高中数学抛物线椭圆双曲线二级结论

抛物线性质 30 条

已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，AB 是抛物线的焦点弦，点 C 是 AB 的中点. AA’垂直准线于 A’， BB’垂直准线于 B’， CC’垂直准线于 C’，CC’交抛物线于点 M，准线交 x 轴于点 K. 求证：

1. $|AF|=x_1+\frac{p}{2},|BF|=x_2+\frac{p}{2}$,

2. $|CC'|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)$；

3. 以 AB 为直径的圆与准线 L 相切；

证明：CC’是梯形 AA’BB’的中位线，

$|AB|=|AF|+|BF|=|AA'|+|BB'|=2|CC'|=2r$

4. $\angle AC'B=90^\circ$；（由 1 可证）

5. $\angle A'FB'=90^\circ$；

证明：$\because AA' \parallel FK, \therefore \angle A'FK=\angle FA'A$,

$\because |AF|=|AA'|, \therefore \angle AA'F=\angle AFA'$,

$\therefore \angle A'FK=\frac{1}{2}\angle AFK$,

同理：$\angle B'FK=\frac{1}{2}\angle BFK$, 得证.

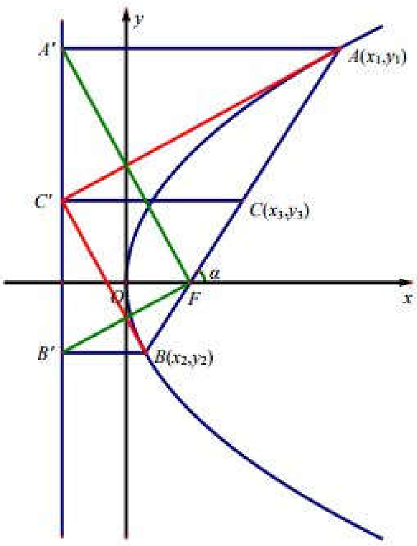
6. $|C'F|=\frac{1}{2}|A'B'|$.

证明：由 $\angle A'FB'=90^\circ$ 得证.

7. AC' 垂直平分 $A'F$；BC' 垂直平分 $B'F$；

证明：由 $|C'F|=\frac{1}{2}|A'B'|$ 可知，$|C'F|=\frac{1}{2}|A'B'|=|C'A'|$,

又 $\because |AF|=|AA'|, \therefore$ 得证. 同理可证另一个.



1.抛物线二级结论 30 条

8. AC'平分$\angle A'AF$，BC'平分$\angle B'BF$，A' F平分$\angle AFK$，B' F平分$\angle BFK$.

证明：由AC'垂直平分$A'F$可证.

9. $C'F\perp AB$；

证明：$\overline{C'F}\cdot\overline{AB}=(p,-\frac{y_1+y_2}{2})\cdot(x_2-x_1,y_2-y_1)$

$=p(x_2-x_1)+\frac{y_1^2-y_2^2}{2}=\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{2}=0$

10. $|AF|=\frac{P}{1-\cos\alpha}$；$|BF|=\frac{P}{1+\cos\alpha}$；

证明：作AH垂直x轴于点H，则$|AF|=|AA'|=|KF|+|FH|=p+|AF|\cos\alpha,\therefore|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$.

同理可证另一个.

11. $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{P}$；

证明：由$|AF|=\frac{P}{1-\cos\alpha}$；$|BF|=\frac{P}{1+\cos\alpha}$；得证.

12. 点A处的切线为$y_1y=p(x+x_1)$；

证明：（方法一）设点A处切线方程为$y-y_1=k(x-x_1)$，与$y^2=2px$联立，得

$ky^2-2py+2p(y_1-kx_1)=0$, 由$\Delta=0\Rightarrow 2x_1k^2-2y_1k+p=0$,

解这个关于k的一元二次方程（它的差别式也恰为0）得：$k=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{p}{y_1}$,得证.

证法二：（求导）$y^2=2px$两边对x求导得$2yy'=2p$，$y'=\frac{p}{y}$，$\therefore y'|_{x=x_1}=\frac{p}{y_1}$,得证.

13. AC' 是切线，切点为A；BC' 是切线，切点为B；

证明：易求得点A处的切线为$y_1y=p(x+x_1)$，点B处的切线为$y_2y=p(x+x_2)$，解得两切线的交

点为$C'(-\frac{p}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$,得证.

14. 过抛物线准线上任一点P作抛物线的切线，则过两切点Q_1、Q_2的弦必过焦点;并且$PQ_1\perp PQ_2$

证明：设点$P(-\frac{p}{2},t)(t\in R)$为准线上任一点，过点P作抛物线的切线，切点为$Q(\frac{y^2}{2p},y)$,

$y^2=2px$两边对x求导得$2yy'=2p$，$y'=\frac{p}{y}$，$\therefore\frac{p}{y}=K_{PQ}=\frac{y-t}{\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}}$,$\therefore y^2-2ty-p^2=0$,

显然$\Delta=4t^2+4p^2>0$,切点有两个，设为$Q_1(\frac{y_1^2}{2p},y_1),Q_2(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$,则$y_1+y_2=2t,y_1y_2=-p^2$,

$\therefore k_{FQ_1}-k_{FQ_2}=\dfrac{y_1}{\dfrac{y_1^2}{2p}-\dfrac{p}{2}}-\dfrac{y_2}{\dfrac{y_2^2}{2p}-\dfrac{p}{2}}=\dfrac{2py_1}{y_1^2-p^2}-\dfrac{2py_2}{y_2^2-p^2}$

$=\dfrac{2py_1}{y_1^2+y_1y_2}-\dfrac{2py_2}{y_2^2+y_1y_2}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}-\dfrac{2p}{y_1+y_2}=0$，所以 Q_1Q_2 过焦点.

$\overline{PQ_1}\cdot\overline{PQ_2}=(\dfrac{y_1^2}{2p}+\dfrac{p}{2},y_1-t)\cdot(\dfrac{y_2^2}{2p}+\dfrac{p}{2},y_2-t)=\dfrac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+\dfrac{y_1^2+y_2^2}{4}+\dfrac{p^2}{4}+y_1y_2-t(y_1+y_2)+t^2$

$=-\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{y_1^2+y_2^2}{4}-t^2=-\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{4}-t^2=-\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{4t^2+2p^2}{4}-t^2=0,$

$\therefore PQ_1\perp PQ_2.$

15. A、O、B′三点共线；B、O、A′三点共线；

证明：A、O、B′三点共线 $\Leftarrow k_{OA}=k_{OB'}\Leftarrow x_1y_2=-\dfrac{p}{2}y_1\Leftarrow\dfrac{y_1^2}{2p}y_2=-\dfrac{p}{2}y_1\Leftarrow y_1y_2=-p^2.$

同理可证：B、O、A′三点共线.

16. $y_1\cdot y_2=-p^2$；$x_1\cdot x_2=\dfrac{p^2}{4}$

证明：设 AB 的方程为 $y=k(x-\dfrac{p}{2})$，与 $y^2=2px$ 联立，得 $ky^2-2py-kp^2=0,$

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2p}{k}$，$y_1y_2=-p^2$，　$\therefore x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=\dfrac{p^4}{4p^2}=\dfrac{p^2}{4}.$

17. $|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$

证明：$|AB|=|AF|+|FB|=x_1+\dfrac{p}{2}+x_2+\dfrac{p}{2}=x_1+x_2+p,$

$|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\sqrt{(\dfrac{2p}{k})^2+4p^2}=2p\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}$

$=2p\sqrt{1+\cot^2\alpha}=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.得证.

18. $S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$；

证明：$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta OFA}+S_{\Delta OFB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{p}{4}\sqrt{(\dfrac{2p}{k})^2+4p^2}$

$=\dfrac{p^2}{2}\sqrt{(\dfrac{1}{k})^2+1}=\dfrac{p^2}{2}\sqrt{1+\cot^2\alpha}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}.$

19. $\dfrac{S^2_{\Delta AOB}}{|AB|}=\left(\dfrac{p}{2}\right)^3$（定值）；　　证明：由 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$、$S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$ 得证.

20. $S_{\Delta ABC'}=\dfrac{p^2}{\sin^2\alpha}$

证明：$S_{\Delta ABC'}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|PF|=\dfrac{1}{2}\cdot 2p\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{p^2-(\dfrac{y_1+y_2}{2})^2}$

证明：$S_{\Delta ABC'}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|PF|=\frac{1}{2}\cdot 2p\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{p^2-(\frac{y_1+y_2}{2})^2}$

$=p\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{p^2+(\frac{p}{k})^2}=p^2(1+\frac{1}{k^2})=\frac{p^2}{\sin^2\alpha}$

21. $|AB|\geq 2p$；　　证明：由$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$得证.

22. $k_{AB}=\frac{2p}{y_1+y_2}$；　　证明：由点差法得证.

23. $\tan\alpha=\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}=\frac{y_2}{x_2-\frac{p}{2}}$；

证明：作 AA_2 垂直 x 轴于点 A_2，在ΔAA_2F中，$\tan\alpha=\frac{AA_2}{FA_2}=\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}$，同理可证另一个.

24. $|A'B'|^2=4|AF|\cdot|BF|$；

证明：$|A'B'|^2=4|AF|\cdot|BF|\Leftrightarrow|y_1-y_2|^2=4(x_1+\frac{p}{2})(x_2+\frac{p}{2})$

$\Leftrightarrow y_1^2+y_2^2-2y_1y_2=4x_1x_2+2px_1+2px_2+p^2\Leftrightarrow -2y_1y_2=4x_1x_2+p^2$，

由$y_1\cdot y_2=-p^2$，$x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$得证.

25. 设 CC’交抛物线于点 M，则点 M 是 CC’的中点；

证明：$C(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}),C'(-\frac{p}{2},\frac{y_1+y_2}{2}),\therefore CC'$中点横坐标为$\frac{x_1+x_2-p}{4}$，

把$y=\frac{y_1+y_2}{2}$代入$y^2=2px$，得

$\frac{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}{4}=2px,\quad\therefore\frac{2px_1+2px_2-2p^2}{4}=2px,\quad x=\frac{x_1+x_2-p}{4}.$

所以点 M 的横坐标为$x=\frac{x_1+x_2-p}{4}$.点 M 是 CC’的中点.

当弦 AB 不过焦点时，设 AB 交 x 轴于点 $D(m,0)$ $(m>0)$，设分别以 A、B 为切点的切线相交于点 P，求证：

当弦 AB 不过焦点时，设 AB 交 x 轴于点 $D(m,0)$ $(m>0)$，设分别以 A、B 为切点的切线相交于点 P，求证：

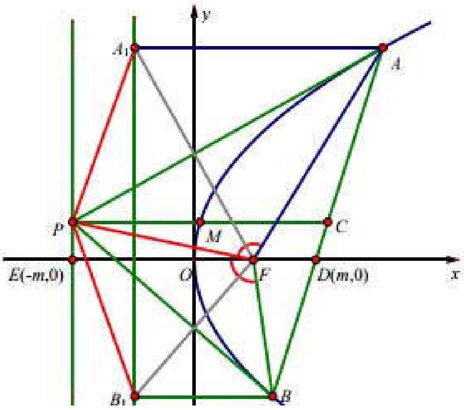
26. 点 P 在直线 $x=-m$ 上

证明：设 $AB: x=ty+m$，与 $y^2=2px$ 联立，得

$y^2-2pty-2pm=0,\quad \therefore y_1+y_2=2pt, y_1y_2=-2pm$，

又由 $\begin{cases}PA: y_1y=p(x+x_1)\\ PB: y_2y=p(x+x_2)\end{cases}$，相减得 $(y_1-y_2)y=\dfrac{y_1^2}{2}-\dfrac{y_2^2}{2}, \therefore y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，

代入 $y_1y=p(x+x_1)$ 得，$\dfrac{y_1^2+y_1y_2}{2}=px+\dfrac{y_1^2}{2}$，$\therefore y_1y_2=2px, \therefore x=-m$，得证.



27. 设 PC 交抛物线于点 M，则点 M 是 PC 的中点；

证明：$C(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}), P(-m,\dfrac{y_1+y_2}{2}), \therefore PC$中点横坐标为$\dfrac{x_1+x_2-2m}{4}$，

把 $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 代入 $y^2=2px$，得

$\dfrac{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}{4}=2px,\quad \because y_1y_2=-2pm, \therefore \dfrac{2px_1+2px_2-4pm}{4}=2px,\quad x=\dfrac{x_1+x_2-2m}{4}$.

所以点 M 的横坐标为 $x=\dfrac{x_1+x_2-2m}{4}$. 点 M 是 PC 的中点.

28.设点 A、B 在准线上的射影分别是 A_1，B_1，则 PA 垂直平分 A_1F， PB 垂直平分 B_1F，从而 PA 平分 $\angle A_1AF$，PB 平分 $\angle B_1BF$

证明：$k_{PA}\cdot k_{A_1F}=\dfrac{p}{y_1}\cdot\dfrac{0-y_1}{\dfrac{p}{2}-(-\dfrac{p}{2})}=\dfrac{p}{y_1}\cdot(-\dfrac{y_1}{p})=-1, \therefore PA\perp A_1F$，

又 $|AF|=|AA_1|$，所以 PA 垂直平分 A_1F. 同理可证另一个.

证法二：$k_{AF}=\dfrac{y_1}{\dfrac{y_1^2}{2p}-\dfrac{p}{2}}=\dfrac{2py_1}{y_1^2-p^2}, k_{AP}=\dfrac{p}{y_1}, k_{AA_1}=0$，

$\therefore \tan\angle FAP-\tan\angle PAA_1=\dfrac{k_{AF}-k_{AP}}{1+k_{AF}\cdot k_{AP}}-\dfrac{k_{AP}-k_{AA_1}}{1+k_{AP}\cdot k_{AA_1}}$

$$\therefore \tan\angle FAP-\tan\angle PAA_1=\frac{k_{AF}-k_{AP}}{1+k_{AF}\cdot k_{AP}}-\frac{k_{AP}-k_{AA_1}}{1+k_{AP}\cdot k_{AA_1}}$$

$$=\frac{\frac{2py_1}{y_1^2-p^2}-\frac{p}{y_1}}{1+\frac{2py_1}{y_1^2-p^2}\cdot\frac{p}{y_1}}-\frac{\frac{p}{y_1}-0}{1+\frac{p}{y_1}\cdot 0}=\frac{2py_1-\frac{p}{y_1}(y_1^2-p^2)}{y_1^2-p^2+2p^2}-\frac{p}{y_1}=\frac{py_1^2+p^3}{y_1(y_1^2+p^2)}-\frac{p}{y_1}=\frac{p}{y_1}-\frac{p}{y_1}=0$$

$\therefore \tan\angle FAP=\tan\angle PAA_1$， $\therefore \angle FAP=\angle PAA_1$. 同理可证另一个

29. $\angle PFA=\angle PFB$

证明：$\Delta PAA_1\cong\Delta PAF\Rightarrow\angle PFA=\angle PA_1A$,同理：$\angle PFB=\angle PB_1B$,$\therefore$只需证$\angle PA_1A=\angle PB_1B$,

易证：$|PA_1|=|PF|=|PB_1|$,$\therefore\angle PA_1B_1=\angle PB_1A_1$,$\therefore\angle PA_1A=\angle PB_1B$,

30. $|\overrightarrow{FA}|\cdot|\overrightarrow{FB}|=|\overrightarrow{PF}|^2$

证明：$|AF|\cdot|BF|=(x_1+\frac{p}{2})(x_2+\frac{p}{2})=x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4}=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{4}+\frac{p^2}{4}$,

$\because P(\frac{y_1y_2}{2p},\frac{y_1+y_2}{2})$, $\therefore |PF|^2=\left(\frac{y_1y_2}{2p}-\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{4}+\frac{p^2}{4}$，得证.