双曲线

1.$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a$　　2.标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　　3.$\frac{|PF_1|}{d_1}=e>1$

4．点 P 处的切线 PT 平分△PF_1F_2 在点 P 处的内角.
5．PT 平分△PF_1F_2 在点 P 处的内角，则焦点在直线 PT 上的射影 H 点的轨迹是以实轴为直径的圆，除去实轴的两个端点.
6．以焦点弦 PQ 为直径的圆必与对应准线相交.
7．以焦点半径 PF_1 为直径的圆必与以实轴为直径的圆外切.
8．设 P 为双曲线上一点，则△PF_1F_2 的内切圆必切于与 P 在同侧的顶点.

9．双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）的两个顶点为$A_1(-a,0),A_2(a,0)$，与 y 轴平行的直线交双曲线于 P_1、P_2 时 A_1P_1 与 A_2P_2 交点的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

10．若$P_0(x_0,y_0)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）上，则过$P_0$的双曲线的切线方程是$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

11．若$P_0(x_0,y_0)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）外，则过 Po 作双曲线的两条切线切点为 P_1、P_2，则切点弦 P_1P_2 的直线方程是$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

12．AB 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）的不平行于对称轴且过原点的弦，M 为 AB 的中点，则$k_{OM}\cdot k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}$.

13．若$P_0(x_0,y_0)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）内，则被 Po 所平分的中点弦的方程是$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}$.

14．若$P_0(x_0,y_0)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）内，则过 Po 的弦中点的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}$.

15．若 PQ 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（b>a >0）上对中心张直角的弦，则$\frac{1}{r_1^{\ 2}}+\frac{1}{r_2^{\ 2}}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}(r_1=|OP|,r_2=|OQ|)$.

16.若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(b>a >0)上中心张直角的弦 L 所在直线方程为$Ax+By=1\ (AB\neq 0)$,则(1) $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=A^2+B^2$;(2) $L=\frac{2\sqrt{a^4A^2+b^4B^2}}{|a^2A^2-b^2B^2|}$.

17．给定双曲线C_1：$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$（a>b>0），C_2：$b^2x^2-a^2y^2=(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}ab)^2$,则(i)对$C_1$上任意给定的点$P(x_0,y_0)$，它的任一直角弦必须经过$C_2$上一定点 M$(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0,-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}y_0)$.
(ii)对C_2上任一点$P'(x_0',y_0')$在C_1上存在唯一的点M',使得M'的任一直角弦都经过P'点.

18．设$P(x_0,y_0)$为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）上一点，$P_1P_2$ 为曲线 C 的动弦,且弦 PP_1, PP_2 斜率存在，记为 k_1, k_2, 则直线 P_1P_2 通过定点$M(mx_0,-my_0)\ (m\neq 1)$的充要条件是$k_1\cdot k_2=\frac{1+m}{1-m}\cdot\frac{b^2}{a^2}$.

19．过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>o）上任一点$A(x_0,y_0)$任意作两条倾斜角互补的直线交双曲线于 B,C 两点，则直线 BC 有

定向且$k_{BC}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$（常数）.

20．双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞o）的左右焦点分别为 F_1，F $_2$，点 P 为双曲线上任意一点$\angle F_1PF_2=\gamma$，则双曲线的焦点角形的面积为$S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\cot\frac{\gamma}{2}$，$P(\pm\frac{a}{c}\sqrt{c^2+b^2\cot^2\frac{\gamma}{2}},\pm\frac{b^2}{c}\cot\frac{\gamma}{2})$.

21．若 P 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）右（或左）支上除顶点外的任一点,F_1, F $_2$是焦点，$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，则$\frac{c-a}{c+a}=\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}$（或$\frac{c-a}{c+a}=\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$）.

22．双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞o）的焦半径公式：$F_1(-c,0)$ ，$F_2(c,0)$

当$M(x_0,y_0)$在右支上时，$|MF_1|=ex_0+a$,$|MF_2|=ex_0-a$.

当$M(x_0,y_0)$在左支上时，$|MF_1|=-ex_0-a$,$|MF_2|=-ex_0+a$.

23．若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的左、右焦点分别为 F_1、F_2，左准线为 L，则当 1＜e≤$\sqrt{2}+1$时，可在双曲线上求一点 P，使得 PF_1 是 P 到对应准线距离 d_1 与 PF_2 的比例中项.

24．P 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）上任一点,$F_1$,$F_2$ 为二焦点，A 为双曲线左支内一定点，则$|AF_2|-2a\le|PA|+|PF_1|$，当且仅当A,F_2,P三点共线且P在左支时，等号成立.

25．双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）上存在两点关于直线$l$：$y=k(x-x_0)$对称的充要条件是$x_0{}^2>\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2-b^2k^2}\left(k\ne0\text{且}k\ne\pm\frac{a}{b}\right)$.

26．过双曲线焦半径的端点作双曲线的切线，与以长轴为直径的圆相交，则相应交点与相应焦点的连线必与切线垂直.

27．过双曲线焦半径的端点作双曲线的切线交相应准线于一点，则该点与焦点的连线必与焦半径互相垂直.

28．P 是双曲线$\begin{cases}x=a\sec\varphi\\y=b\tan\varphi\end{cases}$（a＞0，b＞0）上一点，则点 P 对双曲线两焦点张直角的充要条件是$e^2=\frac{1}{1-\tan^2\varphi}$.

29. 设 A,B 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k$（a＞0,b＞0，$k>0,k\ne1$）上两点，其直线 AB 与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$相交于$P,Q$,则$AP=BQ$.

30．在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，定长为 2m（$m>0$）的弦中点轨迹方程为

$$m^2=\begin{cases}\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(a^2\cosh^2t+b^2\sinh^2t\right),\coth t=-\frac{ay}{bx},x=0\text{时}t=0,\text{弦两端点在两支上}\\\left[\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-1\right]\left(a^2\sinh^2t+b^2\cosh^2t\right),\coth t=-\frac{bx}{ay},y=0\text{时}t=0,\text{弦两端点在同支上}\end{cases}$$

31．设 S 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的通径，定长线段 L 的两端点 A,B 在双曲线右支上移动，记|AB|=l，$M(x_0,y_0)$是 AB 中点，则当$l\ge\Phi S$时，有$(x_0)_{\min}=\frac{a^2}{c}+\frac{l}{2e}$ $(c^2=a^2+b^2,e=\frac{c}{a})$;当$l<\Phi S$时，有$(x_0)_{\min}=\frac{a}{2b}\sqrt{4b^2+l^2}$.

32．双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）与直线$Ax+By+C=0$有公共点的充要条件是$A^2a^2-B^2b^2\le C^2$.

33．双曲线$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）与直线$Ax+By+C=0$有公共点的充要条件是$A^2a^2-B^2b^2\le(Ax_0+By_0+C)^2$.

34.设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的两个焦点为$F_1$、$F_2$,P(异于长轴端点)为双曲线上任意一点,在△$PF_1F_2$中,记$\angle F_1PF_2=\alpha$,$\angle PF_1F_2=\beta$,$\angle F_1F_2P=\gamma$，则有$\frac{\sin\alpha}{\pm(\sin\gamma-\sin\beta)}=\frac{c}{a}=e$.

35．经过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的实轴的两端点 A_1 和 A_2 的切线，与双曲线上任一点的切线相交于 P_1 和 P_2，则$|P_1A_1|\cdot|P_2A_2|=b^2$.

36.已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（b＞a＞0),O为坐标原点,P、Q为双曲线上两动点,且$OP\perp OQ$.（1）$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$;（2）$|OP|^2+|OQ|^2$的最小值为$\frac{4a^2b^2}{b^2-a^2}$;（3）$S_{\Delta OPQ}$的最小值是$\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$.

37．MN是经过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）过焦点的任一弦(交于两支)，若AB是经过双曲线中心O且平行于MN的弦，则$|AB|^2=2a|MN|$.

38．MN 是经过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）焦点的任一弦(交于同支)，若过双曲线中心 O 的半弦$OP\perp MN$，则$\frac{2}{a|MN|}-\frac{1}{|OP|^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$.

39．设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）,M(m,o)为实轴所在直线上除中心，顶点外的任一点，过 M 引一条直线与双曲线相交于P、Q两点，则直线A_1P、A_2Q(A_1,A_2为两顶点)的交点N在直线l：$x=\frac{a^2}{m}$上.

40．设过双曲线焦点F作直线与双曲线相交 P、Q两点，A为双曲线长轴上一个顶点，连结AP 和AQ分别交相应于焦点F的双曲线准线于M、N两点，则MF⊥NF.

41．过双曲线一个焦点F的直线与双曲线交于两点P、Q, A_1、A_2为双曲线实轴上的顶点，A_1P和A_2Q交于点M，A_2P和A_1Q交于点N，则MF⊥NF.

42．设双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,则斜率为k(k≠0)的平行弦的中点必在直线$l$：$y=kx$的共轭直线$y=k'x$上,而且$kk'=\frac{b^2}{a^2}$.

43．设A、B、C、D为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞o）上四点,AB、CD所在直线的倾斜角分别为α,β，直线AB与CD相交于P,且P不在双曲线上,则$\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\frac{b^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\beta}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}$.

44．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）,点P为其上一点$F_1$, F_2为双曲线的焦点，$\angle F_1PF_2$的内（外）角平分线为l，作F_1、F_2分别垂直l于R、S，当P跑遍整个双曲线时，R、S形成的轨迹方程是$x^2+y^2=a^2$($c^2y^2=\frac{\left[a^2y^2-b^2x\left(x\pm c\right)\right]^2}{a^2y^2-b^2\left(x\pm c\right)^2}$).

45．设△ABC 三顶点分别在双曲线Γ上，且 AB 为Γ的直径，l为 AB 的共轭直径所在的直线，l分别交直线 AC、BC 于 E 和 F，又 D 为l上一点，则 CD 与双曲线Γ相切的充要条件是 D 为 EF 的中点.

46．过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的右焦点 F 作直线交该双曲线的右支于 M,N 两点，弦 MN 的垂直平分线交 x 轴于 P，则$\frac{|PF|}{|MN|}=\frac{e}{2}$.

47．设 A（x_1 ,y_1）是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）上任一点，过 A 作一条斜率为$\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$的直线 L，又设 d 是原点到直线 L 的距离，$r_1,r_2$分别是 A 到双曲线两焦点的距离，则$\sqrt{r_1r_2}d=ab$.

48．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）和$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$（$0<\lambda<1$），一条直线顺次与它们相交于 A、B、C、D 四点，则$|AB|=|CD|$.

49．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）,A、B 是双曲线上的两点，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点$P(x_0,0)$，则$x_0\geq\frac{a^2+b^2}{a}$或$x_0\leq-\frac{a^2+b^2}{a}$.

50．设 P 点是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）上异于实轴端点的任一点,$F_1$、$F_2$为其焦点记$\angle F_1PF_2=\theta$，则(1)$|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$.(2) $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\cot\frac{\theta}{2}$.

51．设过双曲线的实轴上一点 B（m,o）作直线与双曲线相交于 P、Q 两点，A 为双曲线实轴的左顶点，连结 AP 和 AQ 分别交相应于过 B 点的直线 MN：$x=n$于 M，N 两点,则$\angle MBN=90^\circ\Leftrightarrow\frac{a-m}{a+m}=-\frac{a^2\left(n-m\right)^2}{b^2(n+a)^2}$.

52．L 是经过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）焦点 F 且与实轴垂直的直线，A、B 是双曲线的两个顶点，e 是离心率,点$P\in L$，若$\angle APB=\alpha$，则α是锐角且$\sin\alpha\leq\frac{1}{e}$或$\alpha\leq arc\sin\frac{1}{e}$（当且仅当$|PF|=b$时取等号）.

53．L 是经过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的实轴顶点 A 且与 x 轴垂直的直线，E、F 是双曲线的准线与 x 轴交点,点$P\in L$，e 是离心率，$\angle EPF=\alpha$，H 是 L 与 X 轴的交点 c 是半焦距，则α是锐角且$\sin\alpha\leq\frac{1}{e}$或$\alpha\leq arc\sin\frac{1}{e}$（当且仅当$|PA|=\frac{ab}{c}$时取等号）.

54．L 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）焦点$F_1$且与 x 轴垂直的直线，E、F 是双曲线准线与 x 轴交点，H 是 L 与 x 轴的交点，点$P\in L$，$\angle EPF=\alpha$,离心率为 e，半焦距为 c，则α为锐角且$\sin\alpha\leq\frac{1}{e^2}$或$\alpha\leq arc\sin\frac{1}{e^2}$（当且仅当$|PF_1|=\frac{b}{c}\sqrt{a^2+c^2}$时取等号）.

55．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0），直线 L 通过其右焦点$F_2$,且与双曲线右支交于 A、B 两点，将 A、B 与双曲线左焦点F_1连结起来，则$|F_1A|\cdot|F_1B|\geq\frac{(2a^2+b^2)^2}{a^2}$（当且仅当 AB⊥x 轴时取等号）.

56．设 A、B 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的长轴两端点，P 是双曲线上的一点，$\angle PAB=\alpha$，$\angle PBA=\beta,\angle BPA=\gamma$，c、e 分别是双曲线的半焦距离心率，则有(1)$|PA|=\frac{2ab^2|\cos\alpha|}{|a^2-c^2cos^2\alpha|}$.(2) $\tan\alpha\tan\beta=1-e^2$.(3) $S_{\Delta PAB}=\frac{2a^2b^2}{b^2+a^2}\cot\gamma$.

57．设 A、B 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）实轴上分别位于双曲线一支内（含焦点的区域）、外部的两点，且x_A、x_B的横坐标$x_A\cdot x_B=a^2$，（1）若过 A 点引直线与双曲线这一支相交于 P、Q 两点，则$\angle PBA=\angle QBA$；（2）若过 B 引直线与双曲线这一支相交于 P、Q 两点，则$\angle PBA+\angle QBA=180^\circ$.

58．设 A、B 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）实轴上分别位于双曲线一支内（含焦点的区域），外部的两点，（1）若过 A 点引直线与双曲线这一支相交于 P、Q 两点，（若 B P 交双曲线这一支于两点，则 P、Q 不关于 x 轴对称），且$\angle PBA=\angle QBA$，则点 A、B 的横坐标x_A、x_B满足$x_A\cdot x_B=a^2$；（2）若过 B 点引直线与双曲线这一支相交于 P、Q 两点，且$\angle PBA+\angle QBA=180^\circ$，则点 A、B 的横坐标满足$x_A\cdot x_B=a^2$.

59．设A,A'是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的实轴的两个端点，$QQ'$是与$AA'$垂直的弦，则直线$AQ$与$A'Q'$的交点 P 的轨迹是双曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

60．过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的右焦点$F$作互相垂直的两条弦 AB、CD,则$|AB|+|CD|\geq\frac{8ab^2}{|a^2-b^2|}\left(a\neq b\right)$；$|AB|+|CD|\geq\frac{2c^2}{a}=4a\left(a=b\right)$

61．到双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）两焦点的距离之比等于$\frac{c-a}{b}$（c 为半焦距）的动点 M 的轨迹是姊妹圆$(x\pm ec)^2+y^2=(eb)^2$.

62．到双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的实轴两端点的距离之比等于$\frac{c-a}{b}$（c 为半焦距）的动点 M 的轨迹是姊妹圆$(x\pm c)^2+y^2=b^2$.

63．到双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的两准线和 x 轴的交点的距离之比为$\frac{c-a}{b}$（c 为半焦距）的动点的轨迹是姊妹圆$(x\pm a)^2+y^2=(\frac{b}{e})^2$（e 为离心率）.

64．已知 P 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）上一个动点，$A',A$是它实轴的两个端点,且$AQ\perp AP$,$A'Q\perp A'P$，则 Q 点的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2y^2}{a^4}=1$.

65．双曲线的一条直径(过中心的弦)的长，为通过一个焦点且与此直径平行的弦长和实轴之长的比例中项.

66．设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）实轴的端点为$A,A'$,$P(x_1,y_1)$是双曲线上的点过 P 作斜率为$\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$的直线$l$，过$A,A'$分别作垂直于实轴的直线交$l$于$M,M'$,则（1）$|AM||A'M'|=b^2$.（2）四边形$AMA'M'$面积趋近于$2ab$.

67．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的右准线$l$与 x 轴相交于点$E$，过双曲线右焦点$F$的直线与双曲线相交于 A、B 两

点,点C在右准线l上，且$BC\perp x$轴，则直线 AC 经过线段 EF 的中点.

68．OA、OB 是双曲线$\frac{(x-a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0,且$a\neq b$）的两条互相垂直的弦，O 为坐标原点，则（1）直线 AB 必经过一个定点$(\frac{2ab^2}{b^2-a^2},0)$.(2) 以 O A、O B 为直径的两圆的另一个交点 Q 的轨迹方程是$(x-\frac{ab^2}{b^2-a^2})^2+y^2=(\frac{ab^2}{b^2-a^2})^2$（除原点）。

69．$P(m,n)$是双曲线$\frac{(x-a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）上一个定点，P A、P B 是互相垂直的弦，则（1）直线 AB 必经过一个定点$(\frac{2ab^2-m(b^2+a^2)}{b^2-a^2},\frac{n(a^2+b^2)}{b^2-a^2})$.（2）以 P A、P B 为直径的两圆的另一个交点 Q 的轨迹方程是

$(x-\frac{ab^2-a^2m}{b^2-a^2})^2+(y-\frac{b^2n}{b^2-a^2})^2=\frac{a^2[b^4+n^2(a^2+b^2)]}{(b^2-a^2)^2}$(除 P 点).

70．如果一个双曲线虚半轴长为 b，焦点 F_1、F_2 到直线L的距离分别为 d_1、d_2，那么（1）$d_1d_2=b^2$，且 F_1、F_2 在L异侧$\Leftrightarrow$直线 L 和双曲线相切,或L是双曲线的渐近线.（2）$d_1d_2>b^2$，且 F_1、F_2 在 L 异侧$\Leftrightarrow$直线L和双曲线相离，（3）$d_1d_2<b^2$，或 F_1、F_2 在 L 同侧$\Leftrightarrow$直线 L 和双曲线相交.

71．AB 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的实轴，$N$是双曲线上的动点，过$N$的切线与过 A、B 的切线交于$C$、$D$两点，则梯形 ABDC 的对角线的交点 M 的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}-\frac{4y^2}{b^2}=1(y\neq 0)$.

72．设点$P(x_0,y_0)$为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的内部(（含焦点的区域）)一定点，AB 是双曲线过定点$P(x_0,y_0)$的任一弦.

(1)如$a\geq b$,则当弦 AB 垂直于双曲线实轴所在直线时$(|PA|\cdot|PB|)_{\min}=\frac{(b^2x_0{}^2-a^2y_0{}^2)-a^2b^2}{a^2}$.

(2)如$a<b$,则当弦 AB 平行（或重合）于双曲线实轴所在直线时，$(|PA|\cdot|PB|)_{\min}=\frac{(b^2x_0{}^2-a^2y_0{}^2)-a^2b^2}{b^2}$.

73．双曲线焦三角形中,以焦半径为直径的圆必与以双曲线实轴为直径的圆相外切.

74．双曲线焦三角形的内切圆必切长轴于非焦顶点同侧的实轴端点.

75．双曲线两焦点到双曲线焦三角形内切圆的切线长为定值 a+c 与 c-a.

76．双曲线焦三角形的非焦顶点到其旁切圆的切线长为定值 c-a.

77．双曲线焦三角形中,外点到一焦点的距离与以该焦点为端点的焦半径之比为常数 e(离心率). 注:在双曲线焦三角形中,非焦顶点的内、外角平分线与长轴交点分别称为内、外点.

78．双曲线焦三角形中,其焦点所对的旁心将外点与非焦顶点连线段分成定比 e.

79．双曲线焦三角形中,半焦距必为内、外点到双曲线中心的比例中项.

80．双曲线焦三角形中,双曲线中心到内点的距离、内点到同侧焦点的距离、半焦距及外点到同侧焦点的距离成比例.

81．双曲线焦三角形中,半焦距、外点与双曲线中心连线段、内点与同侧焦点连线段、外点与同侧焦点连线段成比例.

82．双曲线焦三角形中,过任一焦点向非焦顶点的内角平分线引垂线,则双曲线中心与垂足连线必与另一焦半径所在直线平行.

83．双曲线焦三角形中,过任一焦点向非焦顶点内角平分线引垂线,则双曲线中心与垂足的距离为双曲线实半轴的长.

84．双曲线焦三角形中,过任一焦点向非焦顶点的内角平分线引垂线,垂足就是垂足同侧焦半径为直径的圆和双曲线实轴为直径的圆的切点.

85．双曲线焦三角形中,非焦顶点的内角平分线与焦半径、实轴所在直线的夹角的余弦的比为定值 e.

86．双曲线焦三角形中,非焦顶点的法线即为该顶角的外角平分线.

87．双曲线焦三角形中,非焦顶点的切线即为该顶角的内角平分线.

88．双曲线焦三角形中,过非焦顶点的切线与双曲线实轴两端点处的切线相交,则以两交点为直径的圆必过两焦点.

89.已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上有一点$P$，过$P$分别引其渐近线的平行线，分别交$x$轴于$M,N$，交$y$轴于$R,Q$，

O为原点，则：（1）$|OM|\cdot|ON|=a^2$；（2）$|OQ|\cdot|OR|=b^2$.

90. 过平面上的 P 点作直线 $l_1:y=\frac{b}{a}x$ 及 $l_2:y=-\frac{b}{a}x$ 的平行线，分别交 x 轴于 M,N，交 y 轴于 R,Q.（1）若 $|OM|\cdot|ON|=a^2$，则 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.(2) 若 $|OQ|\cdot|OR|=b^2$，则 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

91. 点 P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 在第一象限的弧上任意一点，过 P 引 x 轴、y 轴的平行线，交 y 轴、x 轴于 M,N，交直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 于 Q,R，记 ΔOMQ 与 ΔONR 的面积为 S_1,S_2，则：$|S_1-S_2|=\frac{ab}{2}$.

92. 点 P 为第一象限内一点，过 P 引 x 轴、y 轴的平行线，交 y 轴、x 轴于 M,N，交直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 于 Q,R，记 ΔOMQ 与 ΔONR 的面积为 S_1,S_2，已知 $|S_1-S_2|=\frac{ab}{2}$，则 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 或 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$

双曲线性质 92 条证明

1.双曲线第一定义。 2.由定义即可得双曲线标准方程。 3.双曲线第二定义。

4.设 $P(x_0,y_0)$ 在第一象限，切线 PT（即 l）的斜率为 k，PF_1 所在直线 l_1 斜率为 k_1，PF_2 所在直线 l_2 斜率为 k_2，PF_1 与 PT 的夹角为α，PF_2 与 PT 的夹角为β。由两直线夹角公式 $\tan\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$ 得：

$$\tan\alpha=\left|\frac{k-k_1}{1+kk_1}\right|=\left|\frac{\frac{y_0}{x_0+c}-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1+\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\frac{y_0}{x_0+c}}\right|=\left|\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2+b^2x_0c}{a^2x_0y_0+a^2cy_0+b^2x_0y_0}\right|=\left|\frac{a^2b^2+b^2cx_0}{c^2x_0y_0+a^2cy_0}\right|=\left|\frac{b^2\left(a^2+cx_0\right)}{cy_0\left(a^2+cx_0\right)}\right|=\frac{b^2}{c|y_0|}$$

$$\tan\beta=\left|\frac{k-k_2}{1+kk_2}\right|=\left|\frac{\frac{b^2x_0}{a^2y_0}-\frac{y_0}{x_0-c}}{1+\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\frac{y_0}{x_0-c}}\right|=\left|\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-b^2x_0c}{a^2x_0y_0-a^2cy_0+b^2x_0y_0}\right|=\left|\frac{a^2b^2-b^2cx_0}{c^2x_0y_0-a^2cy_0}\right|=\left|\frac{b^2\left(a^2-cx_0\right)}{cy_0\left(a^2-cx_0\right)}\right|=\frac{b^2}{c|y_0|}$$

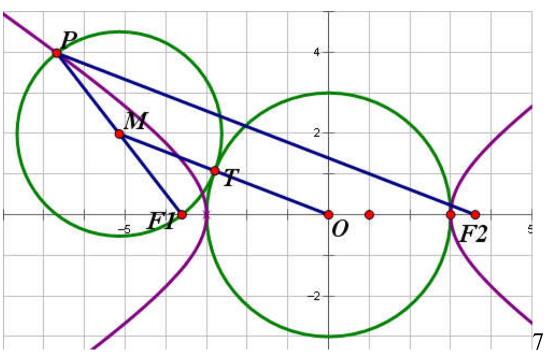
$\because \alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\therefore \alpha=\beta$ 同理可证其它情况。故切线 PT 平分点 P 处的内角。

5.不妨设 P 在第一象限。作 F_2 关于切线 PT 的对称点 M，由 4 可知 M 在 PF_1 上，则 $F_1M=PF_1-PF_2=2a$，垂足 H 为 F_2M 的中点，则 OH=$\frac{F_1M}{2}=a$，同理可证其它情况。射影 H 的轨迹是以实轴为直径的圆除去两端点。

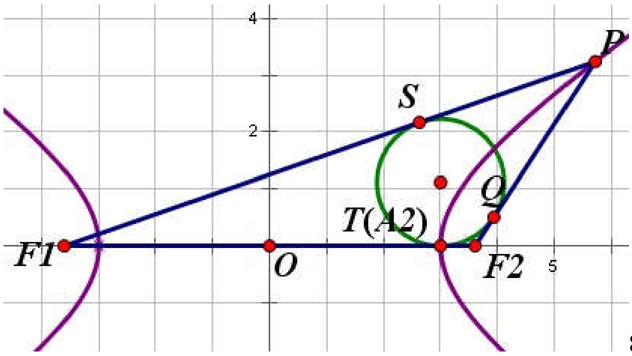
6. 设 P，Q 两点到与焦点对应的准线的距离分别为 d_1,d_2，以 PQ 中点到准线的距离为 d，以 PQ 为直径的圆的半径为 r，则

$d=\dfrac{d_1+d_2}{2}=\dfrac{PF+FQ}{2e}=\dfrac{r}{e}<r$，故以 PQ 为直径的圆与对应准线相交。

7. 如图，两圆圆心距为 $d=\left|OM\right|=\dfrac{\left|PF_2\right|}{2}=\dfrac{2a+\left|PF_1\right|}{2}=a+\dfrac{\left|PF_1\right|}{2}=a+r$，故两圆外切。



7 图



8 图

8. 如图，由切线长定理：$\left|F_1S\right|+\left|F_1T\right|=\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|+\left|F_1F_2\right|=2a+2c$，$\left|F_1S\right|=\left|F_1T\right|=a+c$

而 $\left|F_1T\right|=a+c=\left|F_1A_2\right|$，$T$ 与 A_2 重合，故内切圆与 x 轴切于右顶点，同理可证 P 在其他位置情况。

9. 设 $P_1\left(a\sec\varphi,b\tan\varphi\right),P_2\left(a\sec\varphi,-b\tan\varphi\right)$，则 $A_1P_1:y=\dfrac{b\tan\varphi}{a\left(\sec\varphi+1\right)}\left(x+a\right),A_2P_2:y=\dfrac{b\tan\varphi}{a\left(1-\sec\varphi\right)}\left(x-a\right)$

则 $x_P=a\cos\varphi,y=b\sin\varphi$　　∴P 点的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

10. ∵ $P_0(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上 $\therefore\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，对 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 求导得：$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2yy'}{b^2}=0\therefore y'=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

$\therefore$ 切线方程为 $y-y_0=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(x-x_0\right)$ 即 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$

11.设 $P_1\left(x_1,y_1\right),P_2\left(x_2,y_2\right)$，由 10 得：$\dfrac{x_0x_1}{a^2}-\dfrac{y_0y_1}{b^2}=1,\dfrac{x_0x_2}{a^2}-\dfrac{y_0y_2}{b^2}=1$，因为点 P_1,P_2 在直线 P_1P_2 上，且同时满足方程 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，所以 $P_1P_2:\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

12.设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),M\left(x_0,y_0\right)$ 则有 $\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$ 作差得：$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$

$$\Rightarrow\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)}{a^2}-\frac{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1+y_2\right)}{b^2}=0\Rightarrow k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2\left(x_1+x_2\right)}{a^2\left(y_1+y_2\right)}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=\frac{b^2}{a^2k_{OM}}\Rightarrow k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$$

13.由 12 可得：$y-y_0=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(x-x_0\right)\Rightarrow a^2y_0y-a^2y_0^2-b^2x_0x+b^2x_0^2=0$

$$\Rightarrow b^2x_0x-a^2y_0y=b^2x_0^2-a^2y_0^2\Rightarrow\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$$

14. .由 12 可得：$\dfrac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\dfrac{y}{x}=\dfrac{b^2}{a^2}\Rightarrow a^2y^2-a^2y_0y-b^2x^2+b^2x_0x=0$

$$\Rightarrow b^2x^2-a^2y^2=b^2x_0x-a^2y_0y\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}$$

15. 设 $P(a\sec\alpha,b\tan\alpha),Q(a\sec\beta,b\tan\beta)$，则 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=\dfrac{b\tan\alpha}{a\sec\alpha}\cdot\dfrac{b\tan\beta}{a\sec\beta}=-1\therefore\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{a^2}{b^2}$

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2\sec^2\alpha+b^2\tan^2\alpha}+\frac{1}{a^2\sec^2\beta+b^2\tan^2\beta}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2+b^2\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta}{a^2+b^2\sin^2\beta}$$

$$=\frac{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\beta\cos^2\alpha+a^2\cos^2\beta+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta}{a^4+b^4\sin^2\alpha\sin^2\beta+a^2b^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)}$$

$$=\frac{a^2-a^2\sin^2\alpha+b^2\sin^2\beta\left(1-\sin^2\alpha\right)+a^2-a^2\sin^2\beta+b^2\sin^2\alpha\left(1-\sin^2\beta\right)}{2a^4+a^2b^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)}$$

$$=\frac{2a^2+\left(b^2-a^2\right)\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)-2b^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{2a^4+a^2b^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)}=\frac{2a^2\left(b^2-a^2\right)+b^2\left(b^2-a^2\right)\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)}{2a^4b^2+a^2b^4\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)}$$

$$=\frac{\left(b^2-a^2\right)\left[2a^2+b^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)\right]}{a^2b^2\left[2a^2+b^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)\right]}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$$

16. 将直线 AB 代入双曲线方程中得：$\left(B^2b^2-A^2a^2\right)x^2+2Aa^2x-a^2\left(1+B^2b^2\right)=0$

$\Delta=4a^2B^2b^2\left(B^2b^2-A^2a^2+1\right)$，$|AB|=\dfrac{2ab\sqrt{A^2+B^2}}{\left|B^2b^2-A^2a^2\right|}\sqrt{B^2b^2-A^2a^2+1}$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 则 $x_1+x_2=-\dfrac{2Aa^2}{B^2b^2-A^2a^2}$， $x_1x_2=-\dfrac{a^2\left(1+B^2b^2\right)}{B^2b^2-A^2a^2}$ $\because OA\perp OB$

$$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow b^2-a^2=a^2b^2\left(A^2+B^2\right)\Rightarrow A^2+B^2=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$$

$$|AB|=\frac{2ab\sqrt{A^2+B^2}}{\left|B^2b^2-A^2a^2\right|}\sqrt{B^2b^2-A^2a^2+1}=\frac{2\sqrt{\left(b^2-a^2\right)\left(B^2b^2-A^2a^2+1\right)}}{\left|B^2b^2-A^2a^2\right|}$$

$$=\frac{2\sqrt{A^2a^4+B^2b^4-a^2b^2\left(A^2+B^2\right)+b^2-a^2}}{\left|A^2a^2-B^2b^2\right|}=\frac{2\sqrt{A^2a^4+B^2b^4}}{\left|A^2a^2-B^2b^2\right|}$$

17.(Ⅰ) 设双曲线内直角弦 AB 的方程为：$y-q=k(x-p)$ 即 $y=kx+q-kp$。

当斜率 k 存在时，代入双曲线 C_1 方程中得：$\left(b^2-a^2k^2\right)x^2-2a^2k\left(q-kp\right)x-a^2\left[\left(q-kp\right)^2+b^2\right]=0$

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 得 $x_1+x_2=\dfrac{2a^2k\left(q-kp\right)}{b^2-a^2k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{a^2\left[\left(q-kp\right)^2+b^2\right]}{b^2-a^2k^2}$

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)+\left(y_0-y_1\right)\left(y_0-y_2\right)$

$=\left(k^2+1\right)x_1x_2+\left(kq-k^2p-ky_0-x_0\right)\left(x_1+x_2\right)+x_0^2+\left(q-kp-y_0\right)^2=0$

$\Rightarrow 2a^2k\left(q-kp\right)\left(kq-k^2p-ky_0-x_0\right)-a^2\left(k^2+1\right)\left[\left(q-kp\right)^2+b^2\right]+\left(b^2-a^2k^2\right)x_0^2+\left(b^2-a^2k^2\right)\left(q-kp-y_0\right)^2=0$

$\Rightarrow 2a^2k^2\left(q-kp\right)^2-2a^2k^2y_0\left(q-kp\right)-2a^2kx_0\left(q-kp\right)-a^2k^2\left(q-kp\right)^2-a^2\left(q-kp\right)^2-a^2b^2k^2$

$-a^2b^2+b^2x_0^2-a^2k^2x_0^2+b^2\left(q-kp-y_0\right)^2-a^2k^2y_0^2-a^2k^2\left(q-kp\right)^2+2a^2k^2y_0\left(q-kp\right)=0$

$\Rightarrow -2a^2kx_0\left(q-kp\right)-a^2\left(q-kp\right)^2-b^2k^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2k^2x_0^2+b^2y_0^2+b^2\left(q-kp\right)^2-2b^2y_0\left(q-kp\right)=0$

$\Rightarrow 2a^2k^2px_0+b^2k^2p^2-a^2k^2p^2-b^2k^2x_0^2-a^2k^2x_0^2+2a^2kpq-2a^2kqx_0+2b^2kpy_0-2b^2kpq-a^2q^2+a^2y_0^2$

$+b^2y_0^2+b^2q^2-2b^2qy_0=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2\left(p-x_0\right)^2=b^2\left(p^2-x_0^2\right)\\ a^2pq-b^2pq=a^2qx_0-b^2py_0\\ b^2\left(q-y_0\right)^2=a^2\left(q^2-y_0^2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0\\ q=\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}y_0\end{cases}$$

即直线 AB 过定点 $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0,\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}y_0\right)$，此点在 C_2 上。当直线斜率不存在时，直线 AB 也过 C_2 上的定点。

(II) 由上可知 C_1 和 C_2 上点由此建立起一种一一对应的关系，即证。

18.必要性：设 P_1P_2：$y+my_0=k\left(x-mx_0\right)$。k 存在时，代入双曲线方程中得：

$\left(b^2-a^2k^2\right)x^2+2a^2km\left(y_0+kx_0\right)x-a^2m^2\left(y_0+kx_0\right)^2-a^2b^2=0$

设 $P_1\left(x_1,y_1\right),P_2\left(x_2,y_2\right)$ 得 $x_1+x_2=-\dfrac{2a^2km\left(y_0+kx_0\right)}{b^2-a^2k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{a^2m^2\left(y_0+kx_0\right)^2+a^2b^2}{b^2-a^2k^2}$

$$k_1\cdot k_2=\frac{\left(y_0-y_1\right)\left(y_0-y_2\right)}{\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)}=\frac{k^2x_1x_2-k\left(my_0+mkx_0+y_0\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(my_0+mkx_0+y_0\right)^2}{x_1x_2-x_0\left(x_1+x_2\right)+x_0^2}$$

$$=\frac{b^2\left(1+m\right)\left[2kmx_0y_0+k^2x_0^2\left(m-1\right)+y_0^2\left(m+1\right)\right]}{a^2\left(1-m\right)\left[2kmx_0y_0+k^2x_0^2\left(m-1\right)+y_0^2\left(m+1\right)\right]}=\frac{b^2\left(1+m\right)}{a^2\left(1-m\right)}$$

k 不存在时，P_1P_2：$x=mx_0$ 则 $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{m^2x_0^2-a^2}$，

$$k_1\cdot k_2=\frac{\left(y_0-\frac{b}{a}\sqrt{m^2x_0^2-a^2}\right)\left(y_0+\frac{b}{a}\sqrt{m^2x_0^2-a^2}\right)}{x_0^2\left(1-m\right)^2}=\frac{y_0^2-\frac{b^2}{a^2}\left(m^2x_0^2-a^2\right)}{x_0^2\left(1-m\right)^2}=\frac{b^2x_0^2\left(1-m^2\right)}{a^2x_0^2\left(1-m\right)^2}=\frac{b^2\left(1+m\right)}{a^2\left(1-m\right)}$$

必要性得证。

充分性：设 P_1P_2 过定点$\left(p,q\right)$，则 P_1P_2： $y=kx+q-kp$ 。代入双曲线方程得：

$$\left(b^2-a^2k^2\right)x^2-2a^2k\left(q-kp\right)x-a^2\left(q-kp\right)^2-a^2b^2=0$$

设 $P_1\left(x_1,y_1\right),P_2\left(x_2,y_2\right)$ 得 $x_1+x_2=\frac{2a^2k\left(q-kp\right)}{b^2-a^2k^2}$， $x_1x_2=-\frac{a^2\left(q-kp\right)^2+a^2b^2}{b^2-a^2k^2}$

则 $k_1\cdot k_2=\frac{\left(y_1-y_0\right)\left(y_2-y_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)\left(x_2-x_0\right)}=\frac{k^2x_1x_2+k\left(q-kp-y_0\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(q-kp-y_0\right)^2}{x_1x_2-x_0\left(x_1+x_2\right)+x_0^2}$

$$=\frac{-a^2k^2\left(q-kp\right)^2-a^2b^2k^2+2a^2k^2\left(q-kp\right)\left(q-kp-y_0\right)+\left(q-kp-y_0\right)^2\left(b^2-a^2k^2\right)}{-a^2\left(q-kp\right)^2-a^2b^2-2a^2kx_0\left(q-kp\right)+x_0^2\left(b^2-a^2k^2\right)}$$

$$=\frac{b^2\left[\left(q-kp-y_0\right)^2-k^2x_0^2\right]}{a^2\left[y_0^2-\left(q-kp+kx_0\right)^2\right]}=\frac{b^2\left(q-kp-y_0+kx_0\right)\left(q-kp-y_0-kx_0\right)}{a^2\left(y_0+q-kp+kx_0\right)\left(y_0-q+kp-kx_0\right)}=\frac{b^2\left(kp+y_0+kx_0-q\right)}{a^2\left(q+y_0+kx_0-kp\right)}=\frac{1+m}{1-m}\cdot\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow\frac{kp+y_0+kx_0-q}{q+y_0+kx_0-kp}=\frac{1+m}{1-m}\Rightarrow k\left(p-mx_0\right)-\left(q+my_0\right)=0\Rightarrow\begin{cases}p-mx_0=0\\q+my_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=mx_0\\q=-my_0\end{cases}$$

验证 k 不存在的情况，也得到此结论。故 l 过定点$\left(mx_0,-my_0\right)\left(m\neq1\right)$，充分性得证。

19. 设 AB： $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$ 即 $y=kx+y_0-kx_0$

$$\begin{cases}y=kx+y_0-kx_0\\\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\left(b^2-a^2k^2\right)x^2-2a^2k\left(y_0-kx_0\right)x-a^2\left[\left(y_0-kx_0\right)^2+b^2\right]=0$$

$$\Rightarrow x_0+x_B=\frac{2a^2k\left(y_0-kx_0\right)}{b^2-a^2k^2}\Rightarrow x_B=\frac{2a^2ky_0-a^2k^2x_0-b^2x_0}{b^2-a^2k^2}\Rightarrow B\left(\frac{2a^2ky_0-a^2k^2x_0-b^2x_0}{b^2-a^2k^2},\frac{a^2k^2y_0+b^2y_0-2b^2kx_0}{b^2-a^2k^2}\right)$$

同理 $C\left(\frac{-2a^2ky_0-a^2k^2x_0-b^2x_0}{b^2-a^2k^2},\frac{a^2k^2y_0+b^2y_0+2b^2kx_0}{b^2-a^2k^2}\right)\therefore k_{BC}=\frac{4b^2kx_0}{-4a^2ky_0}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$

20. 由余弦定理： $\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2-2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\cos\gamma=\left(2c\right)^2\Rightarrow\left(\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|\right)^2=4c^2+2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\left(\cos\gamma-1\right)$

$$\Rightarrow4a^2=4c^2+2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\left(\cos\gamma-1\right)\Rightarrow\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|=\frac{2b^2}{1-\cos\gamma}=\frac{b^2}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$S_{\Delta F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\gamma=\frac{b^2\sin\gamma}{1-\cos\gamma}=\frac{2b^2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}=b^2\cot\frac{\gamma}{2}=c|y_P|$$

$$\Rightarrow|y_P|=\frac{b^2}{c}\cot\frac{\gamma}{2},|x_P|=\sqrt{a^2+\frac{a^2b^2}{c^2}\cot^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+b^2\cot^2\frac{\gamma}{2}}\therefore P\left(\pm\frac{a}{c}\sqrt{c^2+b^2\cot^2\frac{\gamma}{2}},\pm\frac{b^2}{c}\cot\frac{\gamma}{2}\right)$$

21.由正弦定理得 $\frac{PF_1}{\sin\beta}=\frac{PF_2}{\sin\alpha}=\frac{F_1F_2}{\sin\gamma}$　　P 在右支时，$\frac{2c}{\sin\gamma}=\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2a}{\sin\beta-\sin\alpha}$

$$\Rightarrow e=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}}$$

$$\Rightarrow e-e\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=1+\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\Rightarrow\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=\frac{e-1}{e+1}=\frac{c-a}{c+a}$$

同理当 P 在左支时，$e=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{1+\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{e-1}{e+1}=\frac{c-a}{c+a}$

22. 由第二定义得：M 在右支时，$|MF_1|=e\left(x_0+\frac{a^2}{c}\right)=ex_0+a,|MF_2|=e\left(x_0-\frac{a^2}{c}\right)=ex_0-a$

M 在左支时，$|MF_1|=e\left(-x_0-\frac{a^2}{c}\right)=-a-ex_0,|MF_2|=e\left(\frac{a^2}{c}-x_0\right)=a-ex_0$。

23. 易知 P 在左支上，$\frac{PF_1}{d}=\frac{PF_2}{PF_1}=e>1\Rightarrow PF_2=e\cdot PF_1\Rightarrow a-ex_0=-e(a+ex_0)\Rightarrow x_0=\frac{1+e}{e^2-e}\cdot-a$

$\because x_0\le-a\therefore\frac{1+e}{e^2-e}\ge1\Rightarrow e^2-2e-1\le0\Rightarrow1-\sqrt{2}\le e\le1+\sqrt{2}\because e>1\therefore e\in\left(1,1+\sqrt{2}\right]$

24.易知当 P 在左支时 $|PA|+|PF_1|$ 有最小值，此时：$|PA|+|PF_1|=|PA|+|PF_2|-2a\ge|AF_2|-2a$。当且仅当 A,F_2,P 三点共线且 P 在左支时，等号成立.。

25.易知当 k=0 时，只有 x 轴符合要求，但此时 x_0 不存在。故 $k\ne0$。当 $k\ne0$ 时，设 A，B 两点关于直线 y=kx+m 对称，直线 AB 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+p$，易知 $-\frac{1}{k}\ne\pm\frac{b}{a}$ 即 $k\ne\pm\frac{a}{b}$。

联立 AB 与双曲线方程得：$\left(b^2k^2-a^2\right)x^2+2a^2kpx-a^2k^2p^2-a^2b^2k^2=0$　得 $\Delta=4a^2b^2k^2\left(k^2p^2+b^2k^2-a^2\right)>0$

即 $k^2p^2+b^2k^2-a^2>0$ ①　　AB 中点 $M\left(-\frac{a^2kp}{b^2k^2-a^2},\frac{b^2k^2p}{b^2k^2-a^2}\right)$ 在 y=kx+m 上，得 $c^2k^2p=m\left(b^2k^2-a^2\right)$　②

②代入①得 $p\left(p+\frac{c^2}{m}\right)>0\left(m\neq 0\right)$，解②得 $p=\frac{m\left(b^2k^2-a^2\right)}{c^2k^2}$ ③　　当 m=0 时由①②得 p=0，$k^2>\frac{a^2}{b^2}$。

当 m>0 时解得 $p>0$ 或 $p<-\frac{c^2}{m}$，代入③得 $k^2>\frac{a^2}{b^2}$ 或 $m^2>\frac{c^4k^2}{a^2-b^2k^2}\left(0<k^2<\frac{a^2}{b^2}\right)$；

当 m<0 时解得 $p<0$ 或 $p>-\frac{c^2}{m}$，代入③得 $k^2>\frac{a^2}{b^2}$ 或 $m^2>\frac{c^4k^2}{a^2-b^2k^2}\left(0<k^2<\frac{a^2}{b^2}\right)$。

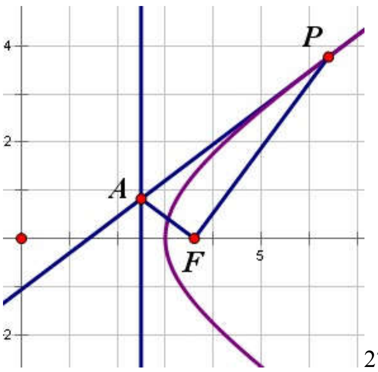
由此可见两种情况的结论相同。　　当 $k^2>\frac{a^2}{b^2}$ 时，$a^2-b^2k^2<0$，$m^2\geq 0>\frac{c^4k^2}{a^2-b^2k^2}$。

故对任意 m，结论可统一表示为 $m^2>\frac{c^4k^2}{a^2-b^2k^2}\left(k\neq 0\text{且}k\neq \pm\frac{a}{b}\right)$

当 $l: y=k(x-x_0)$，即当 $m=-kx_0$ 时，${x_0}^2>\frac{c^4}{a^2-b^2k^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2-b^2k^2}\left(k\neq 0\text{且}k\neq \pm\frac{a}{b}\right)$

26. 由 5 即可得证。

27. 设 P$\left(a\sec\varphi, b\tan\varphi\right)$，则切线 $l:\frac{\sec\varphi}{a}x-\frac{\tan\varphi}{b}y=1$，A$\left(\frac{a^2}{c},\frac{b}{\tan\varphi}\left(\frac{a\sec\varphi}{c}-1\right)\right)$



27 图

$\therefore \overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FA}=\left(a\sec\varphi-c, b\tan\varphi\right)\cdot\left(-\frac{b^2}{c},\frac{b}{\tan\varphi}\left(\frac{a\sec\varphi}{c}-1\right)\right)=-\frac{ab^2\sec\varphi}{c}+b^2-b^2+\frac{ab^2\sec\varphi}{c}=0 \therefore FP\perp FA$

28. 设 $P\left(a\sec\varphi, b\tan\varphi\right)$，由射影定理有：$b^2\tan^2\varphi=\left(c-a\sec\varphi\right)\left(c+a\sec\varphi\right)=c^2-a^2\sec^2\varphi$

$\Rightarrow c^2=a^2\sec^2\varphi+\left(c^2-a^2\right)\tan^2\varphi \Rightarrow e^2=\sec^2\varphi+\left(e^2-1\right)\tan^2\varphi$

$\Rightarrow \left(1-\tan^2\varphi\right)e^2=\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1 \Rightarrow e^2=\frac{1}{1-\tan^2\varphi}$

29. 设 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k\left(k>1\right), AB\left(l\right): Ax+By+C=0$。联立 C_1, l 得：

$\left(B^2b^2-A^2a^2\right)x^2-2Aa^2Cx-\left(a^2C^2+a^2b^2B^2\right)=0$，由韦达定理：$x_A+x_B=\dfrac{2Aa^2C}{B^2b^2-A^2a^2}$

同理$x_P+x_Q=\dfrac{2Aa^2C}{B^2b^2-A^2a^2}$。则 AP−BQ=$\sqrt{1+\dfrac{A^2}{B^2}}\left|x_A-x_P\right|-\sqrt{1+\dfrac{A^2}{B^2}}\left|x_B-x_Q\right|=\sqrt{1+\dfrac{A^2}{B^2}}\left(\left|x_A-x_P\right|-\left|x_B-x_Q\right|\right)$

而x_A-x_P,x_B-x_Q的符号一定相反，故$\left|x_A-x_P\right|-\left|x_B-x_Q\right|=x_A+x_B-\left(x_P+x_Q\right)$=0。所以 AP=BQ

30. ① 当 A，B 同支时，设$A\left(\pm a\cosh\theta,b\sinh\theta\right),B\left(\pm a\cosh\varphi,b\sinh\varphi\right)$，$M\left(x_0,y_0\right)$为 AB 中点。

则$\left|AB\right|^2=a^2\left(\cosh\theta-\cosh\varphi\right)^2+b^2\left(\sinh\theta-\sinh\varphi\right)^2=4a^2\sinh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sinh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}+4b^2\cosh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sinh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}=4m^2$

$\Rightarrow a^2\sinh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sinh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}+b^2\cosh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sinh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}=m^2$

而$\left|x_0\right|=\dfrac{a\cosh\theta+a\cosh\varphi}{2}=a\cosh\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cosh\dfrac{\theta-\varphi}{2},y_0=\dfrac{b\sinh\theta+b\sinh\varphi}{2}=b\sinh\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cosh\dfrac{\theta-\varphi}{2}$

设$A=\sinh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2},B=\sinh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}$，则$\dfrac{x_0^2}{a^2}=\left(1+A\right)\left(1+B\right),\dfrac{y_0^2}{b^2}=\left(1+A\right)B,m^2=a^2AB+b^2A\left(1+B\right)$

解得$A=\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}-1,B=\dfrac{\dfrac{y_0^2}{b^2}}{\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}}$，代入 m^2 得：$m^2=\left[\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)-1\right]\left(\dfrac{a^2}{\dfrac{b^2x_0^2}{a^2y_0^2}-1}+\dfrac{b^2\cdot\dfrac{b^2x_0^2}{a^2y_0^2}}{\dfrac{b^2x_0^2}{a^2y_0^2}-1}\right)$

令$\coth t=-\dfrac{bx}{ay}\left(\left|\coth t\right|>1\right)$得：$m^2=\left[\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-1\right]\left(a^2\sinh^2t+b^2\cosh^2t\right)$

所以定长为 2m（$m>0$）的弦中点轨迹方程为$m^2=\left[\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-1\right]\left(a^2\sinh^2t+b^2\cosh^2t\right)$。

其中$\coth t=-\dfrac{bx}{ay}$，$y=0$时$t=0$。

② 当 A，B 异支时，设$A\left(\pm a\cosh\theta,b\sinh\theta\right),B\left(\mp a\cosh\varphi,b\sinh\varphi\right)$，$M\left(x_0,y_0\right)$为 AB 中点。

则$\left|AB\right|^2=a^2\left(\cosh\theta+\cosh\varphi\right)^2+b^2\left(\sinh\theta-\sinh\varphi\right)^2=4a^2\cosh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cosh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}+4b^2\cosh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sinh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}=4m^2$

$\Rightarrow a^2\cosh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cosh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}+b^2\cosh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sinh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}=m^2$

而$\left|x_0\right|=\left|\dfrac{a\cosh\theta-a\cosh\varphi}{2}\right|=\left|a\sinh\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sinh\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right|,y_0=\dfrac{b\sinh\theta+b\sinh\varphi}{2}=b\sinh\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cosh\dfrac{\theta-\varphi}{2}$

设$A=\sinh^2\dfrac{\theta-\varphi}{2},B=\sinh^2\dfrac{\theta+\varphi}{2}$，则$\dfrac{x_0^2}{a^2}=AB,\dfrac{y_0^2}{b^2}=\left(1+A\right)B,m^2=a^2\left(1+A\right)\left(1+B\right)+b^2A\left(1+B\right)$

解得 $A=\dfrac{\dfrac{x_0^2}{a^2}}{\dfrac{y_0^2}{b^2}-\dfrac{x_0^2}{a^2}},B=\dfrac{y_0^2}{b^2}-\dfrac{x_0^2}{a^2}$，代入 m^2 得：$m^2=\left[1-\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)\right]\left(\dfrac{b^2}{\dfrac{a^2y_0^2}{b^2x_0^2}-1}+\dfrac{a^2\cdot\dfrac{a^2y_0^2}{b^2x_0^2}}{\dfrac{a^2y_0^2}{b^2x_0^2}-1}\right)$

令 $\coth t=-\dfrac{ay}{bx}\left(\left|\coth t\right|>1\right)$ 得：$m^2=\left[1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(a^2\cosh^2 t+b^2\sinh^2 t\right)$

所以定长为 2m（$m>0$）的弦中点轨迹方程为 $m^2=\left[1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(a^2\cosh^2 t+b^2\sinh^2 t\right)$。

其中 $\coth t=-\dfrac{ay}{bx}$，$x=0$ 时 $t=0$。

综上所述，定长为 2m（$m>0$）的弦中点轨迹方程为：

$$m^2=\begin{cases}\left[1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(a^2\cosh^2 t+b^2\sinh^2 t\right),\coth t=-\dfrac{ay}{bx},x=0\text{时}t=0\text{，弦两端点在两支上}\\ \left[\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-1\right]\left(a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t\right),\coth t=-\dfrac{bx}{ay},y=0\text{时}t=0\text{，弦两端点在同支上}\end{cases}$$

31. 设 $A\left(a\cosh\alpha,b\sinh\alpha\right),B\left(a\cosh\beta,b\sinh\beta\right)$，$M\left(x_0,y_0\right)$ 为 AB 中点。则：

$$x_0=\frac{a\cosh\alpha+a\cosh\beta}{2}=a\cosh\frac{\alpha+\beta}{2}\cosh\frac{\beta-\alpha}{2}\Rightarrow\cosh\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{x_0}{a\cosh\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\left|AB\right|^2=a^2\left(\cosh\alpha-\cosh\beta\right)^2+b^2\left(\sinh\alpha-\sinh\beta\right)^2=4a^2\sinh^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sinh^2\frac{\beta-\alpha}{2}+4b^2\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sinh^2\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$=4\sinh^2\frac{\beta-\alpha}{2}\left(a^2\sinh^2\frac{\alpha+\beta}{2}+b^2\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\left(\cosh^2\frac{\beta-\alpha}{2}-1\right)\left(c^2\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}-a^2\right)=l^2$$

$$\Rightarrow a^2-\left(a^2\cosh^2\frac{\beta-\alpha}{2}+c^2\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+c^2\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cosh^2\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{l^2}{4}$$

$$\Rightarrow e^2x_0^2-\left(\frac{x_0^2}{\cosh^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}+c^2\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+a^2=\frac{l^2}{4}$$

二次函数 $y=e^2x^2-mx+a^2$ 与 $y=\dfrac{l^2}{4}$ 在 $\left[a,+\infty\right)$ 内的交点即为 x_0 的值。易知 $y=e^2x^2-mx+a^2$ 与 $y=\dfrac{l^2}{4}$ 的右交点为 x_0 的值。当 m 增大时，x_0 增大。要使 x_0 最小，则要使 m 最小。

$\dfrac{x_0^2}{\cosh^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}+c^2\cosh^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geq 2cx_0$，此时等号成立时 $\cosh^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{x_{0\min}}{c}\geq 1\Rightarrow x_{0\min}\geq c$

当此式成立时 $y=e^2x^2-mx+a^2=\frac{l^2}{4}\Rightarrow e^2x_{0\min}^2-2cx_{0\min}+a^2=\frac{l^2}{4}\Rightarrow ex_{0\min}-a=\frac{l}{2}\Rightarrow x_{0\min}=\frac{a}{e}+\frac{l}{2e}=\frac{a^2}{c}+\frac{l}{2e}$

当 $x_{0\min}=\frac{a}{e}+\frac{l}{2e}=\frac{a^2}{c}+\frac{l}{2e}=c$ 时：$l=\frac{2b^2}{a}=\Phi\left(\text{通径}\right)$　　　当 $x_{0\min}\geq c$ 时：$l\geq\frac{2b^2}{a}=\Phi$

$\therefore$ 当 $l\geq\Phi=\frac{2b^2}{a}$ 时 $x_{0\min}\geq c$，$x_{0\min}=\frac{a^2}{c}+\frac{l}{2e}$，$\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{x_0}{c}$。

当 $x_{0\min}<c$ 时，当 $\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1$，即 AB 垂直于 x 轴时 x_0 最小。

$$e^2x_{0\min}^2-x_{0\min}^2+a^2-c^2=\frac{l^2}{4}\Rightarrow x_{0\min}^2=\frac{b^2+\frac{l^2}{4}}{e^2-1}=\frac{a^2}{4b^2}\left(4b^2+l^2\right)\Rightarrow x_{0\min}=\frac{a}{2b}\sqrt{4b^2+l^2}$$

$$\therefore x_{0\min}=\begin{cases}\frac{a^2}{c}+\frac{l}{2e}\left(x_{0\min}\geq c,l\geq\Phi=\frac{2b^2}{a},AB\text{过焦点},\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{x_0}{c}\right)\\ \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2+l^2}\left(x_{0\min}<c,l<\Phi=\frac{2b^2}{a}\text{，}AB\perp x\text{轴},\cosh^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1\right)\end{cases}$$

32.由 33，当 $x_0=y_0=0$ 时，$A^2a^2-B^2b^2\leq C^2$

33. $\begin{cases}b^2\left(x-x_0\right)^2-a^2\left(y-y_0\right)^2=a^2b^2\\ Ax+By+C=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\left(B^2b^2-A^2a^2\right)x^2-2\left[B^2b^2x_0+a^2A\left(By_0+C\right)\right]x+\left[B^2b^2x_0^2-a^2B^2b^2-a^2\left(By_0+C\right)^2\right]=0$$

$$\Delta\geq0\Rightarrow A^2a^2-B^2b^2\leq A^2x_0^2+B^2y_0^2+C^2+2ABx_0y_0+2ACx_0+2BCy_0=\left(Ax_0+By_0+C\right)^2$$

34.由正弦定理得 $\frac{F_1F_2}{\sin\alpha}=\frac{PF_2}{\sin\beta}=\frac{PF_1}{\sin\gamma}$，所以 $\frac{\sin\alpha}{\left|\sin\gamma-\sin\beta\right|}=\frac{F_1F_2}{\left|PF_1-PF_2\right|}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=e$。

35. 设 $P\left(a\sec\varphi,b\tan\varphi\right)$，则 P 点处的切线为 $\frac{\sec\varphi}{a}x-\frac{\tan\varphi}{b}y=1$，

由此可得：$y_{P_1}=-\frac{b}{\tan\varphi}\left(1+\sec\varphi\right),y_{P_2}=\frac{b}{\tan\varphi}\left(\sec\varphi-1\right)\therefore\left|P_1A_1\right|\cdot\left|P_2A_2\right|=\frac{b^2\left(\sec^2\varphi-1\right)}{\tan^2\varphi}=b^2$

36.（1）同 15。（2）由 15,36（3）：$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{|OP|^2+|OQ|^2}{|OP|^2|OQ|^2}=\frac{|OP|^2+|OQ|^2}{4S_{\Delta OPQ}^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$

$$\therefore|OP|^2+|OQ|^2=\frac{\left(b^2-a^2\right)4S_{\Delta OPQ}^2}{a^2b^2}\geq\frac{4\left(b^2-a^2\right)}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\right)^2=\frac{4a^2b^2}{b^2-a^2}$$

（3）设 $P\left(a\sec\theta,b\tan\theta\right),Q\left(a\sec\varphi,b\tan\varphi\right)$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=a^2\sec\theta\sec\varphi+b^2\tan\theta\tan\varphi=0\Rightarrow\sin\theta\sin\varphi=-\frac{a^2}{b^2}$

$$2S_{\Delta OPQ}=\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\right|=\left\|\begin{matrix}a\sec\theta & b\tan\theta\\ a\sec\varphi & b\tan\varphi\end{matrix}\right\|=\left|ab\left(\sec\theta\tan\varphi-\tan\theta\sec\varphi\right)\right|=ab\left|\frac{\sin\varphi-\sin\theta}{\cos\theta\cos\varphi}\right|$$

$$\Rightarrow\frac{4S_{\Delta OPQ}^2}{a^2b^2}=\frac{\sin^2\varphi+\sin^2\theta-2\sin\varphi\sin\theta}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}=\frac{\sin^2\varphi+\sin^2\theta-2\sin\varphi\sin\theta}{\sin^2\varphi\sin^2\theta+1-\left(\sin^2\varphi+\sin^2\theta\right)}=\frac{\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)^2}{\frac{a^4}{b^4}+1-\left(\sin^2\varphi+\frac{\frac{a^4}{b^4}}{\sin^2\varphi}\right)}-1$$

$$\geq\frac{\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)^2}{\frac{a^4}{b^4}+1-2\frac{a^2}{b^2}}-1=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{\left(b^2-a^2\right)^2}-1=\frac{4a^2b^2}{\left(b^2-a^2\right)^2}\Rightarrow S_{\Delta OPQ}^2\geq\left(\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\right)^2\Rightarrow S_{\Delta OPQ}\geq\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\therefore S_{\min}=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$$

37. 设 $AB:\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases},MN:\begin{cases}x=c+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$，分别代入双曲线方程得：

$t^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}$，$\left(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta\right)t^2+2b^2ct\cos\theta+b^4=0$ 由参数 t 的几何意义可知：

$$|MN|=|t_1-t_2|=\frac{2ab^2}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}\qquad |AB|^2=4t^2=\frac{4a^2b^2}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}=2a|MN|$$

38.由双曲线极坐标方程得：$MN=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}+\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}=\dfrac{2p}{1-e^2\cos^2\varphi}=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\varphi}$,

设 OP：$\begin{cases}x=t\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-t\sin\varphi\\ y=t\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=t\cos\varphi\end{cases}$ 代入双曲线方程得：$OP^2=t^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2\sin^2\varphi-a^2\cos^2\varphi}$,

$$\therefore\frac{2}{a|MN|}-\frac{1}{|OP|^2}=\frac{a^2-c^2\cos^2\varphi}{a^2b^2}-\frac{b^2\sin^2\varphi-a^2\cos^2\varphi}{a^2b^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$$

39. 设 $l:x=ty+m,P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，将 l 的方程代入双曲线得：$\left(b^2t^2-a^2\right)y^2+2b^2mty+b^2\left(m^2-a^2\right)=0$

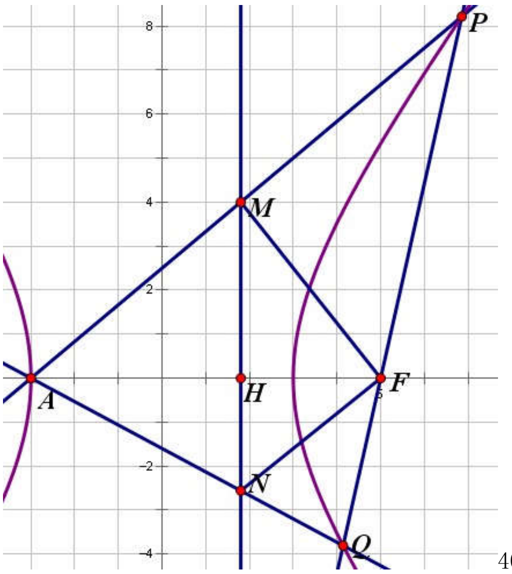
由韦达定理得：$y_1+y_2=-\dfrac{2b^2mt}{b^2t^2-a^2},y_1y_2=\dfrac{b^2\left(m^2-a^2\right)}{b^2t^2-a^2}$，直线 A_1P 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+a}\left(x+a\right)$，直线 A_2Q 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-a}\left(x-a\right)$，联立 A_1P 和 A_2Q 得交点 N 的横坐标 $x=\dfrac{2ty_1y_2+\left(a+m\right)y_2+\left(m-a\right)y_1}{\left(a+m\right)y_2+\left(a-m\right)y_1}a$，代入化简：

$$x=\frac{2b^2tm^2-2b^2ta^2-2b^2m^2t+a\left(b^2t^2-a^2\right)\left(y_2-y_1\right)}{-2ab^2mt+m\left(b^2t^2-a^2\right)\left(y_2-y_1\right)}a=\frac{a\left[\left(b^2t^2-a^2\right)\left(y_2-y_1\right)-2ab^2t\right]}{m\left[\left(b^2t^2-a^2\right)\left(y_2-y_1\right)-2ab^2t\right]}a=\frac{a^2}{m}$$

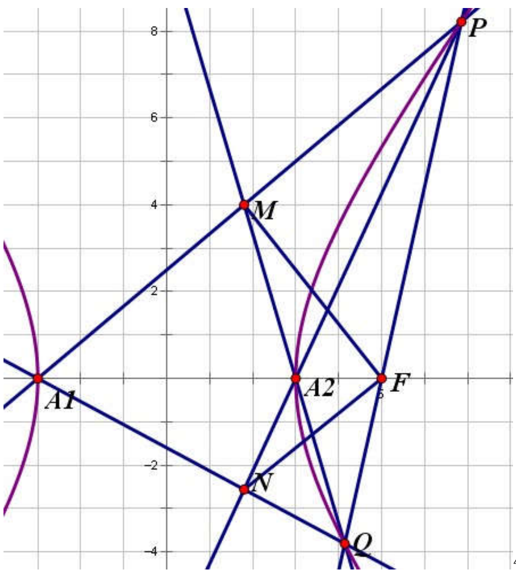
所以交点一定在直线 $x=\dfrac{a^2}{m}$ 上。

引理（张角定理）：A,C,B 三点按顺序排列在一条直线上。直线外一点 P 对 AC 的张角为α，对 CB 的张角为β。

则：$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\dfrac{\sin\alpha}{PB}+\dfrac{\sin\beta}{PA}$



40 图



41 图

40.如图，A 为左顶点时，设 $\angle PFx=\theta,\angle MFP=\varphi$，则 $\angle AFP=\pi-\theta,\angle HFM=\pi-\theta-\varphi$

$$AF=a+c,FH=c-\frac{a^2}{c}=\frac{b^2}{c}=\frac{b^2}{ae}=\frac{p}{e},FM=-\frac{p}{e\cos(\theta+\varphi)}\left(p=\frac{b^2}{a}\right)。$$

对 F-AMP 由张角定理：$\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{FM}=\dfrac{\sin\varphi}{FA}+\dfrac{\sin(\pi-\theta-\varphi)}{FP}$

$$\Rightarrow(c-a)\sin\varphi=c\sin(\theta+\varphi)\cos\theta-c\sin\theta\cos(\theta+\varphi)-a\sin(\theta+\varphi)\Rightarrow\sin\varphi=\sin(\theta+\varphi)$$

$\because 0<\theta<\pi\therefore\varphi=\pi-\theta-\varphi$ 即 FM 平分 $\angle AFP$，同理 FN 平分 $\angle AFQ$。$\therefore\angle MFN=90^\circ$ 即 MF⊥NF

当 A 为右顶点时，由 39 可知左顶点 A’与 P、M；与 Q、N 分别共线，于是回到上一种情况。

41.如图，设 $\angle PFx=\theta,\angle MFP=\varphi$，则 $\angle A_1FP=\pi-\theta,\angle A_2FQ=\theta$

对 F-QA_2M 和 F-A_1MP 由张角定理：$\dfrac{\sin(\pi-\varphi)}{FA_2}=\dfrac{\sin\theta}{FM}+\dfrac{\sin(\pi-\theta-\varphi)}{FQ},\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{FM}=\dfrac{\sin\varphi}{FA_1}+\dfrac{\sin(\pi-\theta-\varphi)}{FP}$

两式相加并化简得：$\dfrac{\sin\varphi}{FA_2}-\dfrac{\sin\varphi}{FA_1}=\dfrac{\sin(\theta+\varphi)}{FQ}+\dfrac{\sin(\theta+\varphi)}{FP}\Rightarrow\sin\varphi=\sin(\theta+\varphi)$

$\because 0<\theta<\pi \therefore \varphi=\pi-\theta-\varphi$ 即 FM 平分 $\angle PFA_1$，同理 FN 平分 $\angle QFA_1$。$\therefore \angle MFN=90^{\circ}$ 即 MF⊥NF

42. 由 12 即可证得。

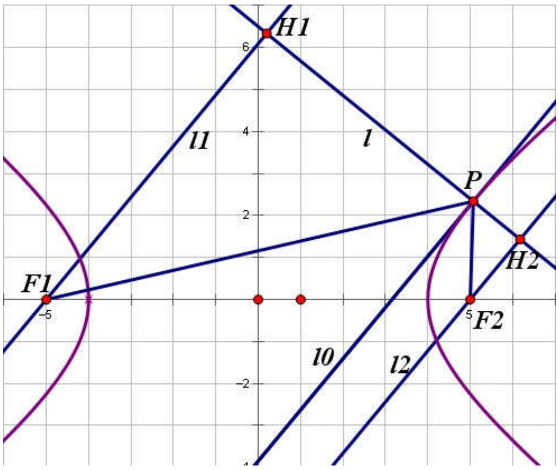
43. 设 $P\left(x_0,y_0\right)$，AB：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$，CD：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\beta\\ y=y_0+t\sin\beta\end{cases}$，将 AB 的方程代入双曲线得：

$$\left(b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha\right)t^2+2\left(b^2x_0\cos\alpha-a^2y_0\sin\alpha\right)t+\left(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2\right)=0$$

由参数 t 的几何意义可知：$|PA|\cdot|PB|=\left|t_1t_2\right|=\left|\dfrac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}\right|$，同理 $|PC|\cdot|PD|=\left|\dfrac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\beta}\right|$

易知 P 与 A，B 和 C，D 的位置关系一定相同　$\therefore \dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\dfrac{b^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\beta}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}$

44. 对于内角平分线的情况由 5 即可证得，下仅证 l 为外角平分线的情况。



设 P$\left(a\sec\varphi,b\tan\varphi\right)$，则 $l_0:\dfrac{\sec\varphi}{a}x-\dfrac{\tan\varphi}{b}y=1\Rightarrow b\sec\varphi-a\tan\varphi-ab=0$

则 $l:a\tan\varphi x+b\sec\varphi y-c^2\sec\varphi\tan\varphi=0$，$l_1:b\sec\varphi x-a\tan\varphi y+bc\sec\varphi=0$

$l_2:b\sec\varphi x-a\tan\varphi y-bc\sec\varphi=0$。分别联立 l、l_1 和 l、l_2 得：

$$H_1\left(\frac{c\sec\varphi\left(ac\tan^2\varphi-b^2\sec\varphi\right)}{a^2\tan^2\varphi+b^2\sec^2\varphi},-\frac{bc\tan\varphi\sec\varphi}{c\sec\varphi-\alpha}\right),\quad H_2\left(\frac{c\sec\varphi\left(ac\tan^2\varphi+b^2\sec\varphi\right)}{a^2\tan^2\varphi+b^2\sec^2\varphi},-\frac{bc\tan\varphi\sec\varphi}{a+c\sec\varphi}\right)$$

则 $x_{H_1}+c=\dfrac{ac\tan^2\varphi}{c\sec\varphi-\alpha}$，$x_{H_2}-c=\dfrac{ac\tan^2\varphi}{a+c\sec\varphi}$　　对 H_1 点：$\sin\varphi=-\dfrac{b\left(x+c\right)}{ay}$

$\therefore \sec\varphi=\pm\dfrac{ay}{\sqrt{a^2y^2-b^2\left(x+c\right)^2}},\tan\varphi=\mp\dfrac{b\left(x+c\right)}{\sqrt{a^2y^2-b^2\left(x+c\right)^2}}$，代回 $x_{H_1}+c$ 式得：

$$\frac{x+c}{ac}=\frac{\dfrac{b^2(x+c)^2}{a^2y^2-b^2(x+c)^2}}{\pm\dfrac{acy}{\sqrt{a^2y^2-b^2(x+c)^2}}-a}\Rightarrow\pm\frac{cy}{\sqrt{a^2y^2-b^2(x+c)^2}}-1=\frac{b^2c(x+c)}{a^2y^2-b^2(x+c)^2}$$

$$\Rightarrow\pm\frac{cy}{\sqrt{a^2y^2-b^2(x+c)^2}}=\frac{a^2y^2-b^2x(x+c)}{a^2y^2-b^2(x+c)^2}\Rightarrow c^2y^2=\frac{\left[a^2y^2-b^2x(x+c)\right]^2}{a^2y^2-b^2(x+c)^2}$$

同理对H_2点得$c^2y^2=\dfrac{\left[a^2y^2-b^2x(x-c)\right]^2}{a^2y^2-b^2(x-c)^2}$。故$H_1$点、$H_2$点的轨迹方程为$c^2y^2=\dfrac{\left[a^2y^2-b^2x(x\pm c)\right]^2}{a^2y^2-b^2(x\pm c)^2}$

45.由伸缩变换$y'=\dfrac{a}{b}y$将双曲线变为等轴双曲线$x^2-y^2=a^2$，再由旋转变换变为坐标轴为渐近线的双曲线$y=\dfrac{k}{x}\left(k=\dfrac{a^2}{2}\right)$

原来的共轭直径变为两条关于 y 轴对称的直线。只需证明此情况即可证明原命题。

设$A\left(m,\dfrac{k}{m}\right),B\left(-m,-\dfrac{k}{m}\right),C\left(t,\dfrac{k}{t}\right)$，则$AB:y=\dfrac{k}{m^2}x,EF:y=-\dfrac{k}{m^2}x$，$k_{AC}=-\dfrac{k}{mt}$，则直线 AC：$y=-\dfrac{k}{mt}(x-t)+\dfrac{k}{t}$

同理 BC：$y=\dfrac{k}{mt}(x-t)+\dfrac{k}{t}$。C 点处的切线$y-\dfrac{k}{t}=-\dfrac{k}{t^2}(x-t)$。分别联立 EF 与 AC，EF 与 AB，EF 与 C 点处的切线得：

$x_E=\dfrac{m+t}{m-t}m,x_F=\dfrac{t-m}{t+m}m,x_D=\dfrac{2m^2t}{m^2-t^2}$。　$\therefore x_E+x_F=\dfrac{m+t}{m-t}m-\dfrac{m-t}{m+t}m=\dfrac{(m+t)^2-(m-t)^2}{m^2-t^2}m=\dfrac{4m^2t}{m^2-t^2}=2x_D$

由 E，D，F 三点共线可知，D 为 EF 的中点。

46. 设$\angle MFx=\varphi$，由双曲线极坐标方程：$|MN|=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}+\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}=\dfrac{2p}{1-e^2\cos^2\varphi}$

$$|HF|=\frac{\left|\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}-\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}\right|}{2}=\frac{ep|\cos\varphi|}{1-e^2\cos^2\varphi}，|PF|=\frac{|HF|}{|\cos\varphi|}=\frac{ep}{1-e^2\cos^2\varphi}\quad\therefore\frac{|PF|}{|MN|}=\frac{e}{2}$$

47. 由 10 可知l为切线$l:b^2x_1x-a^2y_1y-a^2b^2=0$　$\therefore d=\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}$　由 22:$r_1r_2=e^2x_1^2-a^2$

$$\therefore\sqrt{r_1r_2}d=\sqrt{e^2x_1^2-a^2}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}=\frac{a^2b^2\sqrt{e^2x_1^2-a^2}}{\sqrt{b^4x_1^2+a^2b^2\left(x_1^2-a^2\right)}}=\frac{a^2b\sqrt{e^2x_1^2-a^2}}{\sqrt{c^2x_1^2-a^4}}=ab$$

48.同 29。

49.设AB中点为$M(x_0,y_0)$,则$k_{AB}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\therefore k_{MP}=-\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}\therefore MP:y-y_0=-\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$

令$y=0$,得$x_P=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}x_0 \because x_0\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty) \therefore x_P\in\left(-\infty,-\dfrac{a^2+b^2}{a}\right)\cup\left(\dfrac{a^2+b^2}{a},+\infty\right)$

50.同 20。

51. 设$l:x=ty+m,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，代入双曲线方程得：$(b^2t^2-a^2)y^2+2b^2mty+b^2(m^2-a^2)=0$

由韦达定理得：$y_1+y_2=-\dfrac{2b^2mt}{b^2t^2-a^2},y_1y_2=\dfrac{b^2(m^2-a^2)}{b^2t^2-a^2}$

由 A、P、M 三点共线得$y_M=\dfrac{n+a}{x_1+a}y_1=\dfrac{(n+a)y_1}{ty_1+m+a}$，同理$y_N=\dfrac{(n+a)y_2}{ty_2+m+a}$

$$\therefore \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=(n-m)^2+y_My_N=(n-m)^2+\frac{(n+a)^2y_1y_2}{t^2y_1y_2+t(m+a)(y_1+y_2)+(m+a)^2}$$

$$=(n-m)^2+\frac{b^2(m^2-a^2)(n+a)^2}{b^2t^2(m^2-a^2)-2b^2mt^2(m+a)+(m+a)^2(b^2t^2-a^2)}$$

$$=(n-m)^2+\frac{b^2(m-a)(n+a)^2}{b^2t^2(m-a)-2b^2mt^2+(m+a)(b^2t^2-a^2)}=(n-m)^2+\frac{b^2(a-m)(n+a)^2}{a^2(m+a)}=0\Rightarrow\frac{a-m}{a+m}=-\frac{a^2(n-m)^2}{b^2(n+a)^2}$$

52,53,54 为同一类题（最佳观画位置问题），现给出公式：若有两定点 A$(-k,0)$，B$(k,0)$，点 P(m,y)在直线 x=m 上（m>k），则当$y^2=(m+k)(m-k)=m^2-k^2$时，∠APB 最大，其正弦值为$\dfrac{k}{m}$。

52.k=a,m=c　∴sinα≤$\dfrac{1}{e}$,当且仅当 PF=b 时取等号。　　53. k=$\dfrac{a^2}{c}$,m= a　∴sinα≤$\dfrac{1}{e}$,当且仅当 PA=$\dfrac{ab}{c}$时取等号。

54. k=$\dfrac{a^2}{c}$,m= c　∴sinα≤$\dfrac{1}{e^2}$,当且仅当 PF$_1$=$\dfrac{b}{c}\sqrt{a^2+c^2}$ 时取等号。

55. 设∠AF$_2$x=θ，则$|F_1A|\cdot|F_1B|=\left(2a+\dfrac{p}{1+e\cos\theta}\right)\left(2a+\dfrac{p}{1-e\cos\theta}\right)=4a^2+\dfrac{p(p+4a)}{1-e^2\cos^2\theta}\ge4a^2+4ap+p^2=\dfrac{(2a^2+b^2)^2}{a^2}$

当且仅当θ=90° 时等号成立。

56. （1）设$AP:\begin{cases}x=t\cos\alpha-a\\y=t\sin\alpha\end{cases}$，代入双曲线方程得：$(b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha)t^2=2ab^2t\cos\alpha$　∵AP=$|t|\neq0$

∴AP=$|t|=\dfrac{2ab^2|\cos\alpha|}{|b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha|}=\dfrac{2ab^2|\cos\alpha|}{|a^2-c^2\cos^2\alpha|}$

（2）设$P(x_0,y_0)$则$\tan\alpha\tan\beta=-\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}=1-e^2$

（3）$S=\frac{1}{2}PA\cdot AB\sin\alpha=\frac{2a^2b^2\sin\alpha\left|\cos\alpha\right|}{\left|a^2-c^2\cos^2\alpha\right|}=\left|\frac{2a^2b^2\tan\alpha}{a^2\tan^2\alpha-b^2}\right|$

由（2）：$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\tan\alpha-\frac{b^2}{a^2\tan\alpha}}{1+e^2-1}=\frac{a^2\tan^2\alpha-b^2}{c^2\tan\alpha}=-\tan\gamma\Rightarrow\cot\gamma=-\frac{c^2\tan\alpha}{a^2\tan^2\alpha-b^2}\ \therefore S=\left|-\frac{2a^2b^2\cot\gamma}{c^2}\right|=\frac{2a^2b^2\cot\gamma}{a^2+b^2}$

57. 由 58 可证。

58.（1）易知 PQ 的斜率为 0 和斜率不存在时，对任意 x 轴上的点 A 都成立。设 $PQ:x=ty+m$，A（m，0）

代入双曲线方程得：$\left(b^2t^2-a^2\right)y^2+2b^2mty+b^2\left(m^2-a^2\right)=0$，则 $y_1+y_2=-\frac{2b^2mt}{b^2t^2-a^2},y_1y_2=\frac{b^2\left(m^2-a^2\right)}{b^2t^2-a^2}$

若 $\angle PBA=\angle QBA$，则 $k_{BQ}+k_{BP}=0\Rightarrow\frac{y_1}{x_1-x_B}+\frac{y_2}{x_2-x_B}=0\Rightarrow y_1\left(ty_2+m-x_B\right)+y_2\left(ty_1+m-x_B\right)=0$

$\Rightarrow 2ty_1y_2+\left(m-x_B\right)\left(y_1+y_2\right)=0\Rightarrow\frac{2b^2t\left(m^2-a^2\right)}{b^2t^2-a^2}-\frac{2b^2mt\left(m-x_B\right)}{b^2t^2-a^2}=0\Rightarrow 2b^2t\left(m^2-a^2\right)-2b^2mt\left(m-x_B\right)=0$

$\Rightarrow m^2t-a^2t-m^2t+mtx_B=0\Rightarrow x_B=\frac{a^2}{m}\Rightarrow x_A\cdot x_B=m\cdot\frac{a^2}{m}=a^2$

（2）作 P 关于 x 轴的对称点 P'，由（1）即证。

59.同 9。

60.设 $l_1:\begin{cases}x=c+t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases},\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 且 $\tan\alpha\neq\frac{a}{b}$ 或 $\frac{b}{a}$，代入双曲线方程得：$\left(b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha\right)t^2+2b^2c\cos\alpha t+b^4=0$

$\therefore\left|AB\right|=\left|t_1-t_2\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{\left|b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha\right|}=\frac{2ab^2}{\left|b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha\right|}$，同理对 l_2 倾斜角 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$。

$\therefore\left|CD\right|=\left|t_1-t_2\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{\left|a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha\right|}=\frac{2ab^2}{\left|a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha\right|}$

$\therefore\left|AB\right|+\left|CD\right|=2ab^2\left(\frac{1}{\left|b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha\right|}+\frac{1}{\left|a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha\right|}\right)=2ab^2\left(\frac{1}{\left|b^2-c^2\sin^2\alpha\right|}+\frac{1}{\left|a^2-c^2\sin^2\alpha\right|}\right)$

当 a=b 时，$c=\sqrt{2}a=\sqrt{2}b$，$\left|AB\right|+\left|CD\right|=\frac{4a}{\left|1-2\sin^2\alpha\right|}\geq 4a=2a+\frac{2b^2}{a}=\frac{2c^2}{a}$，此时 $\alpha=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$。

当 $a\neq b$ 时，设 $f\left(\alpha\right)=\frac{1}{\left|b^2-c^2\sin^2\alpha\right|}+\frac{1}{\left|a^2-c^2\sin^2\alpha\right|}$，则 $f\left(\alpha\right)$ 关于 $\sin\alpha$ 在 $\left[0,\min\left\{\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right\}\right)$ 上增至正无穷，在 $\left(\max\left\{\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right\},1\right]$ 上单调减，在 $\frac{a}{c}$ 和 $\frac{b}{c}$ 之间先减后增，此时两者异号。

当$\sin\alpha\in\left[0,\min\left\{\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right\}\right)$和$\left(\max\left\{\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right\},1\right]$时，当$\sin\alpha$为 0 或 1 时，$f(\alpha)$有最小值$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{c^2}{a^2b^2}$。

当$\sin\alpha$介于$\frac{a}{c}$和$\frac{b}{c}$之间时：$f(\alpha)=\left|\frac{1}{b^2-c^2\sin^2\alpha}+\frac{1}{c^2\sin^2\alpha-a^2}\right|=\left|\frac{b^2-a^2}{(b^2-c^2\sin^2\alpha)(c^2\sin^2\alpha-a^2)}\right|\ge\frac{4}{|b^2-a^2|}$

等号成立时$b^2-c^2\sin^2\alpha=c^2\sin^2\alpha-a^2$即$\alpha=\frac{\pi}{4}$。而$\frac{c^2}{a^2b^2}>\frac{4}{c^2}=\frac{4}{a^2+b^2}>\frac{4}{|b^2-a^2|}$

故当$a\ne b$时，$f_{\min}(\alpha)=\frac{4}{|b^2-a^2|}$，$|AB|+|CD|$的最小值为$\frac{8ab^2}{|a^2-b^2|}$。

61,62,63 为同一类问题，现给出公式：若点 P 到两定点 A$(-m,0)$，B$(m,0)$的距离之比$\frac{PA}{PB}=k(k>0,k\ne1)$，则 P 点的轨迹为一个圆，圆心坐标为$\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}m,0\right)$，圆的半径为$\frac{2km}{|k^2-1|}$。

下三个题的比值k均为$\frac{c-a}{b}$，代入上述公式得：圆心坐标为$(me,0)$，圆的半径为$\frac{b}{a}m$。

61.m=c，圆心坐标为$(\pm ce,0)$，圆的半径为be。轨迹方程是姊妹圆$(x\pm ce)^2+y^2=(be)^2$。

62.m=a，圆心坐标为$(\pm c,0)$，圆的半径为b。轨迹方程是姊妹圆$(x\pm c)^2+y^2=b^2$。

63.m=$\frac{a^2}{c}$，圆心坐标为$(\pm a,0)$，圆的半径为$\frac{b}{e}$。轨迹方程是姊妹圆$(x\pm a)^2+y^2=\left(\frac{b}{e}\right)^2$。

64. 设$P(a\sec\varphi,b\tan\varphi),Q(x,y),A(-a,0),A'(a,0)$，由$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{A'P}\cdot\overrightarrow{A'Q}=0$得$Q\left(-a\sec\varphi,\frac{a^2\tan\varphi}{b}\right)$

消去参数φ得 Q 点的轨迹方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2y^2}{a^4}=1$

65.同 37。

66.（1）同 35。

（2）由基本不等式$|AM|+|A'M'|>2b$（渐近线时取等号），则梯形$AMA'M'$面积趋近于一个最小值$\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2b=2ab$。

67.设 AC 交 x 轴于 M，AD⊥l于 D。由双曲线第二定义：$\frac{FM}{EM}=\frac{\frac{AM\cdot BC}{AC}}{\frac{CM\cdot AD}{AC}}=\frac{AM\cdot BC}{CM\cdot AD}=\frac{AF\cdot BC}{BF\cdot AD}=\frac{e}{e}=1$

∴AC 过 EF 的中点。

68.（1）由 17 可知当双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$时，AB 过定点$\left(\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}a,0\right)$。当双曲线方程变为$\frac{(x-a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

时，双曲线向右平移了 a 个单位，定点也应向右平移了 a 个单位，故此时 AB 过定点 $\left(\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}a+a,0\right)$ 即 $\left(\frac{2ab^2}{b^2-a^2},0\right)$

（2）由 69（2）P 为原点，即 m=n=0 时 Q 的轨迹方程是 $(x-\frac{ab^2}{b^2-a^2})^2+y^2=(\frac{ab^2}{b^2-a^2})^2$（除原点）。

69.(1)由 17 可知当双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 时，AB 过定点 $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}(m-a),\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}n\right)$。当双曲线方程变为 $\frac{(x-a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 时，双曲线向右平移了 a 个单位，定点也应向右平移了 a 个单位，故此时 AB 过定点 $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}(m-a)+a,\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}n\right)$ 即 $(\frac{2ab^2-m(b^2+a^2)}{b^2-a^2},\frac{n(a^2+b^2)}{b^2-a^2})$。

（2）先证双曲线中心在原点的情况。双曲线方程为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$P(x_0,y_0)$，AB 的斜率为 $k=\tan\theta$。

由 17（1）：AB 过定点 $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0,-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}y_0\right)$，设 AB：$y+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}y_0=k\left(x-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0\right)$，PQ：$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$

两者联立得 $y_Q=\frac{2b^2kx_0}{(k^2+1)(b^2-a^2)}+\frac{a^2(k^2-1)y_0}{(k^2+1)(a^2-b^2)}+\frac{b^2y_0}{b^2-a^2}$，$x_Q=-\frac{2a^2ky_0}{(k^2+1)(b^2-a^2)}+\frac{b^2(1-k^2)x_0}{(k^2+1)(b^2-a^2)}-\frac{a^2x_0}{b^2-a^2}$

则 $x_Q+\frac{a^2x_0}{b^2-a^2}=\frac{b^2x_0(1-\tan^2\theta)}{(\tan^2\theta+1)(b^2-a^2)}-\frac{2a^2y_0\tan\theta}{(\tan^2\theta+1)(b^2-a^2)}=\frac{b^2x_0}{b^2-a^2}\cos2\theta-\frac{a^2y_0}{b^2-a^2}\sin2\theta$

$$y_Q-\frac{b^2y_0}{b^2-a^2}=\frac{2b^2x_0\tan\theta}{(\tan^2\theta+1)(b^2-a^2)}+\frac{a^2y_0(1-\tan^2\theta)}{(\tan^2\theta+1)(b^2-a^2)}=\frac{b^2x_0}{b^2-a^2}\sin2\theta+\frac{a^2y_0}{b^2-a^2}\cos2\theta$$

$$\therefore\left(x_Q+\frac{a^2x_0}{b^2-a^2}\right)^2+\left(y_Q-\frac{b^2y_0}{b^2-a^2}\right)^2=\left(\frac{b^2x_0}{b^2-a^2}\cos2\theta-\frac{a^2y_0}{b^2-a^2}\sin2\theta\right)^2+\left(\frac{b^2x_0}{b^2-a^2}\sin2\theta+\frac{a^2y_0}{b^2-a^2}\cos2\theta\right)^2$$

$$=\frac{b^4x_0^2+a^4y_0^2}{(b^2-a^2)^2}=\frac{b^2(a^2b^2+a^2y_0^2)+a^4y_0^2}{(b^2-a^2)^2}=\frac{a^2\left[b^4+y_0^2(a^2+b^2)\right]}{(b^2-a^2)^2}$$

当双曲线方程变为 $\frac{(x-a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 时，双曲线向右平移了 a 个单位，圆心也应向右平移了 a 个单位，而半径不变。故此时圆心的坐标为 $\left(\frac{a^2(a-m)}{b^2-a^2}+a,\frac{b^2n}{b^2-a^2}\right)$ 即 $\left(\frac{ab^2-a^2m}{b^2-a^2},\frac{b^2n}{b^2-a^2}\right)$，半径的平方仍为 $\frac{a^2\left[b^4+n^2(a^2+b^2)\right]}{(b^2-a^2)^2}$。

∴Q 点的轨迹方程为$\left(x_Q-\frac{ab^2-a^2m}{b^2-a^2}\right)^2+\left(y_Q-\frac{b^2n}{b^2-a^2}\right)^2=\frac{a^2\left[b^4+n^2\left(a^2+b^2\right)\right]}{\left(b^2-a^2\right)^2}$（除 P 点）。

70. 设 L:Ax+By+C=0,则 $d_1=\frac{|C-Ac|}{\sqrt{A^2+B^2}},d_2=\frac{|C+Ac|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\therefore d_1d_2=\frac{|C^2-A^2c^2|}{A^2+B^2}$

将 L 代入双曲线方程得：$\left(B^2b^2-A^2a^2\right)x^2-2a^2ACx-\left(a^2C^2+a^2b^2B^2\right)=0$，$\Delta=4a^2b^2B^2\left(B^2b^2-A^2a^2+C^2\right)$

$d_1d_2=b^2$，且 F_1、F_2 在 L 异侧$\Leftrightarrow$直线 L 和双曲线相切,或 L 是双曲线的渐近线；

$d_1d_2>b^2$，且 F_1、F_2 在 L 异侧$\Leftrightarrow$直线 L 和双曲线相离；$d_1d_2<b^2$，或 F_1、F_2 在 L 同侧$\Leftrightarrow$直线 L 和双曲线相交.

71. 由 35：$y_C=-\frac{b}{\tan\varphi}(1+\sec\varphi),y_D=\frac{b}{\tan\varphi}(\sec\varphi-1)\therefore AD:y=\frac{b(\sec\varphi-1)}{2a\tan\varphi}(x+a),BC:y=\frac{b(\sec\varphi+1)}{2a\tan\varphi}(x-a)$

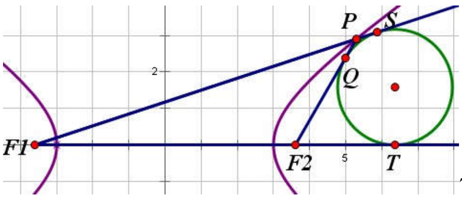
联立解得 $M\left(a\sec\varphi,\frac{b\tan\varphi}{2}\right)$，消去参数 φ 得 M 点的轨迹方程为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{4y^2}{b^2}=1(y\neq0)$

72. 由 43：$|PA|\cdot|PB|=\left|\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}\right|=\left|\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2-c^2\sin^2\theta}\right|$。∵P 在含焦点的一侧 $\therefore b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2>0$

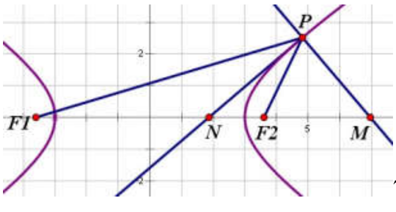
当 $a\geq b$ 时，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 AB 与实轴垂直时，$(PA\cdot PB)_{\min}=\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2}{a^2}$；当 a<b 时，当 $\theta=0$，即 AB 与实轴平行或重合时，$(PA\cdot PB)_{\min}=\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2}$。无论 a 与 b 关系如何，均无最大值。

73.同 7。 74.同 8。 75.由 8 可知，切线长分别为$|F_1T|=a+c$，$|F_2T|=2c-(a+c)=c-a$，同理可证 P 在其他位置情况。

76.如图，由切线长定理 $2F_1S=PF_1+PF_2+F_1F_2$，$PS=F_1S-PF_1$，所以 PS=PQ=c-a.



76 图



77 图

77. 设 $P(a\sec\varphi,b\tan\varphi)$，由 79 中得到的外点坐标和 22 中的焦半径公式：$\frac{x_M+c}{PF_1}=\frac{\frac{c^2\sec\varphi}{a}+c}{a+c\sec\varphi}=e,\frac{x_M-c}{PF_2}=\frac{\frac{c^2\sec\varphi}{a}-c}{c\sec\varphi-a}=e$

78.由 77 和内角平分线定理：$\frac{PI}{IM}=\frac{PF_2}{F_2M}=\frac{1}{e}$。

79. 设 P$\left(a\sec\varphi,b\tan\varphi\right)$，则$\angle F_1PF_2$内角平分线（即切线）$l:\dfrac{\sec\varphi}{a}x-\dfrac{\tan\varphi}{b}y=1$，由此得内点$N\left(\dfrac{a}{\sec\varphi},0\right)$；同理$\angle F_1PF_2$外角平分线（即法线）$l':a\tan\varphi x+b\sec\varphi y-c^2\sec\varphi\tan\varphi=0$，由此得外点$M\left(\dfrac{c^2\sec\varphi}{a},0\right)\therefore x_M\cdot x_N=\dfrac{c^2\sec\varphi}{a}\cdot\dfrac{a}{\sec\varphi}=c^2$

80. 由 79 中得到的内外点坐标可得：$c\left(c-\dfrac{a}{\sec\varphi}\right)=\dfrac{a}{\sec\varphi}\left(\dfrac{c^2\sec\varphi}{a}-c\right)$，即证。

81.由 79 中得到的内外点坐标可得：$\dfrac{c^2\sec\varphi}{a}\left(c-\dfrac{a}{\sec\varphi}\right)=c\left(\dfrac{c^2\sec\varphi}{a}-c\right)$，即证。

82.同 5。　　83.同 5。　　84.由 5,7 即证。

85. 设 P$\left(a\sec\varphi,b\tan\varphi\right)$，则$\angle F_1PF_2$内角平分线（即切线）$l:\dfrac{\sec\varphi}{a}x-\dfrac{\tan\varphi}{b}y=1$，$\tan\beta=\dfrac{\dfrac{1}{a\cos\varphi}}{\dfrac{\sin\varphi}{b\cos\varphi}}=\dfrac{b}{a\sin\varphi}$

由 50 得：$\cot\alpha=\dfrac{bc\tan\varphi}{b^2}=\dfrac{c\tan\varphi}{b}$，$\tan\alpha=\dfrac{b}{c\tan\varphi}$则

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}=\frac{\dfrac{1}{\tan^2\alpha+1}}{\dfrac{1}{\tan^2\beta+1}}=\frac{\tan^2\beta+1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\dfrac{b^2}{a^2\sin^2\varphi}+1}{\dfrac{b^2}{c^2\tan^2\varphi}+1}=\frac{\dfrac{b^2c^2\tan^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi}+c^2\tan^2\varphi}{b^2+c^2\tan^2\varphi}=\frac{b^2e^2\tan^2\varphi+b^2e^2+a^2e^2\tan^2\varphi}{b^2+c^2\tan^2\varphi}$$

$$=\frac{b^2e^2+c^2e^2\tan^2\varphi}{b^2+c^2\tan^2\varphi}=e^2\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=e$$

86. 由 4 即证。　　87.同 4。

88. 由 71：$y_C=\dfrac{b}{\tan\varphi}\left(-1-\sec\varphi\right),y_D=\dfrac{b}{\tan\varphi}\left(\sec\varphi-1\right)$，$F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right)$

$\therefore\overrightarrow{F_1C}\cdot\overrightarrow{F_1D}=\left(a+c\right)\left(c-a\right)-\dfrac{b^2\left(\sec^2\varphi-1\right)}{\tan^2\varphi}=0$　同理：$\therefore\overrightarrow{CF_2}\cdot\overrightarrow{DF_2}=\left(a+c\right)\left(c-a\right)-\dfrac{b^2\left(\sec^2\varphi-1\right)}{\tan^2\varphi}=0$

$\therefore CF_1\perp F_1D,CF_2\perp F_2D$，即两焦点在以两交点为直径的圆上。

89. 设 P$\left(a\sec\varphi,b\tan\varphi\right)$，则$l_1:y-b\tan\varphi=\dfrac{b}{a}\left(x-a\sec\varphi\right)\Rightarrow y=\dfrac{b}{a}x+b\left(\tan\varphi-\sec\varphi\right)$

同理$l_2:y=-\dfrac{b}{a}x+b\left(\tan\varphi+\sec\varphi\right)$　　$\therefore\left|OM\right|\cdot\left|ON\right|=\left|\dfrac{b\left(\sec\varphi-\tan\varphi\right)}{\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{b\left(\sec\varphi+\tan\varphi\right)}{\dfrac{b}{a}}\right|=a^2$

同理$\left|OQ\right|\cdot\left|OR\right|=\left|b\left(\sec\varphi-\tan\varphi\right)\cdot b\left(\sec\varphi+\tan\varphi\right)\right|=b^2$

90. 设 P$\left(x_0,y_0\right)$，则$l_1:y=\dfrac{b}{a}x+y_0-\dfrac{b}{a}x_0,l_2:y=-\dfrac{b}{a}x+y_0+\dfrac{b}{a}x_0\ \therefore\left|OM\right|=\left|\dfrac{bx_0-ay_0}{b}\right|,\left|ON\right|=\left|\dfrac{bx_0+ay_0}{b}\right|$

$\therefore |OM|\cdot|ON|=\left|\frac{bx_0-ay_0}{b}\cdot\frac{bx_0+ay_0}{b}\right|=\left|\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2}{b^2}\right|=a^2$ 同理：$|OQ|=\left|\frac{b}{a}x_0-y_0\right|,|OR|=\left|\frac{b}{a}x_0+y_0\right|$

$\therefore |OQ|\cdot|OR|=\left|\frac{bx_0-ay_0}{a}\cdot\frac{bx_0+ay_0}{a}\right|=\left|\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2}{a^2}\right|=b^2$ 均推出 P 点的轨迹方程为$\left|\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right|=1$。

91. 设$P\left(a\sec\varphi,b\tan\varphi\right)$，则$Q\left(-a\tan\varphi,b\tan\varphi\right),R\left(a\sec\varphi,-b\sec\varphi\right)$ $\therefore\left|S_1-S_2\right|=\frac{ab}{2}\left(\sec^2\varphi-\tan^2\varphi\right)=\frac{ab}{2}$

92. 设 P$\left(x_0,y_0\right)$，则$x_Q=-\frac{a}{b}y_0,y_R=-\frac{b}{a}x_0$ $\therefore\left|S_1-S_2\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{ay_0^2}{b}-\frac{bx_0^2}{a}\right|=\frac{ab}{2}$ 由此得 P 点的轨迹方程为$\left|\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right|=1$，即：

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$或$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$。