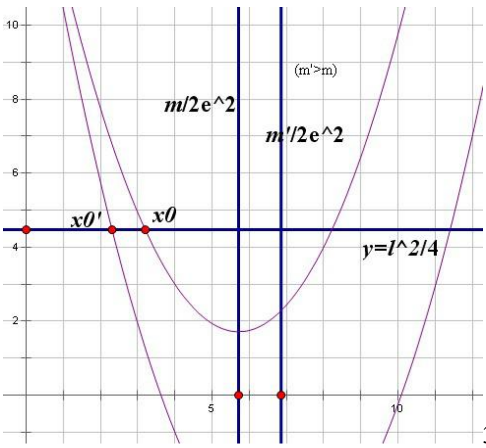
$$=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+b^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\left(1-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(a^2-c^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=l^2$$

$$\Rightarrow a^2-\left(a^2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+c^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+c^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{l^2}{4}$$

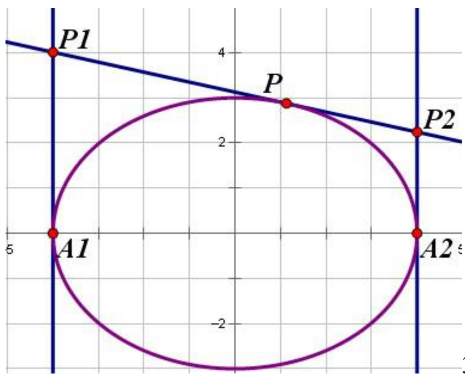
$$\Rightarrow e^2x_0^2-\left(\frac{x_0^2}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}+c^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+a^2=\frac{l^2}{4}\le a^2$$

二次函数 y=e²x²-mx+a² 与 $y=\dfrac{l^2}{4}$ 在 $[0,a]$ 内的交点即为 x_0 的值。由图易知 y=e²x²-mx+a² 与 $y=\dfrac{l^2}{4}$ 的左交点为 x_0 的值。当 m 增大时，x_0 减小。要使 x_0 最大，则要使 m 最小。

$$\frac{x_0^2}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}+c^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\ge 2cx_0\text{，此时等号成立时}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{x_{0\max}}{c}\le 1\Rightarrow x_{0\max}\le c$$



31 图



35 图

当此式成立时

$$y=e^2x^2-mx+a^2=\frac{l^2}{4}\Rightarrow e^2x_{0\max}^2-2cx_{0\max}+a^2=\frac{l^2}{4}\Rightarrow ex_{0\max}-a=-\frac{l}{2}\Rightarrow x_{0\max}=\frac{a}{e}-\frac{l}{2e}=\frac{a^2}{c}-\frac{l}{2e}$$

当$x_{0\max}=\frac{a}{e}-\frac{l}{2e}=\frac{a^2}{c}-\frac{l}{2e}=c$时：$l^2=4\left(ce-a\right)^2\Rightarrow l=2\left(a-ce\right)=\frac{2b^2}{a}=\Phi\left(\text{通径}\right)$

当$x_{0\max}\le c$时：$l\ge\frac{2b^2}{a}=\Phi$ $\therefore$当$l\ge\Phi=\frac{2b^2}{a}$时$x_{0\max}\le c$，$x_{0\max}=\frac{a^2}{c}-\frac{l}{2e}$。

当$x_{0\max}>c$时，当$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1$，即 AB 垂直于 x 轴时 x_0 最大。

$$e^2x_{0\max}^2-x_{0\max}^2+a^2-c^2=\frac{l^2}{4}\Rightarrow x_{0\max}^2=\frac{b^2-\frac{l^2}{4}}{1-e^2}=\frac{a^2}{4b^2}\left(4b^2-l^2\right)\Rightarrow x_{0\max}=\frac{a}{2b}\sqrt{4b^2-l^2}$$

考虑到对称性$x_{0\min}=0$对任意情况均成立。

$$\therefore x_{0\min}=0，x_{0\max}=\begin{cases}\frac{a^2}{c}-\frac{l}{2e}\left(x_{0\max}\le c,l\ge\Phi=\frac{2b^2}{a},AB\text{过焦点},\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{x_0}{c}\right)\\ \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2-l^2}\left(x_{0\max}>c,l<\Phi=\frac{2b^2}{a}，AB\perp x\text{轴},\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1\right)\end{cases}$$

32. $\begin{cases}b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\\Ax+By+C=0\end{cases}\Rightarrow\left(A^2a^2+B^2b^2\right)x^2+2a^2ACx+a^2\left(C^2-B^2b^2\right)=0$

$$\Delta=4a^4A^2C^2-4a^2\left(C^2-B^2b^2\right)\left(A^2a^2+B^2b^2\right)\ge0\Rightarrow A^2a^2+B^2b^2\ge C^2$$

33. $\begin{cases}b^2\left(x-x_0\right)^2+a^2\left(y-y_0\right)^2=a^2b^2\\Ax+By+C=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\left(A^2a^2+B^2b^2\right)x^2+2\left(a^2AC-B^2b^2x_0+a^2ABy_0\right)x+\left(a^2C^2+a^2B^2y_0^2+B^2b^2x_0^2-a^2B^2b^2+2a^2BCy_0\right)=0$$

$$\Delta\ge0\Rightarrow A^2a^2+B^2b^2\ge A^2x_0^2+B^2y_0^2+C^2+2ABx_0y_0+2ACx_0+2BCy_0=\left(Ax_0+By_0+C\right)^2$$

当$x_0=y_0=0$时，即为 32：$A^2a^2+B^2b^2\ge C^2$

34.由正弦定理得$\frac{F_1F_2}{\sin\alpha}=\frac{PF_2}{\sin\beta}=\frac{PF_1}{\sin\gamma}$，所以$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{F_1F_2}{PF_1+PF_2}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=e$。

35. 设$P\left(a\cos\varphi,b\sin\varphi\right)$，则 P 点处的切线为$\frac{\cos\varphi}{a}x+\frac{\sin\varphi}{b}y=1$，

由此可得：$y_{P_1}=\frac{b}{\sin\varphi}\left(1+\cos\varphi\right),y_{P_2}=\frac{b}{\sin\varphi}\left(1-\cos\varphi\right)\therefore\left|P_1A_1\right|\cdot\left|P_2A_2\right|=\frac{b^2\left(1-\cos^2\varphi\right)}{\sin^2\varphi}=b^2$

36.（1）同 15.

（2）由 15,36（3）：$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{|OP|^2+|OQ|^2}{|OP|^2|OQ|^2}=\frac{|OP|^2+|OQ|^2}{4S_{\Delta OPQ}^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

$$\therefore |OP|^2+|OQ|^2=\frac{\left(a^2+b^2\right)4S_{\Delta OPQ}^2}{a^2b^2}\geq\frac{4\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

（3）设 $P\left(a\cos\theta,b\sin\theta\right),Q\left(a\cos\varphi,b\sin\varphi\right)$，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=a^2\cos\theta\cos\varphi+b^2\sin\theta\sin\varphi=0\Rightarrow\tan\theta\tan\varphi=-\frac{a^2}{b^2}$$

$$2S_{\Delta OPQ}=\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\right|=\left\|\begin{matrix}a\cos\theta & b\sin\theta\\ a\cos\varphi & b\sin\varphi\end{matrix}\right\|=\left|ab\left(\sin\theta\cos\varphi-\sin\varphi\cos\theta\right)\right|$$

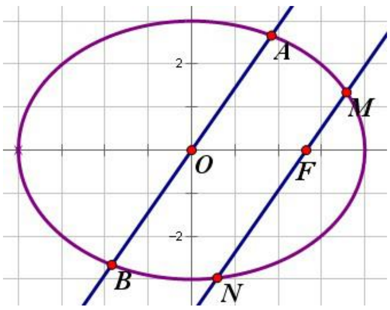
$$\Rightarrow\frac{4S_{\Delta OPQ}^2}{a^2b^2}=\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$$

$$=\frac{\tan^2\theta+\tan^2\varphi-2\tan\theta\tan\varphi}{\left(\tan^2\theta+1\right)\left(\tan^2\varphi+1\right)}=\frac{\tan^2\theta+\frac{\frac{a^4}{b^4}}{\tan^2\theta}+2\frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^4}{b^4}+\tan^2\theta+\frac{\frac{a^4}{b^4}}{\tan^2\theta}+1}$$

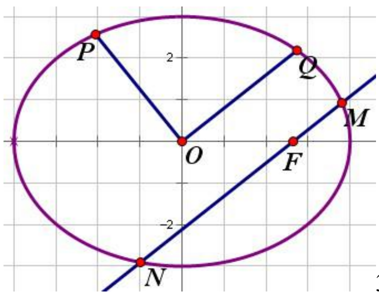
$$\Rightarrow\frac{a^2b^2}{4S_{\Delta OPQ}^2}=\frac{\frac{a^4}{b^4}-2\frac{a^2}{b^2}+1}{\tan^2\theta+\frac{\frac{a^4}{b^4}}{\tan^2\theta}+2\frac{a^2}{b^2}}+1\leq\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4a^2b^2}+1=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4a^2b^2}\Rightarrow S_{\Delta OPQ}^2\geq\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)^2\Rightarrow S_{\Delta OPQ}\geq\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore S_{\min}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

37.设 $\angle MFx=\theta,AB:\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$，椭圆 $\rho=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}\left(p=\dfrac{b^2}{a}\right)$



37 图



38 图

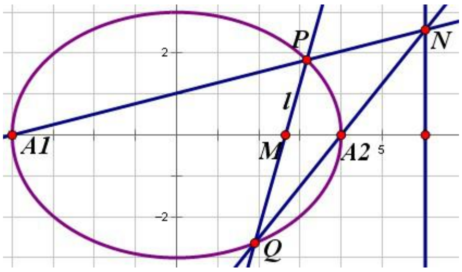
则 $MN=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}+\dfrac{p}{1-e\cos\theta}=\dfrac{2p}{1-e^2\cos^2\theta}=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}=\dfrac{2ab^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$

将 AB 的方程代入椭圆的标准方程中得：$t^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$，由参数 t 的几何意义可知：

$$\left|AB\right|^2=4t^2=\frac{4a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=2a\left|MN\right|$$

38.作半弦 OQ⊥OP，由 37 得：$\left|OQ\right|^2=\dfrac{a}{2}\left|MN\right|$，由 15：$\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{2}{a\left|MN\right|}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

39. 设 $l:x=ty+m,P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，将 l 的方程代入椭圆得：$\left(a^2+b^2t^2\right)y^2+2b^2mty+b^2\left(m^2-a^2\right)=0$



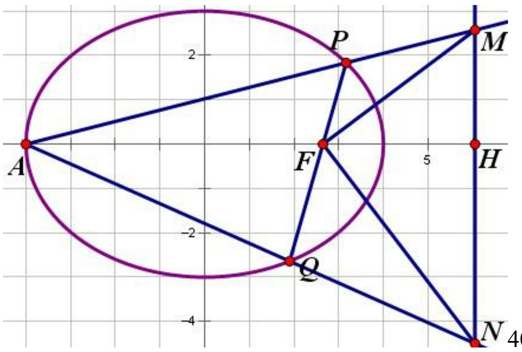
由韦达定理得：$y_1+y_2=-\dfrac{2b^2mt}{a^2+b^2t^2},y_1y_2=\dfrac{b^2\left(m^2-a^2\right)}{a^2+b^2t^2}$，直线 A₁P 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+a}\left(x+a\right)$，直线 A₂Q 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-a}\left(x-a\right)$，联立 A₁P 和 A₂Q 得交点 N 的横坐标 $x=\dfrac{2ty_1y_2+\left(a+m\right)y_2+\left(m-a\right)y_1}{\left(a+m\right)y_2+\left(a-m\right)y_1}a$，代入化简：

$$x=\frac{2b^2tm^2-2b^2ta^2-2b^2m^2t+a\left(a^2+b^2t^2\right)\left(y_2-y_1\right)}{-2ab^2mt+m\left(a^2+b^2t^2\right)\left(y_2-y_1\right)}a=\frac{a\left[\left(a^2+b^2t^2\right)\left(y_2-y_1\right)-2ab^2t\right]}{m\left[\left(a^2+b^2t^2\right)\left(y_2-y_1\right)-2ab^2t\right]}a=\frac{a^2}{m}$$

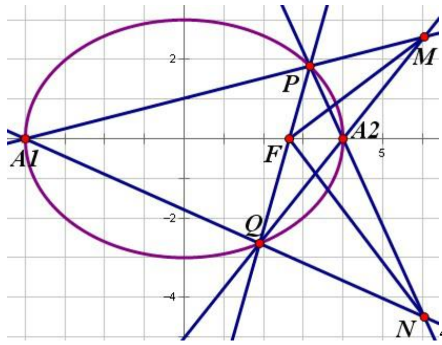
所以交点一定在直线 $x=\dfrac{a^2}{m}$ 上。同理可证 M 在 y 轴上的情况。

引理（张角定理）：A,C,B 三点按顺序排列在一条直线上。直线外一点 P 对 AC 的张角为α，对 CB 的张角为β。

则：$\dfrac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{PC}=\dfrac{\sin\alpha}{PB}+\dfrac{\sin\beta}{PA}$



40 图



41 图

40.如图，A 为左顶点时，设 $\angle PFH=\theta,\angle MFH=\varphi$，则 $\angle AFP=\pi-\theta,\angle PFM=\theta-\varphi$

$FH=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}=\frac{b^2}{ae}=\frac{p}{e},FM=\frac{p}{e\cos\varphi}\left(p=\frac{b^2}{a}\right)$。对 F-APM 由张角定理：

$$\frac{\sin(\pi-\varphi)}{FP}=\frac{\sin(\pi-\theta)}{FM}+\frac{\sin(\theta-\varphi)}{FA}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi+e\sin\varphi\cos\theta=e\sin\theta\cos\varphi+\sin(\theta-\varphi)-e\sin(\theta-\varphi)\Rightarrow \sin\varphi=\sin(\theta-\varphi)$$

$\because 0<\theta<\pi \therefore \varphi=\theta-\varphi$ 即 FM 平分 $\angle PFH$，同理 FN 平分 $\angle QFH$。$\therefore \angle MFN=90^\circ$ 即 MF⊥NF

当 A 为右顶点时，由 39 可知左顶点 A'与 P、M；Q、N 分别共线，于是回到上一种情况。

41.如图，设 $\angle PFA_2=\theta,\angle MFA_2=\varphi$，则 $\angle A_1FP=\pi-\theta,\angle PFM=\theta-\varphi,\angle A_2FQ=\pi-\theta$

对 F-QA_2M 和 F-A_1PM 由张角定理：

$$\frac{\sin(\pi-\varphi)}{FP}=\frac{\sin(\pi-\theta)}{FM}+\frac{\sin(\theta-\varphi)}{FA_1},\frac{\sin(\pi-\theta+\varphi)}{FA_2}=\frac{\sin(\pi-\theta)}{FM}+\frac{\sin\varphi}{FQ}$$

两式相减并化简得：$\frac{\sin\varphi}{FP}+\frac{\sin\varphi}{FQ}=\frac{\sin(\theta-\varphi)}{FA_1}+\frac{\sin(\theta-\varphi)}{FA_2}\Rightarrow \sin\varphi=\sin(\theta-\varphi)$

$\because 0<\theta<\pi \therefore \varphi=\theta-\varphi$ 即 FM 平分 $\angle PFA_2$，同理 FN 平分 $\angle QFA_2$。$\therefore \angle MFN=90^\circ$ 即 MF⊥NF

42.由 12 即可证得。

43.设 $P(x_0,y_0)$，AB：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$，CD：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\beta\\ y=y_0+t\sin\beta\end{cases}$，将 AB 的方程代入椭圆得：

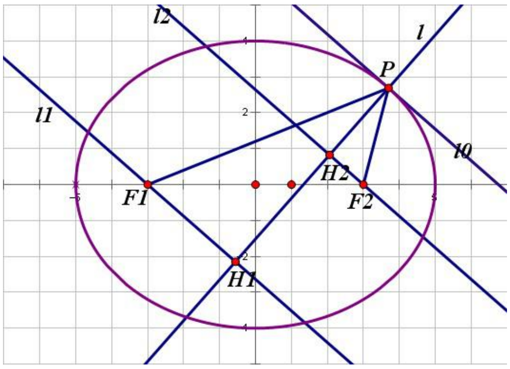
$$(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)t^2+2(b^2x_0\cos\alpha+a^2y_0\sin\alpha)t+(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)=0$$

由参数 t 的几何意义可知：$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\frac{|b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2|}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$，同理

$$|PC|\cdot|PD|=\frac{\left|b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2\right|}{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}$$

$$\therefore\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\frac{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$$

44. 对于外角平分线的情况由 5 即可证得，下仅证 l 为内角平分线的情况。



设 P$\left(a\cos\varphi,b\sin\varphi\right)$，则 $l_0:\dfrac{\cos\varphi}{a}x+\dfrac{\sin\varphi}{b}y=1\Rightarrow b\cos\varphi+a\sin\varphi-ab=0$

则 $l:a\sin\varphi x-b\cos\varphi y-c^2\sin\varphi\cos\varphi=0$， $l_1:b\cos\varphi x+a\sin\varphi y+bc\cos\varphi=0$

$l_2:b\cos\varphi x+a\sin\varphi y-bc\cos\varphi=0$ 。分别联立 l、l_1 和 l、l_2 得：

$$H_1\left(\frac{c\cos\varphi\left(ac\sin^2\varphi-b^2\cos\varphi\right)}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi},-\frac{bc\sin\varphi\cos\varphi}{a-c\cos\varphi}\right),\quad H_2\left(\frac{c\cos\varphi\left(ac\sin^2\varphi+b^2\cos\varphi\right)}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi},\frac{bc\sin\varphi\cos\varphi}{a+c\cos\varphi}\right)$$

则 $x_{H_1}+c=\dfrac{ac\sin^2\varphi}{a-c\cos\varphi}$， $x_{H_2}-c=-\dfrac{ac\sin^2\varphi}{a+c\cos\varphi}$ 对 H_1 点：$\dfrac{b(x+c)}{ay}=-\tan\varphi\Rightarrow\tan\varphi=-\dfrac{b(x+c)}{ay}$

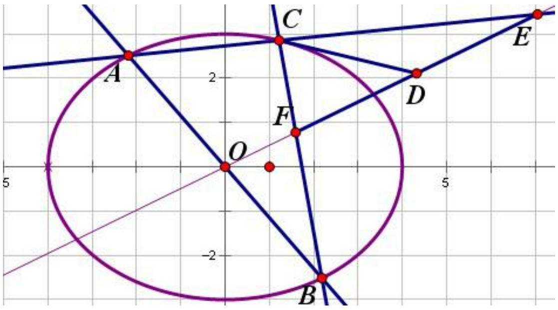
$\therefore\sin\varphi=\pm\dfrac{b(x+c)}{\sqrt{a^2y^2+b^2(x+c)^2}},\cos\varphi=\mp\dfrac{ay}{\sqrt{a^2y^2+b^2(x+c)^2}}$，代回 $x_{H_1}+c$ 式得：

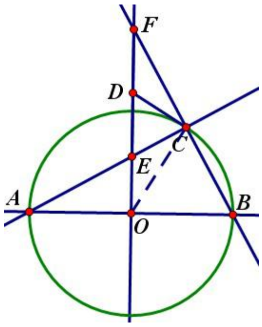
$$\frac{x+c}{ac}=\frac{\dfrac{b^2(x+c)^2}{a^2y^2+b^2(x+c)^2}}{a\pm\dfrac{acy}{\sqrt{a^2y^2+b^2(x+c)^2}}}\Rightarrow 1\pm\frac{cy}{\sqrt{a^2y^2+b^2(x+c)^2}}=\frac{b^2c(x+c)}{a^2y^2+b^2(x+c)^2}$$

$$\Rightarrow\pm\frac{cy}{\sqrt{a^2y^2+b^2(x+c)^2}}=\frac{b^2c(x+c)-a^2y^2-b^2(x+c)^2}{a^2y^2+b^2(x+c)^2}=-\frac{a^2y^2+b^2x(x+c)}{a^2y^2+b^2(x+c)^2}\Rightarrow c^2y^2=\frac{\left[a^2y^2+b^2x(x+c)\right]^2}{a^2y^2+b^2(x+c)^2}$$

同理对 H_2 点得 $c^2y^2=\dfrac{\left[a^2y^2+b^2x(x-c)\right]^2}{a^2y^2+b^2(x-c)^2}$。故 H_1 点、H_2 点的轨迹方程为 $c^2y^2=\dfrac{\left[a^2y^2+b^2x(x\pm c)\right]^2}{a^2y^2+b^2(x\pm c)^2}$

45.由伸缩变换 $y'=\dfrac{a}{b}y$ 将椭圆（左图）变为圆（右图），椭圆中的共轭直径变为圆中相互垂直的直径。所证命题变为证 CD 与圆 O 相切的充要条件是 D 为 EF 中点。





充分性：若 D 为 EF 中点 ∵C 在圆上，AB⊥OE ∴FC⊥CE，OF⊥OB ∴CD=DE=DF ∴∠DCF=∠OFB=∠OAC=∠OCA

∴∠OCD=∠OCA+∠ECD=∠ECD+∠DCF=∠ECF=90°∴OC⊥CD ∴CD 与圆相切。

必要性：若 CD 与圆相切，则∠OCD=∠ACB=∠FOB=90°∴∠DCF=∠OCA=∠OAC=∠CFD ∴DF=DC ∵∠ECF=90°

∴∠DEC=90°－∠CFD=90°－∠DCF=∠DCE ∴CD=DE=DF 即 D 为 EF 中点。

46.设 $\angle MFx=\varphi$，由椭圆极坐标方程：$|MN|=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}+\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}=\dfrac{2p}{1-e^2\cos^2\varphi}$

$$|HF|=\frac{\left|\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}-\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}\right|}{2}=\frac{ep|\cos\varphi|}{1-e^2\cos^2\varphi},\quad |PF|=\frac{|HF|}{|\cos\varphi|}=\frac{ep}{1-e^2\cos^2\varphi}\quad \therefore\frac{|PF|}{|MN|}=\frac{e}{2}$$

47.由 10 可知 l 为切线 $l:b^2x_1x+a^2y_1y-a^2b^2=0$ $\quad\therefore d=\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}$ 由 22: $r_1r_2=a^2-e^2x_1^2$

$$\therefore\sqrt{r_1r_2}\,d=\sqrt{a^2-e^2x_1^2}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}=\frac{a^2b^2\sqrt{a^2-e^2x_1^2}}{\sqrt{b^4x_1^2+a^2b^2\left(a^2-x_1^2\right)}}=\frac{a^2b\sqrt{a^2-e^2x_1^2}}{\sqrt{a^4-c^2x_1^2}}=ab$$

48.同 29。

49.设AB中点为$M\left(x_0,y_0\right)$,则$k_{AB}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\therefore k_{MP}=\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}\therefore MP:y-y_0=\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$

令$y=0$,得$x_P=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x_0\because x_0\in(-a,a)\therefore x_P\in\left(-\dfrac{a^2-b^2}{a},\dfrac{a^2-b^2}{a}\right)$

50.同 20。

51.设 $l:x=ty+m,P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，代入椭圆方程得：$\left(a^2+b^2t^2\right)y^2+2b^2mty+b^2\left(m^2-a^2\right)=0$

由韦达定理得：$y_1+y_2=-\frac{2b^2mt}{a^2+b^2t^2},y_1y_2=\frac{b^2\left(m^2-a^2\right)}{a^2+b^2t^2}$

由 A、P、M 三点共线得 $y_M=\frac{n+a}{x_1+a}y_1=\frac{\left(n+a\right)y_1}{ty_1+m+a}$，同理 $y_N=\frac{\left(n+a\right)y_2}{ty_2+m+a}$

$\therefore \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=\left(n-m\right)^2+y_My_N=\left(n-m\right)^2+\frac{\left(n+a\right)^2y_1y_2}{t^2y_1y_2+t\left(m+a\right)\left(y_1+y_2\right)+\left(m+a\right)^2}$

$=\left(n-m\right)^2+\frac{b^2\left(m^2-a^2\right)\left(n+a\right)^2}{b^2t^2\left(m^2-a^2\right)-2b^2mt^2\left(m+a\right)+\left(m+a\right)^2\left(a^2+b^2t^2\right)}$

$=\left(n-m\right)^2+\frac{b^2\left(m-a\right)\left(n+a\right)^2}{b^2t^2\left(m-a\right)-2b^2mt^2+\left(m+a\right)\left(a^2+b^2t^2\right)}=\left(n-m\right)^2+\frac{b^2\left(m-a\right)\left(n+a\right)^2}{a^2\left(m+a\right)}=0\Rightarrow\frac{a-m}{a+m}=\frac{a^2\left(n-m\right)^2}{b^2(n+a)^2}$

52,53,54 为同一类题（最佳观画位置问题），现给出公式：若有两定点 A$\left(-k,0\right)$，B$\left(k,0\right)$，点 P$\left(m,y\right)$在直线 x=m 上（m>k），则当 $y^2=\left(m+k\right)\left(m-k\right)=m^2-k^2$ 时，∠APB 最大，其正弦值为$\frac{k}{m}$。

52.k=c,m=a　∴sinα≤e,当且仅当 PH=b 时取等号。　53. k=a,m=$\frac{a^2}{c}$　∴sinα≤e,当且仅当 PH=$\frac{ab}{c}$时取等号。

54. k=c,m=$\frac{a^2}{c}$　∴sinα≤e^2,当且仅当 PH=$\frac{b}{c}\sqrt{a^2+c^2}$ 时取等号。

55.设∠$AF_2x=\theta$，$\left|F_1A\right|\cdot\left|F_1B\right|=\left(2a-\frac{p}{1+e\cos\theta}\right)\left(2a-\frac{p}{1-e\cos\theta}\right)=4a^2+\frac{p\left(p-4a\right)}{1-e^2\cos^2\theta}$

$\because p\left(p-4a\right)<0\quad\therefore\cos^2\theta\uparrow\quad\left|F_1A\right|\cdot\left|F_1B\right|\downarrow$

∴ 当 θ =0° 时，$\left(\left|F_1A\right|\cdot\left|F_1B\right|\right)_{\min}=b^2$；当 θ =90° 时，$\left(\left|F_1A\right|\cdot\left|F_1B\right|\right)_{\max}=\frac{\left(2a^2-b^2\right)^2}{a^2}$

$\therefore b^2\le\left|F_1A\right|\cdot\left|F_1B\right|\le\frac{\left(2a^2-b^2\right)^2}{a^2}$

56.（1）设 $AP:\begin{cases}x=t\cos\alpha-a\\y=t\sin\alpha\end{cases}$，代入椭圆方程得：$\left(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha\right)t^2=2ab^2t\cos\alpha$　∵AP=$\left|t\right|$≠0

∴AP=$\left|t\right|=\frac{2ab^2\left|\cos\alpha\right|}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}=\frac{2ab^2\cos\alpha}{a^2-c^2\cos^2\alpha}$

（2）设 $P\left(x_0,y_0\right)$ 则 $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{y_0^2}{a^2-x_0^2}=\dfrac{b^2}{a^2}=1-e^2$

（3）$S=\dfrac{1}{2}PA\cdot AB\sin\alpha=\dfrac{2a^2b^2\sin\alpha\cos\alpha}{a^2-c^2\cos^2\alpha}=\dfrac{2a^2b^2\tan\alpha}{a^2\tan^2\alpha+b^2}$

由（2）：$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{\tan\alpha+\dfrac{b^2}{a^2\tan\alpha}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{a^2\tan^2\alpha+b^2}{c^2\tan\alpha}=-\tan\gamma\Rightarrow\cot\gamma=-\dfrac{c^2\tan\alpha}{a^2\tan^2\alpha+b^2}$

$\therefore S=-\dfrac{2a^2b^2\cot\gamma}{c^2}=\dfrac{2a^2b^2\cot\gamma}{b^2-a^2}$

57.由 58 可证。

58.（1）易知 PQ 的斜率为 0 和斜率不存在时，对任意 x 轴上的点 A 都成立。设 $PQ:x=ty+m$，A（m，0）代入椭圆方程得：$\left(a^2+b^2t^2\right)y^2+2b^2mty+b^2\left(m^2-a^2\right)=0$，则

$y_1+y_2=-\dfrac{2b^2mt}{a^2+b^2t^2},y_1y_2=\dfrac{b^2\left(m^2-a^2\right)}{a^2+b^2t^2}$

若 $\angle PBA=\angle QBA$，则 $k_{BQ}+k_{BP}=0\Rightarrow\dfrac{y_1}{x_1-x_B}+\dfrac{y_2}{x_2-x_B}=0\Rightarrow y_1\left(ty_2+m-x_B\right)+y_2\left(ty_1+m-x_B\right)=0$

$\Rightarrow 2ty_1y_2+\left(m-x_B\right)\left(y_1+y_2\right)=0\Rightarrow\dfrac{2b^2t\left(m^2-a^2\right)}{a^2+b^2t^2}-\dfrac{2b^2mt\left(m-x_B\right)}{a^2+b^2t^2}=0\Rightarrow 2b^2t\left(m^2-a^2\right)-2b^2mt\left(m-x_B\right)=0$

$\Rightarrow m^2t-a^2t-m^2t+mtx_B=0\Rightarrow x_B=\dfrac{a^2}{m}\Rightarrow x_A\cdot x_B=m\cdot\dfrac{a^2}{m}=a^2$

（2）作 P 关于 x 轴的对称点 P'，由（1）即证。

59.同 9。

60.设椭圆 $\rho=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}=\dfrac{b^2}{a-c\cos\varphi}$，$\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

则 $\left|AB\right|+\left|CD\right|=\dfrac{b^2}{a-c\cos\varphi}+\dfrac{b^2}{a-c\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)}+\dfrac{b^2}{a-c\cos\left(\varphi+\pi\right)}+\dfrac{b^2}{a-c\cos\left(\varphi+\dfrac{3\pi}{2}\right)}$

$=\dfrac{b^2}{a-c\cos\varphi}+\dfrac{b^2}{a+c\cos\varphi}+\dfrac{b^2}{a-c\sin\varphi}+\dfrac{b^2}{a+c\sin\varphi}=\dfrac{8ab^2\left(a^2+b^2\right)}{4a^2b^2+c^4\sin^22\varphi}$

当$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$时，$|AB|+|CD|$有最小值$\dfrac{8ab^2}{a^2+b^2}$；当$\varphi=0$或$\dfrac{\pi}{2}$时，$|AB|+|CD|$有最大值$\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)}{a}$

$\therefore \dfrac{8ab^2}{a^2+b^2}\le|AB|+|CD|\le\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)}{a}$

61,62,63为同一类问题，现给出公式：若点P到两定点A$\left(-m,0\right)$，B$\left(m,0\right)$的距离之比$\dfrac{PA}{PB}=k\left(k>0,k\neq1\right)$，则P点的轨迹为一个圆，圆心坐标为$\left(\dfrac{k^2+1}{k^2-1}m,0\right)$，圆的半径为$\dfrac{2km}{\left|k^2-1\right|}$。

下三个题的比值k均为$\dfrac{a-c}{b}$，代入上述公式得：圆心坐标为$\left(\dfrac{m}{e},0\right)$，圆的半径为$\dfrac{b}{c}m$。

61.m=c，圆心坐标为$\left(\pm a,0\right)$，圆的半径为b。轨迹方程是姊妹圆$\left(x\pm a\right)^2+y^2=b^2$。

62.m=a，圆心坐标为$\left(\pm\dfrac{a}{e},0\right)$，圆的半径为$\dfrac{b}{e}$。轨迹方程是姊妹圆$\left(x\pm\dfrac{a}{e}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{b}{e}\right)^2$。

63.m=$\dfrac{a^2}{c}$，圆心坐标为$\left(\pm\dfrac{a}{e^2},0\right)$，圆的半径为$\dfrac{b}{e^2}$。轨迹方程是姊妹圆$\left(x\pm\dfrac{a}{e^2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{b}{e^2}\right)^2$。

64. 设 $P\left(a\cos\varphi,b\sin\varphi\right),Q\left(x,y\right),A\left(-a,0\right),A'\left(a,0\right)$，由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{A'P}\cdot\overrightarrow{A'Q}=0$ 得 $Q\left(-a\cos\varphi,-\dfrac{a^2\sin\varphi}{b}\right)$

消去参数φ得Q点的轨迹方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{b^2y^2}{a^4}=1$

65.同37。 66.（1）同35（2）由基本不等式$|AM|+|A'M'|\ge2b$，则梯形$MAA'M'$面积的最小值为$\dfrac{1}{2}\cdot2a\cdot2b=2ab$。

67.设AC交x轴于M，AD⊥l于D。由椭圆第二定义：$\dfrac{FM}{EM}=\dfrac{\dfrac{AM\cdot BC}{AC}}{\dfrac{CM\cdot AD}{AC}}=\dfrac{AM\cdot BC}{CM\cdot AD}=\dfrac{AF\cdot BC}{BF\cdot AD}=\dfrac{e}{e}=1$

∴AC过EF的中点。

68.（1）由17可知当椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$时，AB过定点$\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot-a,0\right)$。当椭圆方程变为$\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

时，椭圆向右平移了 a 个单位，定点也应向右平移了 a 个单位，故此时 AB 过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot -a+a,0\right)$ 即

$\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2},0\right)$

（2）由 69（2）P 为原点，即 m=n=0 时 Q 点的轨迹方程是 $\left(x-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2 \left(x\neq 0\right)$。

69.（1）由 17 可知当椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 时，AB 过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(m-a\right),\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}n\right)$。当椭圆方程变为 $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

时，椭圆向右平移了 a 个单位，定点也应向右平移了 a 个单位，故此时 AB 过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(m-a\right)+a,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}n\right)$ 即 $\left(\frac{2ab^2+m(a^2-b^2)}{a^2+b^2},\frac{n(b^2-a^2)}{a^2+b^2}\right)$。

（2）先证椭圆中心在原点的情况。椭圆方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$P\left(x_0,y_0\right)$，AB 的斜率为 $k=\tan\theta$。

由 17（1）：AB 过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right)$，设 AB：$y-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0=k\left(x-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0\right)$，PQ：$y-y_0=-\frac{1}{k}\left(x-x_0\right)$

两者联立得 $y_Q=\frac{2b^2kx_0}{\left(k^2+1\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{a^2\left(k^2-1\right)y_0}{\left(k^2+1\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^2y_0}{a^2+b^2}$，

$x_Q=\frac{2a^2ky_0}{\left(k^2+1\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^2\left(1-k^2\right)x_0}{\left(k^2+1\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{a^2x_0}{a^2+b^2}$

则 $x_Q-\frac{a^2x_0}{a^2+b^2}=\frac{2a^2ky_0}{\left(k^2+1\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^2\left(1-k^2\right)x_0}{\left(k^2+1\right)\left(a^2+b^2\right)}=\frac{2a^2y_0\tan\theta}{\left(\tan^2\theta+1\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^2x_0\left(1-\tan^2\theta\right)}{\left(\tan^2\theta+1\right)\left(a^2+b^2\right)}$

$=\frac{2a^2y_0\sin\theta\cos\theta}{a^2+b^2}+\frac{b^2x_0\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}{a^2+b^2}=\frac{a^2y_0}{a^2+b^2}\sin 2\theta+\frac{b^2x_0}{a^2+b^2}\cos 2\theta$

$y_Q-\frac{b^2y_0}{a^2+b^2}=\frac{2b^2kx_0}{\left(k^2+1\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{a^2\left(k^2-1\right)y_0}{\left(k^2+1\right)\left(a^2+b^2\right)}=\frac{2b^2x_0\tan\theta}{\left(\tan^2\theta+1\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{a^2y_0\left(\tan^2\theta-1\right)}{\left(\tan^2\theta+1\right)\left(a^2+b^2\right)}$

$=\frac{2b^2x_0\sin\theta\cos\theta}{a^2+b^2}+\frac{a^2y_0\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)}{a^2+b^2}=\frac{b^2x_0}{a^2+b^2}\sin 2\theta-\frac{a^2y_0}{a^2+b^2}\cos 2\theta$

$$\therefore\left(x_Q-\frac{a^2x_0}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y_Q-\frac{b^2y_0}{a^2+b^2}\right)^2=\left(\frac{a^2y_0}{a^2+b^2}\sin 2\theta+\frac{b^2x_0}{a^2+b^2}\cos 2\theta\right)^2+\left(\frac{b^2x_0}{a^2+b^2}\sin 2\theta-\frac{a^2y_0}{a^2+b^2}\cos 2\theta\right)^2$$

$$=\frac{b^4x_0^2+a^4y_0^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{b^2\left(a^2b^2-a^2y_0^2\right)+a^4y_0^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{a^2\left[b^4+y_0^2\left(a^2-b^2\right)\right]}{\left(a^2+b^2\right)^2}$$

当椭圆方程变为$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$时，椭圆向右平移了$a$个单位，圆心也应向右平移了$a$个单位，而半径不变。故此时圆心的坐标为$\left(\frac{a^2(m-a)}{a^2+b^2}+a,\frac{b^2n}{a^2+b^2}\right)$即$\left(\frac{ab^2+a^2m}{a^2+b^2},\frac{b^2n}{a^2+b^2}\right)$，半径的平方仍为$\frac{a^2\left[b^4+y_0^2\left(a^2-b^2\right)\right]}{\left(a^2+b^2\right)^2}$。

∴Q 点的轨迹方程为$\left(x_Q-\frac{ab^2+a^2m}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y_Q-\frac{b^2n}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{a^2\left[b^4+y_0^2\left(a^2-b^2\right)\right]}{\left(a^2+b^2\right)^2}\left(x\neq m\text{且}y\neq n\right)$。

70.设 L:Ax+By+C=0,则$d_1=\frac{|C-Ac|}{\sqrt{A^2+B^2}},d_2=\frac{|C+Ac|}{\sqrt{A^2+B^2}}$　　$\therefore d_1d_2=\frac{\left|C^2-A^2c^2\right|}{A^2+B^2}$

将 L 代入椭圆方程得：$\left(A^2a^2+B^2b^2\right)y^2+2BCb^2y+b^2C^2-A^2a^2b^2=0$，

$\Delta=4a^2b^2A^2\left(A^2a^2+B^2b^2-C^2\right)$

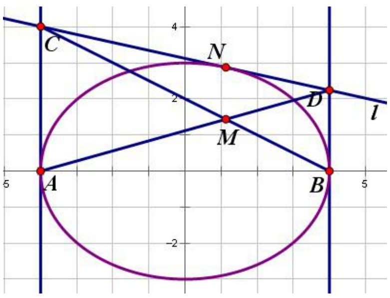
$\Delta<0\Leftrightarrow A^2a^2+B^2b^2-C^2<0\Leftrightarrow\left(A^2+B^2\right)b^2+A^2c^2-C^2<0\Leftrightarrow C^2-A^2c^2>\left(A^2+B^2\right)b^2>0$

$d_1d_2>b^2$ ⇔直线L和椭圆相离，且 F₁、F₂在 L 同侧。　$d_1d_2=b^2$ ⇔直线 L 和椭圆相切，且 F₁、F₂在L同侧。

$d_1d_2<b^2$ ⇔直线 L 和椭圆相交，或 F₁、F₂在 L 异侧。

71.由 35：

$$y_C=\frac{b}{\sin\varphi}(1+\cos\varphi),y_D=\frac{b}{\sin\varphi}(1-\cos\varphi)\ \therefore\frac{1}{y_M}=\frac{1}{y_C}+\frac{1}{y_D}=\frac{\sin\varphi}{b(1+\cos\varphi)}+\frac{\sin\varphi}{b(1-\cos\varphi)}=\frac{2}{b\sin\varphi}$$



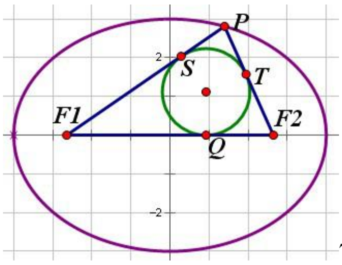
$\therefore y_M=\dfrac{b\sin\varphi}{2}$　　由$\dfrac{x_M+a}{2a}=\dfrac{y_M}{y_D}$得$x_M=a\cos\varphi$，消去参数$\varphi$得 M 点的轨迹方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}=1\left(y\neq 0\right)$$

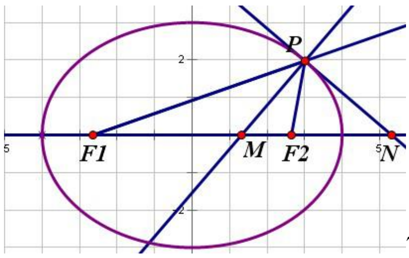
72.由 43：$|PA|\cdot|PB|=\dfrac{\left|b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2\right|}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\dfrac{a^2b^2-\left(b^2x_0^2+a^2y_0^2\right)}{b^2+c^2\sin^2\theta}$。当$\theta=0$即 AB 与椭圆长轴平行时，$\left(PA\cdot PB\right)_{\max}=\dfrac{a^2b^2-\left(b^2x_0^2+a^2y_0^2\right)}{b^2}$；当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$即 AB 与椭圆短轴平行时，$\left(PA\cdot PB\right)_{\min}=\dfrac{a^2b^2-\left(b^2x_0^2+a^2y_0^2\right)}{a^2}$

73.同 7。　74.同 8。　75.由 8 可知，F_2处的切线长$\left|F_2T\right|=a+c-2c=a-c$，同理可证 P 在其他位置情况。

76. 如图，由切线长定理 PS=PT，PS+PT=PF$_1$+PF$_2$-F$_1$S-F$_2$T= PF$_1$+PF$_2$-F$_1$Q-F$_2$Q= 2a-2c，所以 PS=PT=a-c



76 图



77 图

77. 设 P$\left(a\cos\varphi,b\sin\varphi\right)$，由 79 中得到的内点坐标和 22 中的焦半径公式：$\dfrac{x_M+c}{PF_1}=\dfrac{\dfrac{c^2\cos\varphi}{a}+c}{a+c\cos\varphi}=e$，$\dfrac{c-x_M}{PF_2}=\dfrac{c-\dfrac{c^2\cos\varphi}{a}}{a-c\cos\varphi}=e$

78. $\because MN平分\angle F_1MF_2\therefore\dfrac{MF_1}{MF_2}=\dfrac{NF_1}{NF_2}\Rightarrow\dfrac{MF_2}{NF_2}=\dfrac{MF_1}{NF_1}$，同理$F_2I$平分$\angle MF_2N$

$$\therefore\frac{MI}{NI}=\frac{MF_2}{NF_2}=\frac{MF_1+MF_2}{NF_1+NF_2}=\frac{2a}{2c}=\frac{1}{e}$$

79. 设 P$\left(a\cos\varphi,b\sin\varphi\right)$，则$\angle F_1PF_2$外角平分线（即切线）$l:\dfrac{\cos\varphi}{a}x+\dfrac{\sin\varphi}{b}y=1$，由此得外点$N\left(\dfrac{a}{\cos\varphi},0\right)$

同理 $\angle F_1PF_2$ 内角平分线（即法线）$l': \frac{\sin\varphi}{b}x-\frac{\cos\varphi}{a}y-\frac{c^2}{ab}\sin\varphi\cos\varphi=0$，由此得内点 $M\left(\frac{c^2\cos\varphi}{a},0\right)$

$\therefore x_M\cdot x_N=\frac{c^2\cos\varphi}{a}\cdot\frac{a}{\cos\varphi}=c^2$

80.由 79 中得到的内外点坐标可得：$c\left(c-\frac{c^2\cos\varphi}{a}\right)=\frac{c^2\cos\varphi}{a}\left(\frac{a}{\cos\varphi}-c\right)$，即证。

81.由 79 中得到的内外点坐标可得：$\frac{a}{\cos\varphi}\left(c-\frac{c^2\cos\varphi}{a}\right)=c\left(\frac{a}{\cos\varphi}-c\right)$，即证。

82.同 5。 83.同 5。 84.由 5,7 即证。

85. 设 P $\left(a\cos\varphi,b\sin\varphi\right)$，则 $\angle F_1PF_2$ 外角平分线（即切线）$l:\frac{\cos\varphi}{a}x+\frac{\sin\varphi}{b}y=1$，

$$\tan\beta=-\frac{\frac{\cos\varphi}{a}}{\frac{\sin\varphi}{b}}=-\frac{b}{a\tan\varphi}$$

由 50 得：$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha=\frac{bc\sin\varphi}{b^2}=\frac{c\sin\varphi}{b}$，$\tan\alpha=\frac{b}{c\sin\varphi}$ 则

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}=\frac{\frac{1}{\tan^2\alpha+1}}{\frac{1}{\tan^2\beta+1}}=\frac{\tan^2\beta+1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{b^2}{a^2\tan^2\varphi}+1}{\frac{b^2}{c^2\sin^2\varphi}+1}=\frac{\frac{b^2c^2\sin^2\varphi}{a^2\tan^2\varphi}+c^2\sin^2\varphi}{b^2+c^2\sin^2\varphi}=\frac{b^2e^2\cos^2\varphi+c^2\sin^2\varphi}{b^2+c^2\sin^2\varphi}$$

$$=\frac{b^2e^2-b^2e^2\sin^2\varphi+a^2e^2\sin^2\varphi}{b^2+c^2\sin^2\varphi}=\frac{b^2e^2+c^2e^2\sin^2\varphi}{b^2+c^2\sin^2\varphi}=e^2\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=e$$

86.由 4 即证。 87.同 4。

88.由 71：$y_C=\frac{b}{\sin\varphi}\left(1+\cos\varphi\right),y_D=\frac{b}{\sin\varphi}\left(1-\cos\varphi\right)$，$F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right)$

$\therefore\overrightarrow{CF_1}\cdot\overrightarrow{F_1D}=\left(a+c\right)\left(a-c\right)-\frac{b^2\left(1-\cos^2\varphi\right)}{\sin^2\varphi}=0$ 同理：

$\therefore\overrightarrow{CF_2}\cdot\overrightarrow{F_2D}=\left(a+c\right)\left(a-c\right)-\frac{b^2\left(1-\cos^2\varphi\right)}{\sin^2\varphi}=0$

$\therefore CF_1\perp F_1D,CF_2\perp F_2D$，即两焦点在以两交点为直径的圆上。

89. 设 P$\left(a\cos\varphi,b\sin\varphi\right)$，则 $l_1:y-b\sin\varphi=\frac{b}{a}\left(x-a\cos\varphi\right)\Rightarrow y=\frac{b}{a}x+b\left(\sin\varphi-\cos\varphi\right)$

同理 $l_2:y=-\frac{b}{a}x+b\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)$

$$\therefore |OM|^2=\left[\frac{b(\cos\varphi-\sin\varphi)}{\frac{b}{a}}\right]^2=a^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^2=a^2(1-\sin 2\varphi)$$

同理

$|ON|^2=a^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2=a^2(1+\sin 2\varphi)$ $\therefore |OM|^2+|ON|^2=a^2(1+\sin 2\varphi)+a^2(1-\sin 2\varphi)=2a^2$

同理$|OQ|^2+|OR|^2=b^2(1+\sin 2\varphi)+b^2(1-\sin 2\varphi)=2b^2$

90.设 $P(x_0,y_0)$，则$l_1:y=\frac{b}{a}x+y_0-\frac{b}{a}x_0,l_2:y=-\frac{b}{a}x+y_0+\frac{b}{a}x_0$

$$\therefore |OM|^2=\left(\frac{\frac{b}{a}x_0-y_0}{\frac{b}{a}}\right)^2=\left(\frac{bx_0-ay_0}{b}\right)^2,|ON|^2=\left(\frac{\frac{b}{a}x_0+y_0}{\frac{b}{a}}\right)^2=\left(\frac{bx_0+ay_0}{b}\right)^2$$

$$\therefore |OM|^2+|ON|^2=\left(\frac{bx_0-ay_0}{b}\right)^2+\left(\frac{bx_0+ay_0}{b}\right)^2=\frac{2(b^2x_0^2+a^2y_0^2)}{b^2}=2a^2$$

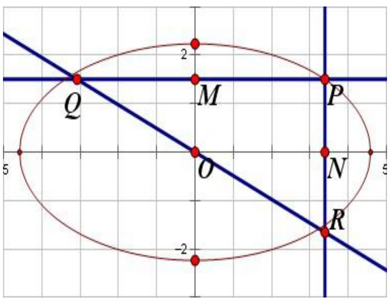
同理：

$$|OQ|^2=\left(\frac{b}{a}x_0-y_0\right)^2,|OR|^2=\left(\frac{b}{a}x_0+y_0\right)^2$$

$$\therefore |OQ|^2+|OR|^2=\left(\frac{b}{a}x_0-y_0\right)^2+\left(\frac{b}{a}x_0+y_0\right)^2=2\left(\frac{b^2}{a^2}x_0^2+y_0^2\right)=2b^2$$

均推出 P 点的轨迹方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

91.$\because P(x,y),PMQ//x$轴$,PNR//y$轴$\therefore M(0,y),N(x,0),Q\left(-\frac{a}{b}y,y\right),R\left(x,-\frac{b}{a}x\right)$



$\therefore S_1=\frac{1}{2}y\cdot\frac{a}{b}y=\frac{1}{2}\cdot\frac{ay^2}{b},S_2=\frac{1}{2}x\cdot\frac{b}{a}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{bx^2}{a}$ $\therefore S_1+S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{ay^2}{b}+\frac{bx^2}{a}\right)=\frac{ab}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{ab}{2}$

92. 设 $P(x_0,y_0)$，则$x_Q=-\frac{a}{b}y_0,y_R=-\frac{b}{a}x_0$ $\therefore S_1+S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{ay_0^2}{b}+\frac{bx_0^2}{a}\right)=\frac{ab}{2}$ 由此得 P 点的轨迹方程为

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。