立体几何常用二级结论及解题方法梳理

1. 从一点O出发的三条射线OA、OB、OC. 若$\angle AOB=\angle AOC$, 则点A在平面BOC上的射影在 $\angle BOC$的平分线上;

2. 立平斜三角余弦公式:(图略)AB和平面所成的角是θ_1, AC在平面内, AC和AB的射影AB_1成θ_2, 设$\angle BAC=\theta_3$, 则$\cos\theta_1\cos\theta_2=\cos\theta_3$;

3. 异面直线所成角的求法:⑴平移法:在异面直线中的一条直线中选择一特殊点, 作另一条的平行线.

⑵补形法:把空间图形补成熟悉的或完整的几何体, 如正方体、平行六面体、长方体等, 其目的在于容易发现两条异面直线间的关系;

4. 直线与平面所成角:过斜线上某个特殊点作出平面的垂线段, 是产生线面角的关键.

5. 二面角的求法:⑴定义法;⑵三垂线法;⑶垂面法;⑷射影法:利用面积射影公式$S_{射}=S_{斜}\cos\theta$, 其中θ为平面角的大小, 此方法不必在图形中画出平面角;

6. 空间距离的求法:⑴两异面直线间的距离, 高考要求是给出公垂线, 所以一般先利用垂直作出公垂 线, 然后再进行计算. ⑵求点到直线的距离, 一般用三垂线定理作出垂线再求解.

⑶求点到平面的距离, 一是用垂面法, 借助面面垂直的性质来作. 因此, 确定已知面的垂面是关键;二是不作出公垂线, 转化为求三棱锥的高, 利用等体积法列方程求解.

7. 用向量方法求空间角和距离:

⑴**求异面直线所成的角**:设$\vec{a}$、$\vec{b}$分别为异面直线a、b的方向向量,

则两异面直线所成的角$\alpha=\arccos\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. ⑵**求线面角**:设$\vec{l}$是斜线$l$的方向向量, $\vec{n}$是平面α的 法向量, 则斜线l与平面α所成的角$\alpha=\arcsin\dfrac{|\vec{l}\cdot\vec{n}|}{|\vec{l}|\cdot|\vec{n}|}$. ⑶**求二面角**(法一)在$\alpha$内$\vec{a}\perp l$, 在$\beta$内 $\vec{b}\perp l$, 其方向如图(略), 则二面角$\alpha-l-\beta$的平面角$\alpha=\arccos\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. (法二)设$\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$是二面角

$\alpha-l-\beta$的两个半平面的法向量, 其方向一个指向内侧, 另一个指向外侧, 则二面角$\alpha-l-\beta$的平面 角$\alpha=\arccos\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$. **(4)求点面距离**:设$\vec{n}$是平面$\alpha$的法向量, 在$\alpha$内取一点$B$, 则$A$到$\alpha$的距离 $d=|\overrightarrow{AB}||\cos\theta|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$(即$\overrightarrow{AB}$在$\vec{n}$方向上投影的绝对值).

8. 正棱锥的各侧面与底面所成的角相等, 记为θ, 则$S_{侧}\cos\theta=S_{底}$.

面积射影定理:$S=\dfrac{S'}{\cos\theta}$(平面多边形及其射影的面积分别是S、S', 它们所在平面所成锐二面角的为θ).

9. 正四面体(设棱长为a)的性质:

①全面积$S=\sqrt{3}a^2$;②体积$V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$;③对棱间的距离$d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$;④相邻面所成二面角$\alpha=\arccos\dfrac{1}{3}$;

⑤外接球半径$R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$;⑥内切球半径$r=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$;⑦正四面体内任一点到各面距离之和为定

值 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

10. 直角四面体的性质：（直角四面体—三条侧棱两两垂直的四面体）. 在直角四面体 $O-ABC$ 中，OA,OB,OC 两两垂直，令 $OA=a,OB=b,OC=c$，则⑴底面三角形 ABC 为锐角三角形；⑵直角顶点 O 在底面的射影 H 为三角形 ABC 的垂心；⑶ $S_{\Delta BOC}^2=S_{\Delta BHC}\cdot S_{\Delta ABC}$；⑷ $S_{\Delta AOB}^2+S_{\Delta BOC}^2+S_{\Delta COA}^2=S_{\Delta ABC}^2$；⑸ $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$；⑹ 外接球半径 R= $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

11. 已知长方体的体对角线与过同一顶点的三条棱所成的角分别为 α,β,γ 因此有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 或 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$；若长方体的体对角线与过同一顶点的三侧面所成的角分别为 α,β,γ，则有 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ 或 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

12. 正方体和长方体的外接球的直径等与其体对角线长；

13. 球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，表面积公式 $S=4\pi R^2$；掌握球面上两点 A、B 间的距离求法：⑴计算线段 AB 的长；⑵计算球心角 $\angle AOB$ 的弧度数；⑶用弧长公式计算劣弧 AB 的长.

14. 立体几何常切接问题模型

类型一、三垂直模型（三条线两个垂直，不找球心的位置即可求出球半径）

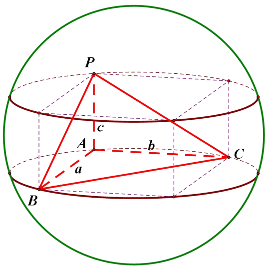


图1

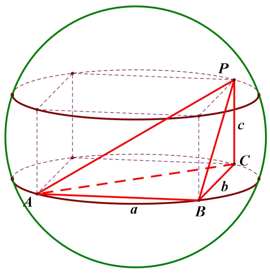


图2

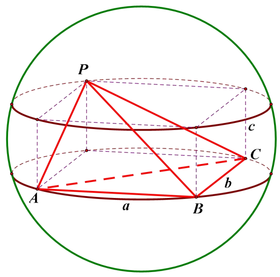


图3

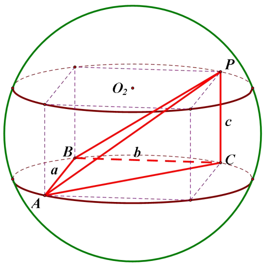


图4

方法：找三条两两垂直的线段，直接用公式 $(2R)^2=a^2+b^2+c^2$，即 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，求出 R

类型二、垂面模型（一条直线垂直于一个平面）

1．题设：如图 5，$PA\perp$ 平面 ABC

解题步骤：

第一步：将 ΔABC 画在小圆面上，A 为小圆直径的一个端点，作小圆的直径 AD，连接 PD，则 PD 必过球心 O；

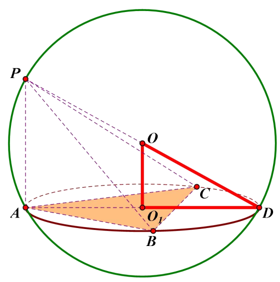


图5

第二步：O_1为ΔABC的外心，所以$OO_1\perp$平面ABC，算出小圆O_1的半径$O_1D=r$（三角形的外接圆直径算法：利用正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r$），$OO_1=\frac{1}{2}PA$；

第三步：利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：①$(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$；

②$R^2=r^2+OO_1^2\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1^2}$

2．题设：如图6，7，8，P的射影是ΔABC的外心$\Leftrightarrow$三棱锥$P-ABC$的三条侧棱相等$\Leftrightarrow$三棱锥$P-ABC$的底面ΔABC在圆锥的底上，顶点P点也是圆锥的顶点

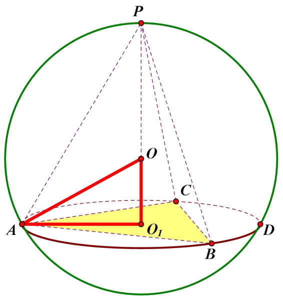


图6

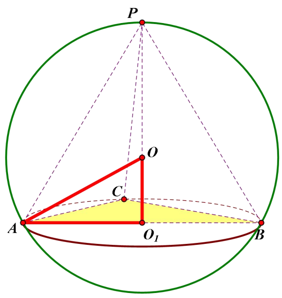


图7-1

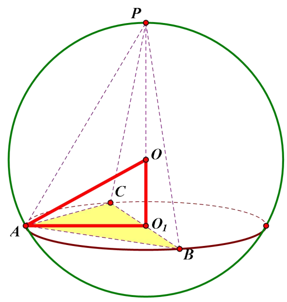


图7-2

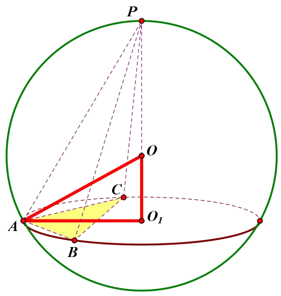


图8

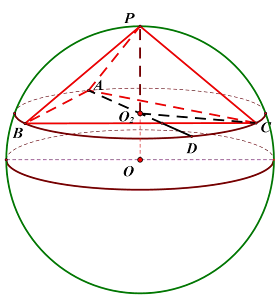


图8-1

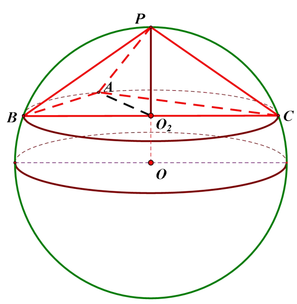


图8-2

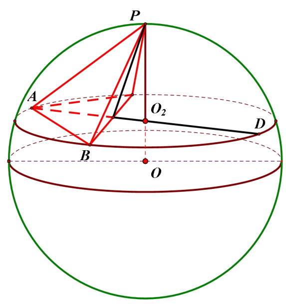


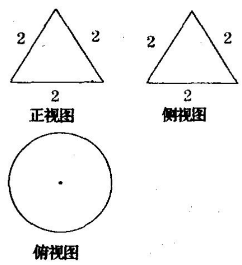
图8-3

解题步骤：

第一步：确定球心O的位置，取ΔABC的外心O_1，则P,O,O_1三点共线；

第二步：先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$，再算出棱锥的高 $PO_1=h$（也是圆锥的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=(h-R)^2+r^2$，解出 R



类型三、两平面垂直模型

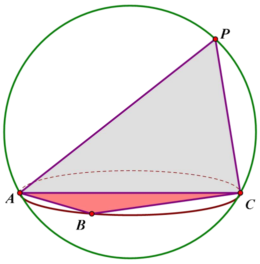


图9-1

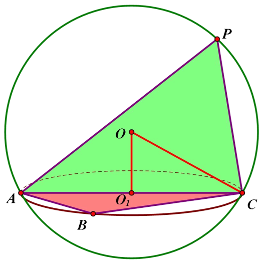


图9-2

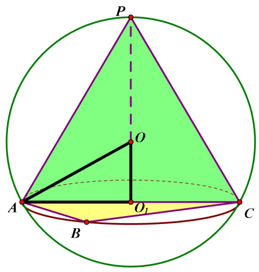


图9-3

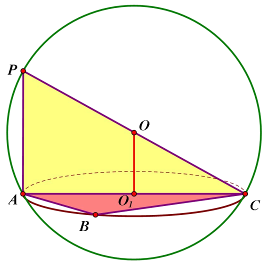


图9-4

1．题设：如图 9-1，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp BC$（即 AC 为小圆的直径）

第一步：易知球心 O 必是 ΔPAC 的外心，即 ΔPAC 的外接圆是大圆，先求出小圆的直径 $AC=2r$；

第二步：在 ΔPAC 中，可根据正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，求出 R

2．如图 9-2，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp BC$（即 AC 为小圆的直径）

$$OC^2=O_1C^2+O_1O^2\Leftrightarrow R^2=r^2+O_1O^2\Leftrightarrow AC=2\sqrt{R^2-O_1O^2}$$

15..判定线线平行的方法

(1)利用定义：证明线线共面且无公共点.

(2)利用平行公理：证明两条直线同时平行于第三条直线.

(3)利用线面平行的性质定理：

$a/\!/\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a/\!/b$.

(4)利用面面平行的性质定理：

$\alpha/\!/\beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a/\!/b$.

(5)利用线面垂直的性质定理：

$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha\Rightarrow a/\!/b$.

16.判定线面平行的方法

(1)利用定义：证明直线 a 与平面 α 没有公共点，往往借助反证法.

(2)利用直线和平面平行的判定定理：

$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a/\!/b\Rightarrow a/\!/\alpha$.

(3)利用面面平行的性质的推广：

$\alpha/\!/\beta$，$a\subset\beta\Rightarrow a/\!/\alpha$.

17.判定面面平行的方法

(1)利用面面平行的定义：两个平面没有公共点.

(2)利用面面平行的判定定理：

$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\cap b=A$，$a/\!/\beta$，$b/\!/\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

(3)垂直于同一条直线的两个平面平行，

即 $a\perp\alpha$，$a\perp\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

(4)平行于同一个平面的两个平面平行，

即 $\alpha/\!/\gamma$，$\beta/\!/\gamma\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

18.证明直线与平面垂直的方法

(1)利用线面垂直的定义：若一条直线垂直于一个平面内的任意一条直线，则这条直线垂直于这个平面.符号表示：$\forall a\subset\alpha$，$l\perp a\Leftrightarrow l\perp\alpha$.(其中“$\forall$”表示“任意的”)($a\perp b$，$a\perp c$，$b\subset\alpha$，$c\subset\alpha$，$b\cap c=M\Rightarrow a\perp\alpha$).

(2)利用线面垂直的判定定理：若一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直.

符号表示：$l\perp m$，$l\perp n$，$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\cap n=P\Rightarrow l\perp\alpha$.

(3)若两条平行直线中的一条垂直于一个平面，则另一条也垂直于这个平面.

符号表示：$a/\!/b$，$a\perp\alpha\Rightarrow b\perp\alpha$.

(4)利用面面垂直的性质定理：若两平面垂直，则在一个平面内垂直于交线的直线必垂直于另一个平面.

符号表示：$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$m\perp l\Rightarrow m\perp\beta$.

（5）平行线垂直平面的传递性质($a/\!/b$，$b\perp\alpha\Rightarrow a\perp\alpha$).

（6）面面平行的性质($a\perp\alpha$，$\alpha/\!/\beta\Rightarrow a\perp\beta$).

（7）面面垂直的性质($\alpha\cap\beta=l$，$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma\Rightarrow l\perp\gamma$).

19.证明平面与平面垂直的方法

(1)利用平面与平面垂直的定义：若两个平面相交，所成的二面角是直二面角，则这两个平面互相垂直.

符号表示：$\alpha\cap\beta=l$，$O\in l$，$OA\subset\alpha$，$OB\subset\beta$，$OA\perp l$，$OB\perp l$，$\angle AOB=90^\circ\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

(2)利用平面与平面垂直的判定定理：若一个平面通过另一个平面的垂线，则这两个平面互相垂直.符号表示：$l\perp\alpha$，$l\subset\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

20．空间向量的坐标表示及运算

(1)数量积的坐标运算

设 $a=(a_1，a_2，a_3)$，$b=(b_1，b_2，b_3)$，

则①$a\pm b=(a_1\pm b_1，a_2\pm b_2，a_3\pm b_3)$；

②$\lambda a=(\lambda a_1，\lambda a_2，\lambda a_3)$；

③$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

(2)共线与垂直的坐标表示

设 $a=(a_1，a_2，a_3)$，$b=(b_1，b_2，b_3)$，

则 $a\parallel b\Leftrightarrow a=\lambda b\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1，a_2=\lambda b_2，a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)$，

$a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$($a$，$b$ 均为非零向量).

(3)模、夹角和距离公式

设 $a=(a_1，a_2，a_3)$，$b=(b_1，b_2，b_3)$，

则 $|a|=\sqrt{a\cdot a}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，

$\cos\langle a，b\rangle=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

设 $A(a_1，b_1，c_1)$，$B(a_2，b_2，c_2)$，

则 $d_{AB}=|\overrightarrow{AB}|=$**错误!**.

21．立体几何中的向量方法

(1)直线的方向向量与平面的法向量的确定

①直线的方向向量：l 是空间一直线，A，B 是直线 l 上任意两点，则称$\overrightarrow{AB}$为直线 l 的方向向量，与$\overrightarrow{AB}$平行的任意非零向量也是直线 l 的方向向量.

②平面的法向量可利用方程组求出：设 a，b 是平面 α 内两不共线向量，n 为平面 α 的法向量，则求法向量的方程组为$\begin{cases}n\cdot a=0,\\ n\cdot b=0.\end{cases}$

(2)用向量证明空间中的平行关系

①设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 v_1 和 v_2，则 $l_1\parallel l_2$(或 l_1 与 l_2 重合)$\Leftrightarrow v_1\parallel v_2$.

②设直线 l 的方向向量为 v，与平面 α 共面的两个不共线向量 v_1 和 v_2，则 $l\parallel\alpha$ 或 $l\subset\alpha\Leftrightarrow$存在两个实数 x，y，使 $v=xv_1+yv_2$.

③设直线 l 的方向向量为 v，平面 α 的法向量为 u，则 $l\parallel\alpha$ 或 $l\subset\alpha\Leftrightarrow v\perp u$.

④设平面 α 和 β 的法向量分别为 u_1，u_2，则 $\alpha\parallel\beta\Leftrightarrow u_1\parallel u_2$.

(3)用向量证明空间中的垂直关系

①设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 v_1 和 v_2，则 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow v_1\perp v_2\Leftrightarrow v_1\cdot v_2=0$.

②设直线 l 的方向向量为 v，平面 α 的法向量为 u，则 $l\perp\alpha\Leftrightarrow v\parallel u$.

③设平面α和β的法向量分别为u1和u2，则α⊥β⇔u1⊥u2⇔u1·u2=0.

(4)点面距的求法

如图,设AB为平面α的一条斜线段,n为平面α的法向量,则B到平面α的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot n|}{|n|}$.

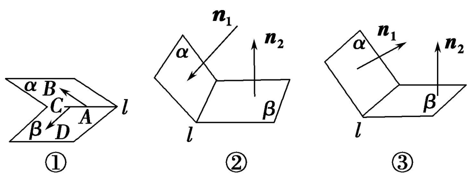
22.空间向量与空间角的关系

(1)设异面直线l1，l2的方向向量分别为m1，m2，则l1与l2的夹角θ满足cos θ=|cos〈m1，m2〉|.

(2)设直线l的方向向量和平面α的法向量分别为m,n,则直线l与平面α的夹角θ满足sin θ=|cos〈m，n〉|.

(3)求二面角的大小

(ⅰ)如图①，AB、CD是二面角α-l-β的两个面内与棱l垂直的直线，则二面角的大小θ=〈$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$〉.



(ⅱ)如图②③，n1，n2分别是二面角α-l-β的两个半平面α，β的法向量，则二面角的大小θ满足cos θ=cos〈n1，n2〉或-cos〈n1，n2〉.