常考二级结论及其应用

纵观中学数学教材，基本上是由题组成的(除了部分概念的介绍)，而高考试题大部分都源于教材.编教材离不开题，授课离不开题，学数学离不开题，考试更离不开题.实际上高考试题大都是通过对教材例题和习题加工、改造、引申、推广而成的，不仅如此，试题的表现方式和语言表达也尽可能与教材保持一致，使考生有一种似曾相识的感觉，所以我们要仔细琢磨，把教材上的题研究到位.结合高考真题，最终我们独创了“题型＋模型”的全新教学法，本篇将把高考试题中经常出现而且教材上有所体现的部分二级结论呈现给大家，部分结论对学生的解题有很好的指导作用，同时对演算结果有精准的验证作用，以便同学们在解答高考题时做到准确、快捷.

结论一

1.子集、交集、并集、补集之间的一个关系式：$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap \complement_I B = \varnothing \Leftrightarrow \complement_I A \cup B = I$，其中 I 为全集.

(1) 当 $A = B$ 时，显然成立；

(2) 当 $A \subsetneqq B$ 时，Venn 图如图 2-1 所示，结论正确.

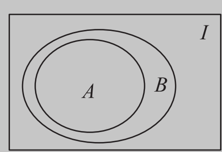


图 2-1

2.子集个数的问题：若一个集合 A 含有 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 个元素，则集合 A 的子集有 2^n 个，非空子集有 $2^n - 1$ 个.真子集有 $2^n - 1$ 个，非空真子集有 $2^n - 2$ 个.

理解：A 的子集有 2^n 个，从每个元素的取舍来理解，例如每个元素都有两种选择，则 n 个元素共有 2^n 种选择.该结论需要掌握并会灵活应用.

例 1 设集合 $A = \left\{(x, y) \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1\right\}$，$B = \{(x, y) \mid y = 3^x\}$，则 $A \cap B$ 的子集的个数是(　　).

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

变式 1 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{x \mid 0 < x < 5, x \in \mathbf{N}\}$，则满足条件 $A \subseteq C \subsetneqq B$ 的集合 C 的个数为(　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

例 2 已知 M, N 为集合 I 的非空子集，且 M, N 不相等，若 $N \cap \complement_I M = \varnothing$，则 $M \cup N =$ (　　).

A. M　　B. N　　C. I　　D. $\varnothing$

变式 1 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 6x + 5 = 0\}$，$B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$，若 $A \cap B = B$，则由实数 a 的所有可能取值组成的集合 C 为(　　).

A. $\left\{1, \frac{1}{5}\right\}$　　B. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$　　C. $\left\{0, 1, \frac{1}{5}\right\}$　　D. $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

结论二

交、并、补(且、或、非)之间的关系(德·摩根定律).

(1) 集合形式:$\complement_I(A\cap B)=(\complement_I A)\cup(\complement_I B)$,$\complement_I(A\cup B)=(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$;

(2) 命题形式:$\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)$,$\neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q)$.

例 3 设全集 $U=\{a,b,c,d\}$,集合 $A=\{a,b\}$,$B=\{b,c,d\}$,则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$________.

变式 1 已知全集 $U=A\cup B$ 中有 m 个元素,$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ 中有 n 个元素.若 $A\cap B$ 非空,则 $A\cap B$ 的元素个数为(　　).

A. mn　　B. $m+n$　　C. $n-m$　　D. $m-n$

变式 2 写出下列命题的否定.

(1) 命题 $p\vee q$:$A=0$ 或 $B=0$;

(2) 命题 $p\wedge q$:$A=0$ 且 $B=0$.

结论三

奇函数的最值性质:已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 D 上的奇函数,则对任意的 $x\in D$,都有 $f(x)+f(-x)=0$.特别地,若奇函数 $f(x)$ 在定义域 D_f 上有最值,则 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=0$,且若 $0\in D_f$,则 $f(0)=0$.

证明:因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $\forall x\in D$,$-x\in D$,且 $f(-x)=-f(x)$,即 $f(x)+f(-x)=0$.

若 $0\in D_f$,令 $x=0$,则有 $f(0)+f(-0)=0$,即 $f(0)=0$.

若奇函数 $f(x)$ 在 D_f 上有最值,设 $f(x)_{\max}=f(x_0)$,则 $f(x_0)\geqslant f(x)(x\in D)$,

所以 $f(-x_0)=-f(x_0)\leqslant -f(x)=f(-x)(-x\in D)$,即 $f(x)_{\min}=f(-x_0)$.

由 $f(x_0)+f(-x_0)=0$,得 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=0$.

例 4 设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-4)+\tan x}{x^2-4}$ 的最大值为 M,最小值为 m,则 $M+m=$________.

变式 1 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+9x^2}-3x\right)+1$,则 $f(\lg 2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=$(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

变式 2 对于函数 $f(x)=a\sin x+bx+c$(其中 $a,b\in\mathbf{R}$,$c\in\mathbf{Z}$),选取 a,b,c 的一组值计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$,所得出的正确结果一定不可能是(　　).

A. 4 和 6　　B. 3 和 1　　C. 2 和 4　　D. 1 和 2

结论四

若函数 $y=f(x)$ 是定义在非空数集 D 上的单调函数，则存在反函数 $y=f^{-1}(x)$.特别地，$y=a^x$ 与 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 互为反函数，两函数图像在同一直角坐标系内关于直线 $y=x$ 对称，即 $(x_0,f(x_0))$ 与 $(f(x_0),x_0)$ 分别在函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像上.

例 5 设点 P 在曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为(　　).

A. $1-\ln 2$　　B. $\sqrt{2}(1-\ln 2)$　　C. $1+\ln 2$　　D. $\sqrt{2}(1+\ln 2)$

变式 1 若 x_1 满足 $2x+2^x=5$，x_2 满足 $2x+2\log_2(x-1)=5$，则 $x_1+x_2=$(　　).

A. $\frac{5}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{7}{2}$　　D. 4

结论五

函数周期性问题：已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$，若对任意的 $x\in \mathbf{R}$，总存在非零常数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，T 为其一个周期.

除周期函数的定义外，还有一些常见的与周期函数有关的结论如下：

(1) 如果 $f(x+a)=-f(x)(a\neq 0)$，那么 $f(x)$ 是周期函数，其中的一个周期 $T=2a$；

(2) 如果 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}(a\neq 0)$，那么 $f(x)$ 是周期函数，其中的一个周期 $T=2a$；

(3) 如果 $f(x+a)+f(x)=c(a\neq 0)$，那么 $f(x)$ 是周期函数，其中的一个周期 $T=2a$；

(4) 如果 $f(x)=f(x+a)+f(x-a)(a\neq 0)$，那么 $f(x)$ 是周期函数，其中的一个周期 $T=6a$.

证明：(1)，(2)，(3) 略.

(4) 若 $f(x)=f(x+a)+f(x-a)$　　①

则 $f(x+a)=f(x+2a)+f(x)$　　②

①+② 得，$f(x)+f(x+a)=f(x+a)+f(x-a)+f(x+2a)+f(x)$，

即 $f(x-a)+f(x+2a)=0$，$f(x+2a)=-f(x-a)$，所以 $f(x+6a)=f[(x+4a)+2a]=-f[(x+4a)-a]=-f(x+3a)=-f[(x+a)+2a]=f[(x+a)-a]=f(x)$.

故 $f(x)$ 是周期函数，其中的一个周期 $T=6a$.

例 6 已知函数 $f(x)$ 满足：$f(5)=\frac{1}{4}$，$4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)(x,y\in\mathbf{R})$，则 $f(2015)=$________.

变式 1 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x)(x\leqslant 0)\\ f(x-1)-f(x-2)(x>0)\end{cases}$，则 $f(2017)=$(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

变式 2 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=-f(x)$，且 $f(-2)=f(-1)=-1$，$f(0)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2016)+f(2017)=$(　　).

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

结论六

复合函数单调性：已知函数 $y=f[g(x)]$ 是定义在 D 上的函数，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的单调性相同，则 $y=f[g(x)]$ 在 D 上是增函数；若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的单调性相反，则 $y=f[g(x)]$ 在 D 上是减函数，即“同增异减”.特别地，若 $f(x)$ 是定义域 D 上的单调函数，且方程 $f[f(x)]=x$ 在 D 上有解为 x_0，则 $f(x_0)=x_0$.

例 7 对于定义域为 $[0,1]$ 的连续函数 $f(x)$，如果同时满足以下 3 个条件：

(1) 对任意的 $x\in[0,1]$ 总有 $f(x)\geqslant 0$；

(2) $f(1)=1$；

(3) 若 $x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_1+x_2\leqslant 1$，都有 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$ 成立.则称函数 $f(x)$ 为理想函数.若函数 $f(x)$ 为理想函数，假定存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)\in[0,1]$，且 $f[f(x_0)]=x_0$.求证：$f(x_0)=x_0$.

变式 1 设函数 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$（$a\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数）.若曲线 $y=\sin x$ 上存在点 (x_0,y_0) 使得 $f(f(y_0))=y_0$，则 a 的取值范围是（　　）.

A. $[1,e]$　　B. $[e^{-1},1]$　　C. $[1,1+e]$　　D. $[e^{-1},e+1]$

变式 2 若函数 $y=\log_a(x^2-ax+1)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）在 $(1,2)$ 上为增函数，则实数 a 的取值范围是________.

结论七

二次函数解析式的三种表达式.

$$\text{二次函数 } f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c\text{（一般式）} \\ a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}\text{（顶点式）} \\ a(x-x_1)(x-x_2)\text{（双根式）}\end{cases}(a\neq 0,x\in\mathbf{R}).$$

二次函数的性质.

(1) 当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上为减函数，在 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上为增函数，且在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 处取得最小值为 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，无最大值；

(2) 当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上为增函数，在 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上为减函数，且在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 处取得最大值为 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，无最小值；

(3) 对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$.

(4) 抛物线 $y=f(x)$ 与 y 轴的交点为 $(0,c)$.

例 8 已知 $a>0$，则 x_0 满足关于 x 的方程 $ax=b$ 的充要条件是（　　）.

A. $\exists x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\frac{1}{2}ax_0^2-bx_0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}ax^2-bx\leqslant\frac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

C. $\forall x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\frac{1}{2}ax_0^2-bx_0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}ax^2-bx\leqslant\frac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

变式 1 若函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称，则 $f(x)$ 的最大值是________.

变式 2 定义 $\min[f(x),g(x)]=\begin{cases}f(x),f(x)\leqslant g(x)\\g(x),f(x)>g(x)\end{cases}$.若函数 $f(x)=x^2+tx+s$ 的图像经过两点 $(x_1,0),(x_2,0)$，且存在整数 m，使得 $m<x_1<x_2<m+1$ 成立，则（　　）.

A. $\min[f(m),f(m+1)]<\frac{1}{4}$　　B. $\min[f(m),f(m+1)]>\frac{1}{4}$

C. $\min[f(m),f(m+1)]=\frac{1}{4}$　　D. $\min[f(m),f(m+1)]\geqslant\frac{1}{4}$

变式 3 设 $\max\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}f(x),f(x)>g(x)\\g(x),f(x)\leqslant g(x)\end{cases}$，若函数 $h(x)=x^2+px+q(p,q\in\mathbf{R})$ 的图像经过不同的两点 $(\alpha,0),(\beta,0)$，且存在整数 n，使得 $n<\alpha<\beta<n+1$ 成立，则（　　）.

A. $\max\{h(n),h(n+1)\}>1$　　B. $\max\{h(n),h(n+1)\}<1$

C. $\max\{h(n),h(n+1)\}>\frac{1}{2}$　　D. $\max\{h(n),h(n+1)\}<\frac{1}{2}$

结论八

经典不等式.

(1) 对数形式：$\ln(x+1)\leqslant x(x>-1)$，当且仅当 $x=0$ 时取等号；

(2) 指数形式：$e^x\geqslant x+1(x\in\mathbf{R})$，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

证明：(1) 令 $f(x)=\ln(x+1)-x(x>-1)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$. $f'(x)$，$f(x)$ 随 x 的变化如表 2-1 所示.

表 2-1

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且当 $x=0$ 时，$f(x)$ 有最大值为 0. 即 $\forall x>-1,\ln(x+1)-x\leqslant f(0)=0$，所以 $\ln(x+1)\leqslant x(x>-1)$ 恒成立，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

(2) 令 $g(x)=e^x-x-1(x\in\mathbf{R})$，则 $g'(x)=e^x-1$.令 $g'(x)=0$，解得 $x=0$.

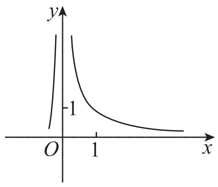
$g'(x)$，$g(x)$ 随 x 的变化如表 2-2 所示.

表 2-2

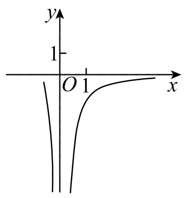
x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数，在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且当 $x=0$ 时 $g(x)$ 有最小值为 0. 即 $\forall x\in\mathbf{R},e^x-x-1\geqslant g(0)=0$.所以 $e^x\geqslant x+1(x\in\mathbf{R})$ 恒成立，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

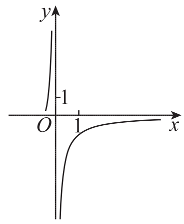
例 9 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)-x}$，则 $y=f(x)$ 的图像大致为(　　).



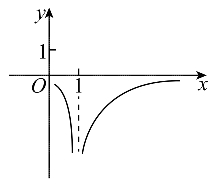
A.



B.



C.



D.

变式 1　已知函数 $f(x)=e^x$，$x\in\mathbf{R}$.求证：曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2+x+1$ 有唯一公共点.

变式 2　设函数 $f(x)=1-e^{-x}$.求证：当 $x>-1$ 时，$f(x)\geqslant\dfrac{x}{x+1}$.

结论九

函数的对称性：已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数.

(1) 若 $f(a+x)=f(b-x)$ 恒成立，则 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 轴对称，

特别地，若 $f(a+x)=f(a-x)$ 恒成立，则 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 轴对称.

(2) 若 $f(a+x)+f(b-x)=c$，则 $y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ 中心对称，

特别地，若 $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 恒成立，则 $y=f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 中心对称.

例 10 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的图像如图 2-2 所示，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{3}$，则 $f(0)=$(　　).

A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

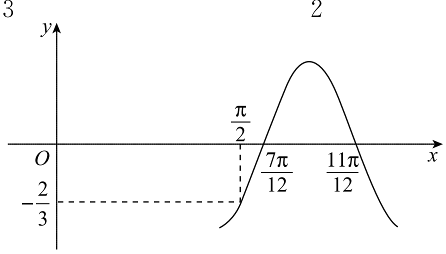


图 2-2

变式 1 已知函数 $y=g(x)$ 的图像由 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$ 个单位得到，这两个函数的部分图像如图 2-3 所示，则 $\varphi=$________.

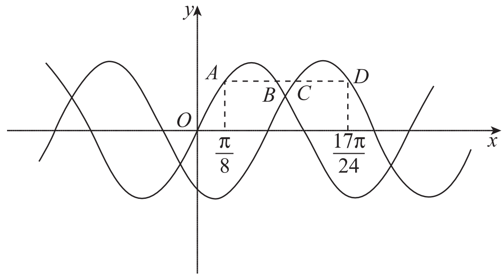


图 2-3

变式 2 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A,\omega,\varphi$ 是常数，$A>0,\omega>0$）.若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f(x)$ 的最小正周期为______.

结论十

三点共线结论：设平面上 O,A,B 三点不共线，则平面上任意一点 P 与 A,B 共线的充要条件是存在实数 λ 与 μ，使得 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，且 $\lambda+\mu=1$.特别地，当 P 为线段 AB 的中点时，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

证明：先证必要性.如图 2-4 所示，因为 P,A,B 三点共线，所以 $\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{AB}$，即存在 $t\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，故 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

设 $1-t=\lambda,t=\mu$，则 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，且 $\lambda+\mu=1$.

再证充分性.若 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，且 $\lambda+\mu=1$，则 $(\lambda+\mu)\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，

即 $\lambda\overrightarrow{OP}-\lambda\overrightarrow{OA}=\mu\overrightarrow{OB}-\mu\overrightarrow{OP}$，也即 $\lambda\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{PB}$.所以 $\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{PB}$，故 A,P,B 三点共线.

综上所述，P,A,B 三点共线的充要条件是存在实数 λ 与 μ，使得 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，且 $\lambda+\mu=1$.

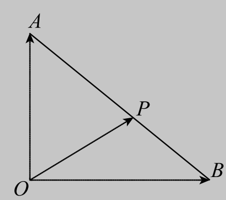


图 2-4

例 11 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）.

A. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　B. $\frac{5}{3}\boldsymbol{c}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$　C. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

变式 1 若在直线 l 上存在不同的三点 A,B,C，使得关于实数 x 的方程 $x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$ 有解（点 O 不在直线上），则此方程的解集为（　　）.

A. $\varnothing$　B. $\{-1,0\}$

C. $\{-1\}$　D. $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

变式 2 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，则 $t=$________.

结论十一

1.若向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$不共线,且点P为线段AB的中点,则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2$;

2.在矩形$ABCD$所在平面内,向量$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OD}|^2$(点$O$为平面内一点).

证明:1.如图2-5所示,在$\triangle OAB$中,因为点P为线段AB的中点,所以$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\mathbf{0}$,故$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB})=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{PA})=|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2$.

2.如图2-6所示,设矩形$ABCD$的对角线AC与BD的交点为点P,则点P为AC和BD的中点.因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$,则$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})^2+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})^2=4|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2$,即$2(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2)=4|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2$,所以$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=2|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{|\overrightarrow{CA}|^2}{2}$.

同理,$|\overrightarrow{OB}|^2\ |\overrightarrow{OD}|^2=2|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{|\overrightarrow{BD}|^2}{2}$.又$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$,所以$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OD}|^2$.

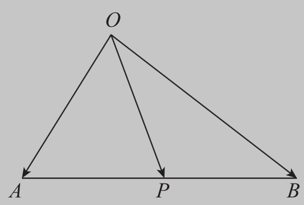


图2-5

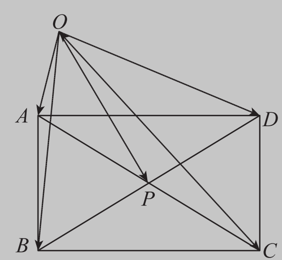


图2-6

例12 在$\triangle ABC$中,点M是BC的中点,$AM=3$,$BC=10$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

变式1 在$\triangle ABC$中,设点P_0是AB边上一定点,满足$P_0B=\frac{1}{4}AB$,且对于AB边上任一点P,恒有$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$,则(　　).

A. $\angle ABC=90°$　　B. $\angle BAC=90°$　　C. $AB=AC$　　D. $AC=BC$

变式2 点P是棱长为1的正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$的底面$A_1B_1C_1D_1$上一点,则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}$的取值范围是(　　).

A. $\left[-1,-\frac{1}{4}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]$　　C. $[-1,0]$　　D. $\left[-\frac{1}{2},0\right]$

变式3 已知圆M:$x^2+(y-1)^2=1$,圆N:$x^2+(y+1)^2=1$,直线l_1,l_2分别过圆心M,N,且l_1与圆M相交于A,B两点,l_2与圆N相交于C,D两点,点P是椭圆$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$上的任意一动点,则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$的最小值为________.

例13 在平面上,$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$,$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$,$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$.若$|\overrightarrow{OP}|<\frac{1}{2}$,则$|\overrightarrow{OA}|$的取值范围是(　　).

A. $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　　B. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$　　C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$　　D. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

变式 1　在 Rt△ABC 中，点 D 是斜边 AB 的中点，点 P 为线段 CD 的中点，则$\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=$（　　）.

A.2　　B.4　　C.5　　D.10

结论十二

若数列$\{a_n\}$为等差数列$\Leftrightarrow a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立$\Leftrightarrow$通项公式 $a_n=kn+b(k,b$ 为常数，$n\in\mathbf{N}^*)$为一次型$\Leftrightarrow$前 n 项和公式 $S_n=An^2+Bn(A,B$ 为常数，$n\in\mathbf{N}^*)$为二次型$\Leftrightarrow$数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列.

已知等差数列$\{a_n\}$，其公差为 d，前 n 项和为 S_n，求证：$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列.

证明：由通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 知，其前 n 项和为 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n(n\in\mathbf{N}^*)$，所以$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{d}{2}n+a_1-\dfrac{d}{2}$　①

当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=\dfrac{d}{2}(n-1)+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)$　②

式①－式②得，$\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=\dfrac{d}{2}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.所以数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是以$\dfrac{S_1}{1}=a_1$为首项，$\dfrac{d}{2}$为公差的等差数列.

例 14　已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足$\dfrac{S_3}{3}-\dfrac{S_2}{2}=1$，则数列$\{a_n\}$的公差是（　　）.

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.1　　C.2　　D.3

变式 1　已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_{10}=100$，$S_{100}=10$，则 $S_{110}=$________.

结论十三

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，等比数列$\{b_n\}$的前 n 项积为 T_n，$m,n,s,t\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $m+n=2t$，则 $a_m+a_n=2a_t$，$b_m\cdot b_n=b_t^2$；

(2) $S_{2n-1}=(2n-1)\cdot a_n$，$T_{2n-1}=b_n^{2n-1}$；

(3) 等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，则$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

例 15　在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_4+a_8=16$，则该数列前 11 项和 $S_{11}=$（　　）.

A.58　　B.88　　C.143　　D.176

变式 1　等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.已知 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$，$S_{2m-1}=38$，则 $m=$________.

变式 2　已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n，且$\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}(n\in\mathbf{N}^*)$，则使得$\dfrac{a_n}{b_n}$为整数的正整数 n 的个数是（　　）.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

结论十四

已知等比数列$\{a_n\}$，公比为q，前n项和为S_n.

(1) 数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$也为等比数列，其公比为$\frac{1}{q}$；

(2) 若$q=1$，则$S_n=na_1$，且$\{a_n\}$同时为等差数列；

(3) 若$q\neq 1$，则$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n=\lambda-\lambda\cdot q^n\left(\lambda=\frac{a_1}{1-q}\right)$.

例 16 已知$\{a_n\}$是首项为1的等比数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和，且$9S_3=S_6$，则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前5项和为(　　).

A.$\frac{15}{8}$或5　　B.$\frac{31}{16}$或5　　C.$\frac{31}{16}$　　D.$\frac{15}{8}$

变式 1 在等比数列$\{a_n\}$中，公比为q，其前n项和为S_n.已知$S_5=\frac{31}{16}$，$a_3=\frac{1}{4}$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=$________.

例 17 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，点(n,S_n)均在函数$y=b^x+r(b>0$且$b\neq 1$，b，r为常数)的图像上，求r的值.

变式 1 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=t\cdot 5^{n-2}-\frac{1}{5}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则实数$t=$(　　).

A.4　　B.5　　C.$\frac{4}{5}$　　D.$\frac{1}{5}$

变式 2 设$f(n)=3+3^3+3^5+3^7+\cdots+3^{2n+9}(n\in\mathbf{N})$，则$f(n)=$________.

结论十五

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，前n项乘积为T_n.

(1) 若$\{a_n\}$为等差数列，公差为d，则$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$，仍为等差数列，公差为$n^2d$；

(2) 若$\{a_n\}$为等比数列，公比为q，则$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$，仍为等比数列(当$n$为偶数时，$q\neq -1$)，公比为$q^n$；

(3) 若$\{a_n\}$为等比数列，公比为q，则$T_n,\frac{T_{2n}}{T_n},\frac{T_{3n}}{T_{2n}},\cdots$，仍为等比数列，公比为$q^{n^2}$.

例 18 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若$\frac{S_6}{S_3}=3$，则$\frac{S_9}{S_6}=$(　　).

A. 2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. 3

变式 1 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=3$，$S_4=15$，则 $S_6=$(　　).

A. 31　　B. 32　　C. 63　　D. 64

变式 2 设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若$\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{3}$，则$\frac{S_8}{S_{16}}=$(　　).

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{8}$

结论十六

1. 已知圆 O 的方程为$(x-m)^2+(y-n)^2=R^2$，点 $P(a,b)$，直线 l：$(a-m)(x-m)+(b-n)(y-n)=R^2$.

(1) 若点 P 在圆 O 上，则直线 l 与圆 O 相切，点 P 为切点，l 为切线.

(2) 若点 P 在圆 O 外，则直线 l 与圆 O 相交，两交点分别为过点 P 作圆的两切线的切点，l 为切点弦所在的直线.

(3) 若点 P 在圆 O 内(不是圆心)，则直线 l 与圆 O 相离，圆心到直线 l 的距离 d 满足 $R^2=|OP|\cdot d$.

2. 过圆或圆锥曲线上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程.

(1) 过圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$.

(2) 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(3) 过抛物线 C：$y^2=2px(p\neq 0)$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$.

3. 已知点 $M(x_0,y_0)$，抛物线 C：$y^2=2px(p\neq 0)$ 和直线 l：$y_0y=p(x+x_0)$.

(1) 当点 M 在抛物线 C 上时，直线 l 与抛物线 C 相切，其中点 M 为切点，l 为切线.

(2) 当点 M 在抛物线 C 外时，直线 l 与抛物线 C 相交，其中两交点与点 M 的连线分别是抛物线的切线，即直线 l 为切点弦所在的直线.

(3) 当点 M 在抛物线 C 内时，直线 l 与抛物线 C 相离.

理解：(1) 求过圆锥曲线上(或外)一点的切线方程时，可以借助直线与圆锥曲线的位置关系的解题套路(联立方程，看判别式).

(2) 在求过圆外一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程时，应注意理解如下两点：

① 所求切线一定有两条；② 设直线方程之前，应对所求直线的斜率是否存在加以讨论.

例 19 过点(3,1)作圆$(x-1)^2+y^2=1$的两条切线，切点分别为 A，B，则直线 AB 的方程为(　　).

A. $2x+y-3=0$　　B. $2x-y-3=0$　　C. $4x-y-3=0$　　D. $4x+y-3=0$

变式 1 已知点 $M(a,b)$ 在圆 O：$x^2+y^2=1$ 外，则直线 $ax+by=1$ 与圆 O 的位置关系是(　　).

A. 相切　　B. 相交　　C. 相离　　D. 不确定

变式 2 若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点在 x 轴上，过点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线，切点分别为 A，B 两点，直线 AB 恰好经过椭圆的右焦点和上顶点，则椭圆方程是 ________.

结论十七

1.在椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中.

(1) 如图2-7所示,若直线 $y=kx(k\neq 0)$ 与椭圆 E 交于 A,B 两点,过 A,B 两点作椭圆的切线 l,l',有 $l\parallel l'$,设其斜率为 k_0,则 $k_0\cdot k=-\frac{b^2}{a^2}$.

(2) 如图2-8所示,若直线 $y=kx$ 与椭圆 E 交于 A,B 两点,点 P 为椭圆上异于 A,B 的点,若直线 PA,PB 的斜率存在,且分别为 k_1,k_2,则 $k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2}$.

(3) 如图2-9所示,若直线 $y=kx+m(k\neq 0$ 且 $m\neq 0)$ 与椭圆 E 交于 A,B 两点,点 P 为弦 AB 的中点,设直线 PO 的斜率为 k_0,则 $k_0\cdot k=-\frac{b^2}{a^2}$.

注:(1) 常变形为:椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$;

(3) 常变形为:椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内以任意一点 (x_0,y_0) 为中点的弦 AB 的斜率 $k=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$.

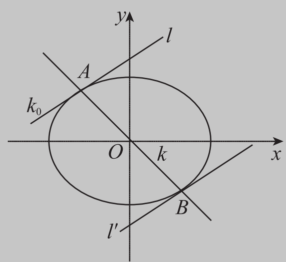


图 2-7

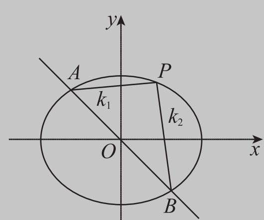


图 2-8

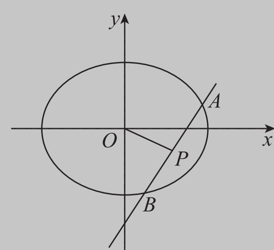


图 2-9

2.在双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 中,类比上述结论有:

(1)$k_0\cdot k=\frac{b^2}{a^2}$;(2)$k_1\cdot k_2=\frac{b^2}{a^2}$;(3)$k_0\cdot k=\frac{b^2}{a^2}$.

3.在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 中类比1(3)的结论有 $k=\frac{p}{y_0}(y_0\neq 0)$.

证明:1.(1) 首先由椭圆的对称性知 $l\parallel l'$.设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由结论十六3知,直线 l 的方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$,则 $k_0=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.又 $k=\frac{y_1}{x_1}$,则 $k_0\cdot k=\frac{y_1}{x_1}\cdot\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)=-\frac{b^2}{a^2}$(切线问题).

(2) 设 $A(x_0,y_0)$,则 $B(-x_0,-y_0)$,$P(x,y)$,$x\neq\pm x_0$,

则 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,则 $\frac{x^2-x_0^2}{a^2}+\frac{y^2-y_0^2}{b^2}=0$,

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\frac{y+y_0}{x+x_0}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=-\frac{b^2}{a^2}$(中心弦问题).

(3) 如图2-10所示,联结 BO 并延长,交椭圆 E 于另一点 Q,联结 AQ,因为点 P 为 AB 的中点,由椭圆的对称性知点 O 为 BQ 的中点,则 OP 为 $\triangle BAQ$ 的中位线,所以 $k_0=k_{AQ}$.又 $k=k_{AB}$,所以由结论十七1(2)知,$k_{AQ}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$,即 $k_0\cdot k=-\frac{b^2}{a^2}$(中点弦问题).

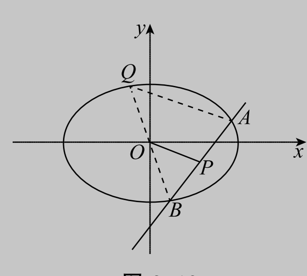


图 2-10

2.双曲线与抛物线中的相关结论请读者们自己证明.

例 20 直线 m 与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 分别交于点 P_1，P_2，线段 P_1P_2 的中点为 P，设直线 m 的斜率为 $k_1(k_1\neq 0)$，直线 OP 的斜率为 k_2，则 $k_1\cdot k_2$ 的值为(　　).

A.2　　B.-2　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$-\frac{1}{2}$

变式 1 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作直线与此抛物线相交于 P，Q 两点，那么线段 PQ 中点的轨迹方程是(　　).

A.$y^2=2x-1$　　B.$y^2=2x-2$　　C.$y^2=-2x+1$　　D.$y^2=-2x+2$

例 21 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交椭圆于 A，B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，则 E 的方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　B. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$　　C. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　D. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

变式 1 椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，点 P 在椭圆 C 上且直线 PA_2 的斜率的取值范围是 $[-2,-1]$，那么直线 PA_1 的斜率的取值范围是(　　).

A.$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$　　B.$\left[\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$　　C.$\left[\frac{1}{2},1\right]$　　D.$\left[\frac{3}{4},1\right]$

变式 2 如图 2-11 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，过坐标原点的直线交椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 于 P，A 两点，其中点 P 在第一象限，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 C，联结 AC，并延长交椭圆于点 B，设直线 PA 的斜率为 k. 对任意 $k>0$，求证：$PA\perp PB$.

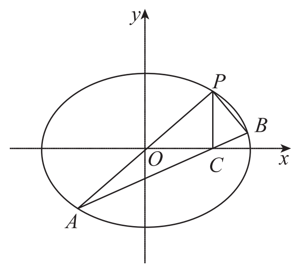


图 2-11

结论十八

在圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)中，曲线上的一定点 P(非顶点)与曲线上的两动点 A，B 满足直线 PA 与直线 PB 的斜率互为相反数(倾斜角互补)，则直线 AB 的斜率为定值.

(1) 如图 2-12 所示，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，定点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 在椭圆上，设 A，B 是椭圆上的两个动点，直线 PA，PB 的斜率分别为 k_{PA}，k_{PB}，且满足 $k_{PA}+k_{PB}=0$，则直线 AB 的斜率 k_{AB} 为定值$\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

(2) 如图 2-13 所示，已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，定点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 在双曲线上，设 A，B 是双曲线上的两个动点，直线 PA，PB 的斜率分别为 k_{PA}，k_{PB}，且满足 $k_{PA}+k_{PB}=0$，则直线 AB 的斜率 k_{AB} 为定值 $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

(3) 如图 2-14 所示，已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，定点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 在抛物线上，设 A，B 是抛物线上的两个动点，直线 PA，PB 的斜率分别为 k_{PA}，k_{PB}，且满足 $k_{PA}+k_{PB}=0$，则直线 AB 的斜率 k_{AB} 为定值 $-\frac{p}{y_0}$.

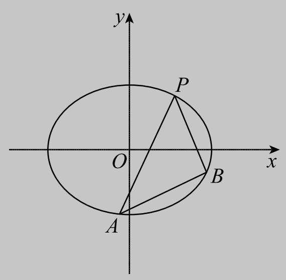


图 2-12

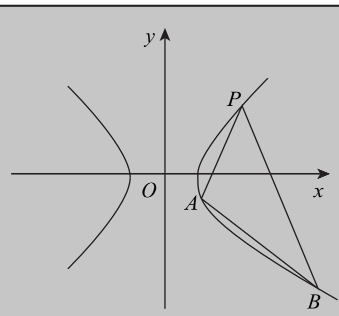


图 2-13

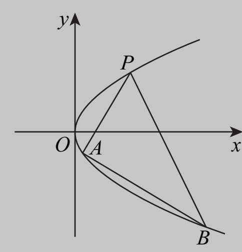


图 2-14

下面以双曲线为例给出证明，椭圆与抛物线中的相关证明方法可参考本结论后面的例题和变式.

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设直线 PA 的方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$，令 $m=y_0-kx_0$，

联立方程 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，整理得 $(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2kmx-a^2m^2-a^2b^2=0$，

则 $x_1x_0=-\dfrac{a^2m^2+a^2b^2}{b^2-a^2k^2}$，解得 $x_1=-\dfrac{a^2(y_0-kx_0)^2+a^2b^2}{(b^2-a^2k^2)x_0}$，同理 $x_2=-\dfrac{a^2(y_0+kx_0)^2+a^2b^2}{(b^2-a^2k^2)x_0}$.

故直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{(-kx_2+y_0+kx_0)-(kx_1+y_0-kx_0)}{x_2-x_1}=\dfrac{2kx_0-k(x_1+x_2)}{x_2-x_1}=$

$-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ 为定值.

例 22 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，点 A 为椭圆上的定点，若其坐标为 $A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$E$，$F$ 是椭圆 C 上的两个动点，如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数.求证：直线 EF 的斜率为定值，并求出这个定值.

变式 1 已知抛物线 $C:y^2=2x$，定点 $P(8,4)$ 在抛物线上，设 A，B 是抛物线上的两个动点，直线 PA，PB 的斜率分别为 k_{PA}，k_{PB}，且满足 $k_{PA}+k_{PB}=0$.求证：直线 AB 的斜率 k_{AB} 为定值，并求出该定值.

结论十九

若圆锥曲线中内接直角三角形的直角顶点与圆锥曲线的顶点重合，则斜边所在直线过定点.具体结论及证明如下：

(1) 对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上异于右顶点的两动点$A,B$，以$AB$为直径的圆经过右顶点$(a,0)$，则直线$l_{AB}$过定点$\left(\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)a,0\right)$.同理，当以$AB$为直径的圆过左顶点$(-a,0)$时，直线$l_{AB}$过定点$\left(-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)a,0\right)$.

(2) 对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上异于右顶点的两动点$A,B$，以$AB$为直径的圆经过右顶点$(a,0)$，则直线$l_{AB}$过定点$\left(\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)a,0\right)$.同理，对于左顶点$(-a,0)$，则定点为$\left(-\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)a,0\right)$.

(3) 对于抛物线$y^2=2px(p>0)$上异于顶点的两动点A,B，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则弦$AB$所在直线过定点$(2p,0)$.同理，抛物线$x^2=2py(p>0)$上异于顶点的两动点$A,B$，若$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则弦$AB$过定点$(0,2p)$.下面以椭圆为例给出证明，双曲线和抛物线的证明方法可参考本结论后面的例题和变式.

证明：如图2-15所示，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$A_1(a,0)$，设直线l的方程为$x=ty+m(m\neq a)$.

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=ty+m\end{cases}$，消$x$得$(a^2+b^2t^2)y^2+2b^2mty+b^2m^2-a^2b^2=0$，

$$\begin{cases}\Delta=(2b^2mt)^2-4(a^2+b^2t^2)(b^2m^2-a^2b^2)>0\\ y_1+y_2=-\frac{2b^2mt}{a^2+b^2t^2}\\ y_1y_2=\frac{b^2(m^2-a^2)}{a^2+b^2t^2}\end{cases}\quad (*)$$

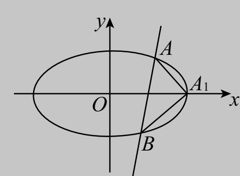


图2-15

因为以AB直径的圆过椭圆的右顶点A_1，所以$\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$，

即$(x_1-a,y_1)\cdot(x_2-a,y_2)=0$，

即$x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2+y_1y_2=0$，

$(ty_1+m)(ty_2+m)-a[t(y_1+y_2)+2m]+a^2+y_1y_2=0$，

整理得$(t^2+1)y_1y_2+(m-a)t(y_1+y_2)+(m-a)^2=0$.

将式(*)代入上式得$\frac{(t^2+1)b^2(m^2-a^2)}{a^2+b^2t^2}+(m-a)t\cdot\frac{-2b^2mt}{a^2+b^2t^2}+(m-a)^2=0$，

化简得$m=\frac{(a^2-b^2)a}{a^2+b^2}$，因此直线$l$过定点$\left(\frac{(a^2-b^2)a}{a^2+b^2},0\right)$.

同理可证，若以AB为直径的圆过左顶点$(-a,0)$，则l过定点$\left(\frac{-a(a^2-b^2)}{a^2+b^2},0\right)$.

类比椭圆，对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$上异于右顶点的两动点$A,B$，若以$AB$为直径的圆过右顶点$(a,0)$，则$l_{AB}$过定点$\left(\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-b^2},0\right)$.同理，若该圆过左顶点$(-a,0)$，则$l_{AB}$过定点$\left(\frac{-a(a^2+b^2)}{a^2-b^2},0\right)$.

下面以一道例题和三道变式题来说明一下该结论.

例 23 已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，直线$l$：$y=kx+m$与椭圆交于$A$，$B$两点（$A$，$B$不是左、右顶点），且以$AB$为直径的圆过椭圆的右顶点.求证：直线$l$过定点，并求出该定点的坐标.

变式 1 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$上异于顶点的两动点A，B满足以AB为直径的圆过顶点.求证：AB所在的直线过定点，并求出该定点的坐标.

变式 2 如图 2-16 所示，点O为坐标原点，直线l在x轴上的截距为$a(a>0)$，且交抛物线$y^2=2px$ $(p>0)$于$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$两点，当$a=2p$时，求$\angle MON$的大小.

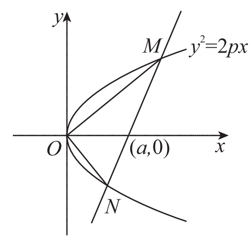


图 2-16

变式 3 已知直线$y=a$交抛物线$y=x^2$于A，B两点.若该抛物线上存在点C，使得$\angle ACB=90°$，则a的取值范围为________.

结论二十

AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的弦(焦点弦),过点 A,B 分别作准线 $l:x=-\frac{p}{2}$ 的垂线,垂足分别为点 A_1,B_1,点 E 为 A_1B_1 的中点.

(1) 如图 2-17 所示,以 AB 为直径的圆与准线 l 相切于点 E;

(2) 如图 2-18 所示,以 A_1B_1 为直径的圆与弦 AB 相切于点 F,且 $EF^2=A_1A\cdot BB_1$;

(3) 如图 2-19 所示,以 AF 为直径的圆与 y 轴相切.

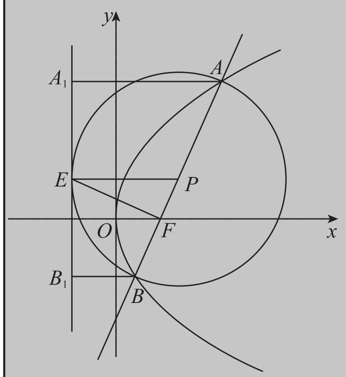


图 2-17

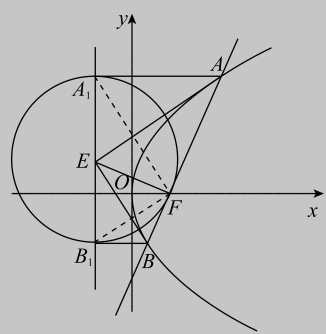


图 2-18

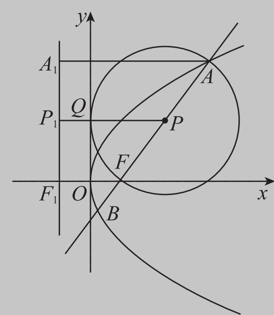


图 2-19

证明:(1) 如图 2-17 所示,由抛物线的定义知,$AA_1=AF$,$BB_1=BF$,设点 P 为弦 AB 的中点,则 $EP=\frac{AA_1+BB_1}{2}=\frac{AB}{2}$,故点 E 在以 AB 为直径的圆上.又 $EP \parallel AA_1$,所以 $EP\perp A_1B_1$,故准线与圆 P 相切,切点为 E.

(2) 如图 2-18 所示,联结 A_1F,B_1F,由抛物线定义知,$AA_1=AF$,所以 $\angle AA_1F=\angle AFA_1$.同理 $\angle BB_1F=\angle BFB_1$.又因为 $AA_1\parallel BB_1$,所以 $\angle B_1BF+\angle A_1AF=180^\circ$,故 $2\angle AFA_1+2\angle BFB_1=180^\circ$,即 $\angle B_1FA_1=90^\circ$,亦即 $A_1F\perp B_1F$.因此点 F 在以 A_1B_1 为直径的圆上,则 $EA_1=EF=EB_1$,所以 $\angle BFE=\angle EFB_1+\angle BFB_1=\angle EB_1F+\angle BB_1F=90^\circ$,即 $EF\perp BF$,所以 $EF\perp AB$,故以 A_1B_1 为直径的圆与弦 AB 相切于点 F.

结合本结论(1) 可知,$AE\perp BE$.又在 $\mathrm{Rt}\triangle AEB$ 中,$EF\perp AB$,所以 $\mathrm{Rt}\triangle BEF\backsim \mathrm{Rt}\triangle EAF$,即 $\frac{BF}{EF}=\frac{EF}{AF}$,所以 $EF^2=AF\cdot BF=AA_1\cdot BB_1$.

(3) 如图 2-19 所示,设准线与 x 轴的交点为 F_1,AF 的中点为 P,过点 P 作 $PQ\perp y$ 轴,垂足为点 Q,延长 PQ 交准线 l 于点 P_1,则由点 P 为 AF 的中点知,$PP_1=\frac{AA_1+FF_1}{2}=\frac{AA_1}{2}+\frac{p}{2}$,即 $PQ=\frac{AA_1}{2}=\frac{AF}{2}$,所以点 Q 在以 AF 为直径的圆上.又 $PQ\perp y$ 轴,所以以 AF 为直径的圆与 y 轴相切,切点为 Q.

例 24 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$,过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A,B 两点,若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$,则 $k=$(　　).

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$\sqrt{2}$　　D.2

变式 1 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的对称轴上一点 $A(a,0)(a>0)$ 的直线与抛物线相交于 M,N 两

点，自点 M，N 向直线 l：$x=-a$ 作垂线，垂足分别为点 M_1，N_1. 当 $a=\frac{p}{2}$ 时，求证：$AM_1\perp AN_1$.

结论二十一

焦点三角形的面积：

(1) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中，F_1，F_2 分别为左、右焦点，P 为椭圆上一点，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}$，其中 $\theta=\angle F_1PF_2$；

(2) 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 中，F_1，F_2 分别为左、右焦点，P 为双曲线上一点，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$，其中 $\theta=\angle F_1PF_2$.

证明：(1) 若 $\triangle PF_1F_2$ 为一般三角形，如图 2-20 所示，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta$（用 θ 表示 $\angle F_1PF_2$）. 由余弦定理得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\theta=|F_1F_2|^2$.

又 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，

所以 $(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|(1+\cos\theta)=4c^2$，

所以 $2|PF_1||PF_2|(1+\cos\theta)=4a^2-4c^2=4b^2$，

$|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta=$

$\frac{b^2\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2b^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

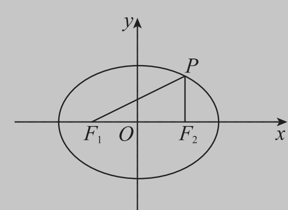


图 2-20

(2) 双曲线中的相关结论请同学们自己证明.

例 25 如图 2-21 所示，F_1，F_2 是椭圆 C_1：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点，A，B 分别是 C_1，C_2 在第二、四象限的公共点. 若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的离心率是（　　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

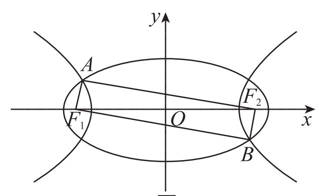


图 2-21

变式 1 已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为椭圆 C 上一点，且 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$.若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9，则 $b=$________.

变式 2 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1,F_2，点 M 在双曲线上且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则点 M 到 x 轴的距离为(　　).

A.$\frac{4}{3}$　　B.$\frac{5}{3}$　　C.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D.$\sqrt{3}$

变式 3 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$ 有相同的焦点 F_1 和 F_2，它们的一个交点为 P，设 $\angle F_1PF_2=2\alpha$，求证：$\tan\alpha=\frac{n}{b}$.

第二篇　常考二级结论及其应用

例 1

解析　由题意知，集合 A 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ 上所有点的集合，集合 B 是指数函数 $y=3^x$ 图像上所有点的集合.

如图2-22所示，由图知集合 $A\cap B$ 中有 2 个元素，故 $A\cap B$ 的子集个数是 $2^2=4$.故选 A.

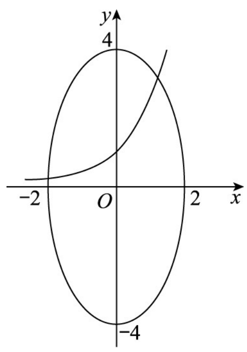


图 2-22

例 1　变式 1

解析　由题意知 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，因为 $A\subseteq C\subsetneqq B$，所以集合 C 是集合 $\{1,2\}$ 与集合 $\{3,4\}$ 的任意一个真子集的并集，即求集合 $\{3,4\}$ 的真子集的个数，故集合 C 的个数为 $2^2-1=3$.故选 C.

例 2

解析　如图 2-23 所示，若 $N\cap \complement_I M=\varnothing$，则 $N\subseteq M$，所以 $M\cup N=M$.故选 A.

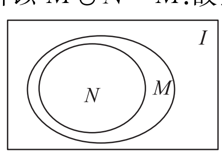


图 2-23

例 2　变式 1

解析　由题意知 $A=\{1,5\}$，若 $A\cap B=B$，则 $B\subseteq A$.

①若 $B=\varnothing$，则 $a=0$；

②若 $B\neq\varnothing$，则 $1\in B$ 或 $5\in B$，即 $a-1=0$ 或 $5a-1=0$，解得 $a=1$ 或 $a=\frac{1}{5}$.故集合 $C=\left\{0,1,\frac{1}{5}\right\}$.故选 C.

评注　求解本题要注意 $\varnothing\subseteq A$.

例 3

解析　因为 $A\cap B=\{b\}$，所以 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)=\{a,c,d\}$.

例 3　变式 1

解析　因为 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$，即集合 $\complement_U(A\cap B)$ 中有 n 个元素.又全集 U 中有 m 个元素，所以 $A\cap B$ 中有 $m-n$ 个元素.

故选 D.

评注　本题若结合 Venn 图求解会更快捷.

例 3　变式 2

解析　(1)因为 $\neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q)$，

即 $\neg(p\vee q)$：$A\neq0$ 且 $B\neq0$.

(2)因为 $\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)$，

即 $\neg(p\wedge q)$：$A\neq0$ 或 $B\neq0$.

评注　(1)$p\vee q$：$A=0$ 或 $B=0\Leftrightarrow AB=0$，

$\neg(p\vee q)$：$AB\neq0\Leftrightarrow A\neq0$ 且 $B\neq0$.

(2)$p\wedge q$：$A=0$ 且 $B=0\Leftrightarrow A^2+B^2=0$，

$\neg(p\wedge q)$：$A^2+B^2\neq0\Leftrightarrow A\neq0$ 或 $B\neq0$.

例 4

解析　$f(x)=\frac{(x+1)(x-4)+\tan x}{x^2-4}=1+\frac{\tan x-3x}{x^2-4}$，设 $g(x)=\frac{\tan x-3x}{x^2-4}$.

因为 $g(-x)=\frac{\tan(-x)+3x}{x^2-4}=-g(x)$，

即 $g(x)$ 为定义域上的奇函数.

所以 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=0$，故 $M+m=[g(x)+1]_{\max}+[g(x)+1]_{\min}=2+g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=2$.

例 4　变式 1

解析　令 $g(x)=\ln\left(\sqrt{1+9x^2}-3x\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g(-x)=\ln\left(\sqrt{1+9x^2}+3x\right)$.

因为 $g(x)+g(-x)=\ln\left(\sqrt{1+9x^2}-3x\right)+\ln\left(\sqrt{1+9x^2}+3x\right)=\ln(1+9x^2-9x^2)=\ln1=0$，所以 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

又 $\lg\frac{1}{2}=-\lg2$，所以 $g(\lg2)+g\left(\lg\frac{1}{2}\right)=0$，

$f(\lg2)+f\left(\lg\frac{1}{2}\right)=g(\lg2)+1+g\left(\lg\frac{1}{2}\right)+1=2$.故选 D.

例 4　变式 2

解析　令 $g(x)=a\sin x+bx$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g(-x)=a\sin(-x)-bx=-g(x)$，即 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

故 $g(-1)+g(1)=0$，所以 $f(1)+f(-1)=$

$g(1)+c+g(-1)+c=2c$.

又 $c\in\mathbf{Z}$,所以 $f(1)+f(-1)=2c$ 为偶数,故一定不可能是 1 和 2.故选 D.

例 5

解析 由题意知函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与 $y=\ln(2x)$ 互为反函数,其图像关于直线 $y=x$ 对称,如图 2-24 所示.

两曲线上点之间的最小距离 $|P_0Q_0|$ 恰好是 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上点的最小距离的 2 倍,

设 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线与 $y=x$ 平行,有 $\frac{1}{2}e^{x_0}=1$,解得 $x_0=\ln2$,$y_0=1$,

所以 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上点的最小距离,即为点 P_0 到直线 $y=x$ 的距离,且为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln2)$,

故 $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln2)\times2=\sqrt{2}(1-\ln2)$.故选 B.

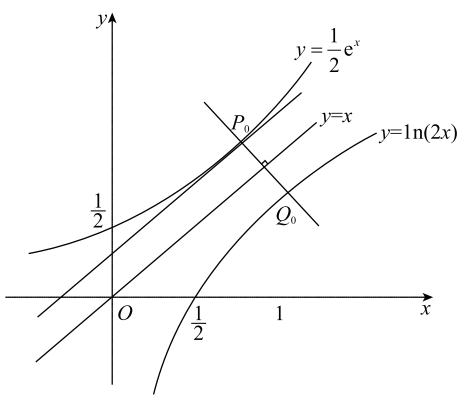


图 2-24

例 5 变式 1

解析 因为 $2x+2^x=5$,所以 $x+2^{x-1}=\frac{5}{2}$.

同理 $x+\log_2(x-1)=\frac{5}{2}$,令 $t=x-1$,则 $x=t+1$,即 t_1 是 $t+2^t=\frac{3}{2}$ 的解,t_2 是 $t+\log_2 t=\frac{3}{2}$ 的解,且 $t_1=x_1-1$,$t_2=x_2-1$.如图 2-25 所示,t_1 为函数 $y=2^t$ 与 $y=\frac{3}{2}-t$ 图像交点 P 的横坐标,t_2 为函数 $y=\log_2 t$ 与 $y=\frac{3}{2}-t$ 图像交点 Q 的横坐标,所以 $P(t_1,2^{t_1})$,$Q(t_2,\log_2 t_2)$.

因为函数 $y=2^t$ 与 $y=\log_2 t$ 互为反函数,所以点 P,Q 关于直线 $y=x$ 轴对称,即 $t_1=\log_2 t_2$,$t_2=2^{t_1}$,所以 $t_1+t_2=t_1+2^{t_1}=t_1+\left(\frac{3}{2}-t_1\right)=\frac{3}{2}$.所以 $x_1+x_2=t_1+1+t_2+1=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$.故选 C.

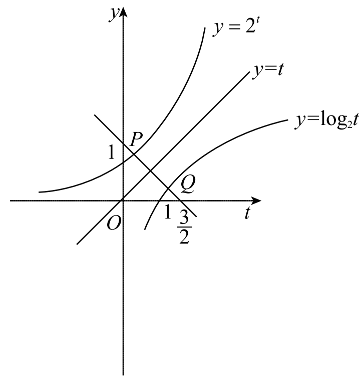


图 2-25

例 6

解析 因为 $f(5)=\frac{1}{4}$,且 $4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)(x,y\in\mathbf{R})$,

所以令 $y=5$,

则 $f(x)=f(x+5)+f(x-5)$ ①

故 $f(x+5)=f(x+10)+f(x)$ ②

由①+②得 $f(x+10)+f(x-5)=0$,

即 $f(x+10)=-f(x-5)$,

得 $f(x+15)=-f(x)$,$T=30$.

因此 $f(2015)=f(5+30\times67)=f(5)=\frac{1}{4}$.

例 6 变式 1

解析 当 $x>0$ 时,有

$f(x)=f(x-1)-f(x-2)$ ①

同理有 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$ ②

①+②得 $f(x+1)=-f(x-2)$,

即 $f(x+3)=-f(x)$.

所以 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$,$T=6$.

于是 $f(2017)=f(1+6\times336)=f(1)=f(0)-f(-1)=\log_2 1-\log_2 2=0-1=-1$.

故选 A.

例 6 变式 2

解析 因为 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=-f(x)$,

所以 $f(x+3)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f(x)$,$T=3$.

则有 $f(1)=f(-2)=-1$，
$f(2)=f(-1)=-1, f(3)=f(0)=2$，
于是 $f(1)+f(2)+f(3)=0$，
所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2016)+f(2017)=[f(1)+f(2)+f(3)]+\cdots+[f(2014)+f(2015)+f(2\,016)]+f(2017)=672\times[f(1)+f(2)+f(3)]+f(2017)=f(1+3\times 672)=f(1)=f(-2)=-1$.故选 B.

例 7

解析 假设 $f(x_0)=t$，则 $f[f(x_0)]=f(t)=x_0$.当 $x_0>t$ 时，由条件(3)可推出函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上非减，所以 $f(x_0)\geqslant f(t)$，即 $t\geqslant x_0$，与 $x_0>t$ 矛盾，故当 $x_0>t$ 时不成立.
同理，当 $x_0<t$ 时，有$f(x_0)\leqslant f(t)$，即 $t\leqslant x_0$，与 $x_0<t$ 矛盾.综上所述，$t=x_0$，故 $f(x_0)=x_0$.

例 7 变式 1

解析 令 $t=g(x)=\mathrm{e}^x+x-a$，则 $y=\sqrt{t}\,(t\geqslant 0)$.$g'(x)=\mathrm{e}^x+1$，因为 $g'(x)>0$ 恒成立，
所以 $g(x)$在定义域上为增函数，幂函数 $y=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$在$[0,+\infty)$上也为单调增函数，
由复合函数的单调性可知 $f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^x+x-a}$在定义域上为增函数.若曲线 $y=\sin x$ 上存在点(x_0,y_0)使得$f[f(y_0)]=y_0$成立，即存在 $y_0\in[-1,1]$使得 $f[f(y_0)]=y_0$成立，由结论六知，方程$f(x)=x$ 在$[-1,1]$上有解，即$\exists x\in[-1,1]$，使得$\sqrt{\mathrm{e}^x+x-a}=x$，亦即 $a=\mathrm{e}^x+x-x^2$ 在$[0,1]$上有解.令 $h(x)=\mathrm{e}^x+x-x^2, x\in[0,1], h'(x)=\mathrm{e}^x+1-2x$.
当 $x\in[0,1]$时，$h'(x)>0$ 恒成立，故 $h(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以 $h(x)\in[h(0),h(1)]=[1,\mathrm{e}]$，即 $a\in[1,\mathrm{e}]$.故选 A.

例 7 变式 2

解析 令 $t=g(x)=x^2-ax+1$，则 $y=f(t)=\log_a t$.
①当 $0<a<1$ 时，抛物线 $t=g(x)$的对称轴 $x=\dfrac{a}{2}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.如图 2-26 所示，$g(x)$在$(1,2)$上为增函数，而 $y=f(t)$在$(0,+\infty)$上为减函数.所以复合函数 $y=f[g(x)]=\log_a(x^2-ax+1)$在$(1,2)$上单调递减，与已知条件不符.

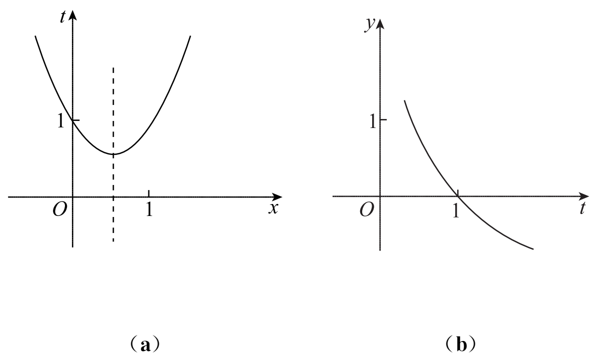


图 2-26

②当 $a>1$ 时，抛物线 $t=g(x)$在$\left[\dfrac{a}{2},+\infty\right)$上为增函数，$y=f(t)$在$(0,+\infty)$上为增函数，
若复合函数 $y=\log_a(x^2-ax+1)$在$(1,2)$上为增函数，则需 $g(x)$在$(1,2)$上单调递增，且 $g(1)\geqslant 0$，即$\begin{cases}\dfrac{a}{2}\leqslant 1\\ 2-a\geqslant 0\\ a>1\end{cases}$，解得 $1<a\leqslant 2$.
综上所述，实数 a 的取值范围是$(1,2]$.

评注 复合函数利用“同增异减”判断其单调性时，一定要注意单调区间是定义域的子集.就本题而言，$g(x)$在$(1,2)$上的函数值均为正数才有意义.

例 8

解析 由已知得 $ax_0=b$，即 $x_0=\dfrac{b}{a}$.观察选项，发现与二次函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-bx\,(a>0, x\in\mathbf{R})$有关.
结合如图 2-27 所示 图形可知，抛物线 $y=f(x)$的对称轴为 $x=\dfrac{b}{a}$，在$\left(-\infty,\dfrac{b}{a}\right]$上单调递减，在$\left[\dfrac{b}{a},+\infty\right)$上单调递增.若 $x_0=\dfrac{b}{a}$，则$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)\geqslant f(x_0)$，即$\dfrac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$.
反之，若$\forall x\in\mathbf{R}$，$\dfrac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$ 恒成立，则 $f(x_0)$为 $f(x)$的最小值，即 $x_0=\dfrac{b}{a}$.
故选 C.

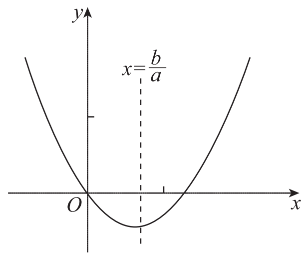


图 2-27

例 8 变式 1

解析 因为 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称，且 $f(1)=f(-1)=0$，即 $x_1=-1, x_2=1$ 是函数 $f(x)$ 的两个零点，

所以方程 $x^2+ax+b=0$ 也有两解，分别为 $x_3=-3, x_4=-5$.

则 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)=-(x+1)(x-1)(x+3)(x+5)=-(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)$.

令 $t=x^2+4x, t\in[-4,+\infty), y=-(t+3)\cdot(t-5)=-(t^2-2t-15)=-(t-1)^2+16$.

所以当 $t=1$，即 $x^2+4x=1$ 时，$f(x)$ 有最大值 16.

例 8 变式 2

解析 依题意 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$，

$\min[f(m), f(m+1)]\leqslant\sqrt{f(m)f(m+1)}$.

令 $x_1-m=x, x_2-m=y$，则有 $0<x<y<1$，

$f(m)=(m-x_1)(m-x_2)=xy$，$f(m+1)=(m+1-x_1)(m+1-x_2)=(1-x)(1-y)$，

所以 $f(m)f(m+1)=xy(1-x)(1-y)<\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2\left(\frac{y+1-y}{2}\right)^2=\frac{1}{4^2}$，

故 $\min[f(m), f(m+1)]\leqslant\sqrt{f(m)f(m+1)}<\frac{1}{4}$.故选 A.

例 8 变式 3

解析 依题意，设 $h(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$，

$\max\{h(n), h(n+1)\}\geqslant\sqrt{h(n)h(n+1)}$.

令 $\alpha-n=x, \beta-n=y$，则有 $0<x<y<1$，

$h(n)=(n-\alpha)(n-\beta)=xy$，

$h(n+1)=(n+1-\alpha)(n+1-\beta)=(1-x)(1-y)$，显然，$h(n)$，$h(n+1)$ 都小于 1，所以

$\max\{h(n), h(n+1)\}<1$.故选 B.

例 9

解析 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\begin{cases}x+1>0\\ \ln(x+1)-x\neq0\end{cases}$，即 $\{x\mid x>-1 \text{ 且 } x\neq0\}$，所以排除选项 D；

令 $g(x)=\ln(x+1)-x$，则由经典不等式 $\ln(x+1)\leqslant x$ 知，$g(x)\leqslant0$ 恒成立，故 $f(x)=\frac{1}{g(x)}<0$ 恒成立，所以排除 A，C.故选 B.

例 9 变式 1

解析 令 $g(x)=f(x)-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)=$

$e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1, x\in\mathbf{R}. g'(x)=e^x-x-1$，

由经典不等式 $e^x\geqslant x+1(x\in\mathbf{R})$ 恒成立可知，$g'(x)\geqslant0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递增函数，且 $g(0)=0$，故函数 $g(x)$ 有唯一零点，即两曲线有唯一公共点.

例 9 变式 2

解析 $x>-1$ 时，$f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow x>-1$，

$1-e^{-x}\geqslant\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow1-\frac{x}{x+1}\geqslant e^{-x}(x>-1)\Leftrightarrow$

$\frac{1}{x+1}\geqslant\frac{1}{e^x}(x>-1)\Leftrightarrow x+1\leqslant e^x(x>-1)$.

由经典不等式 $e^x\geqslant x+1(x\in\mathbf{R})$ 恒成立可知，$x>-1$ 时，$e^x\geqslant x+1$，即 $x>-1$ 时，$f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$.

例 10

解析 依题意，易知函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 $T=2\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{2\pi}{3}$，所以 $f(0)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.因为函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$ 中心对称.又 $\frac{\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{7\pi}{12}$，

所以 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}$，所以 $f(0)=\frac{2}{3}$.

故选 B.

例 10 变式 1

解析 由题意知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期均为 π.其中 $f(x)$ 图像上的点 A, B 平移后对应 $g(x)$ 图像上的 C, D 两点.又 A, B 两点关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，所以 $\frac{x_B+x_A}{2}=\frac{\pi}{4}$，解得 $x_B=\frac{3\pi}{8}$.

又 $x_D=\dfrac{17\pi}{24}$，所以 $\varphi=\dfrac{17\pi}{24}-\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{17\pi-9\pi}{24}=\dfrac{\pi}{3}$.

例 10　变式 2

解析　记 $f(x)$ 的最小周期为 T，因为 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性，所以 $\dfrac{T}{2}\geqslant\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$，即 $T\geqslant\dfrac{2\pi}{3}$. 又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，且 $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}<T$，可作出函数 $f(x)$ 的示意图如图 2-28 所示(一种情况)：

所以 $x_1=\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，$x_2=\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7\pi}{12}$，于是 $\dfrac{T}{4}=x_2-x_1=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}$，

故 $T=\pi$.

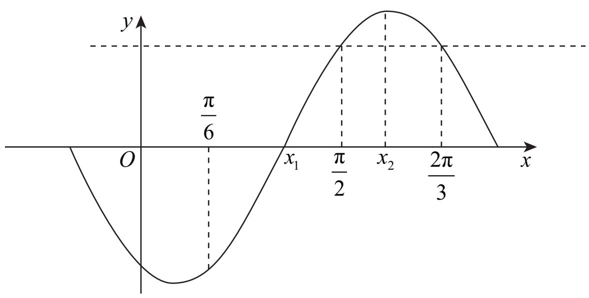


图 2-28

评注　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，且在同一单调区间内，故相应两点 $\left(\dfrac{\pi}{6},f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ 关于点 $(x_1,0)$ 中心对称，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$，且在同一周期内，故相应两点关于直线 $x=x_2$ 轴对称.

例 11

解析　如图 2-29 所示，在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{BD}/\!/\overrightarrow{DC}$，且 $|BD|=2|DC|$，即点 D 为线段 BC 的三等分点. 故 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$. 故选 A.

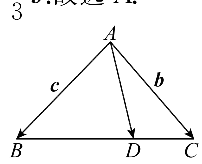


图 2-29

评注　在平面 OAB 内，向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 不共线，若点 P 为平面内任意一点，且 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. 如图 2-30 所示，点 P_0 为线段 AB 的中点，则有以下相关结论：

(1) 若点 P 在线段 AP_0 上(不含端点)，则 $0<\mu<\dfrac{1}{2}<\lambda<1$，且 $\lambda+\mu=1$.

(2) 若点 P 在线段 BP_0 上(不含端点)，则 $0<\lambda<\dfrac{1}{2}<\mu<1$，且 $\lambda+\mu=1$.

(3) 若点 P 在 BA 的延长线上，则 $\lambda>1$，$\mu<0$，且 $\lambda+\mu=1$.

(4) 若点 P 在 AB 的延长线上，则 $\lambda<0$，$\mu>1$，且 $\lambda+\mu=1$.

(5) 若点 P 在 $\triangle OAB$ 内部(不含边界)，则 $0<\lambda<1$，$0<\mu<1$，且 $0<\lambda+\mu<1$.

(6) 若点 P 在 OP_0 的延长线上，则 $\lambda=\mu>\dfrac{1}{2}$.

总之，① 若点 P 与点 O 在直线 AB 同侧，且 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda+\mu<1$；

② 若点 P 与点 O 在直线 AB 两侧，且 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda+\mu>1$；

③ 若点 P 在直线 AB 上，且 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda+\mu=1$，且点 P 与 A,B 两点间的距离大小与 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的系数(即 λ,μ)的大小相反.

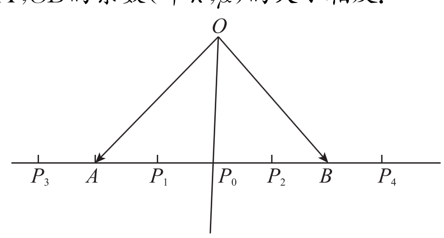


图 2-30

例 11　变式 1

解析　由于 $x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$，

即 $x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$，

所以 $\overrightarrow{OC}=-x^2\overrightarrow{OA}-x\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}=-x^2\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OB}$.

因为 A,B,C 三点共线，所以 $-x^2+(1-x)=1$，解得 $x=0$ 或 -1.

当 $x=0$ 时，$x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$，即 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$ 不合题意，所以 $x=-1$. 故选 C.

例 11 变式 2

解析 如图 2-31 所示，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，因为单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，所以$\triangle OAB$ 为等边三角形.又 $\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\cdot\boldsymbol{b}$，设$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 A，B，C 三点共线.又 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，所以过点 O 作 OB 的垂线与 BA 的延长线交于点 C，易知$|AC|=|AB|$，即点 A 为 BC 的中点，所以 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.故 $t=2$.

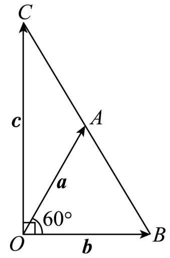


图 2-31

例 12

解析 如图 2-32 所示，因为点 M 为 BC 的中点，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AM}|^2-|\overrightarrow{MC}|^2=9-25=-16$.

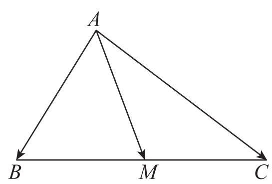


图 2-32

例 12 变式 1

解析 如图 2-33 所示，取 BC 中点为点 Q，则$\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}=|\overrightarrow{P_0Q}|^2-|\overrightarrow{QC}|^2$.同理，边 AB 上任作一点 P，有$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{QC}|^2$.因为$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，所以$|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{QC}|^2\geqslant|\overrightarrow{P_0Q}|^2-|\overrightarrow{QC}|^2$，即$|\overrightarrow{PQ}|^2\geqslant|\overrightarrow{P_0Q}|^2$ 恒成立，亦即$|\overrightarrow{PQ}|\geqslant|\overrightarrow{P_0Q}|$，所以 $P_0Q\perp AB$，当点 P 为 AB 中点时，则 $PC\perp AB$，即$\triangle ABC$ 为等腰三角形，且 $CA=CB$.故选 D.

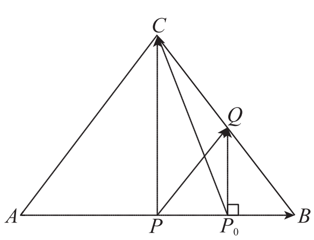


图 2-33

例 12 变式 2

解析 如图 2-34 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 AC_1 的中点为点 Q，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{QA}|^2$.

因为正方体棱长为 1，所以中心 Q 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内任一点连线的线段 PQ 的长度取值范围为$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，且$|\overrightarrow{QA}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=|\overrightarrow{PQ}|^2-\frac{3}{4}\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$.故选 D.

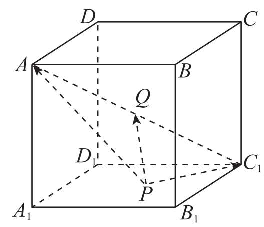


图 2-34

例 12 变式 3

解析 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA})=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2=|\overrightarrow{PM}|^2-1$，同理$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=|\overrightarrow{PN}|^2-1$，

则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=|\overrightarrow{PM}|^2+|\overrightarrow{PN}|^2-2=(|\overrightarrow{PM}|+|\overrightarrow{PN}|)^2-2|\overrightarrow{PM}||\overrightarrow{PN}|-2=(2a)^2-2-2|\overrightarrow{PM}||\overrightarrow{PN}|=14-2||\overrightarrow{PM}||\overrightarrow{PN}|$.

又$|\overrightarrow{PM}||\overrightarrow{PN}|\leqslant\left(\frac{|\overrightarrow{PM}|+|\overrightarrow{PN}|}{2}\right)^2=a^2=4$，当且仅当$|\overrightarrow{PM}|=|\overrightarrow{PN}|$时等号成立.

故$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}\geqslant14-2\times4=6$.故填 6.

例 13

解析 如图 2-35 所示，因为$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$，所以四边形 AB_1PB_2 为矩形.

又因为$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$，所以$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OB_1}|^2+|\overrightarrow{OB_2}|^2=2$.所以$|\overrightarrow{OA}|^2=2-|\overrightarrow{OP}|^2$.

又因为$|\overrightarrow{OP}|<\frac{1}{2}$，所以$|\overrightarrow{OA}|^2\in\left(\frac{7}{4},2\right]$，

即$|\overrightarrow{OA}|\in\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$.故选 D.

例 13 变式 1

解析 如图 2-36 所示，在$\triangle ABC$ 中，设$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CE}$，则四边形 $ACBE$ 为平行四边形.

又$\angle ACB=90^\circ$，所以四边形 $ACBE$ 为矩形，则$|\overrightarrow{PC}|^2+|\overrightarrow{PE}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2$.又点 P 为 CD

中点，所以 $\frac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=\frac{|PC|^2+|PE|^2}{|PC|^2}=\frac{|PC|^2+(3|PC|)^2}{|PC|^2}=10$.故选 D.

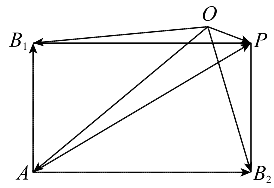


图 2-35

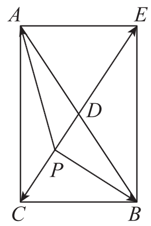


图 2-36

例 14

解析 因为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}=a_1+\frac{d}{2}(n-1)$，那么 $\frac{S_3}{3}-\frac{S_2}{2}=\frac{d}{2}=1$，得 $d=2$. 故选 C.

例 14 变式 1

解析 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也为等差数列，令 $b_n=\frac{S_n}{n}$，公差为 d，

故 $b_{10}=\frac{S_{10}}{10}=10$，$b_{100}=\frac{S_{100}}{100}=\frac{1}{10}$，

则 $d=\frac{b_{100}-b_{10}}{100-10}=\frac{\frac{1}{10}-10}{90}=-\frac{11}{100}$，所以

$b_{110}=b_{10}+100d=10+100\times\left(-\frac{11}{100}\right)=-1$，

即 $\frac{S_{110}}{110}=-1$，所以 $S_{110}=-110$.

评注 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_m=n$，$S_n=m(m\neq n, m, n\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_{m+n}=-(m+n)$.

例 15

解析 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，又 $a_4+a_8=16$，所以 $a_6=\frac{a_4+a_8}{2}=8$，于是 $S_{11}=11a_6=8\times11=88$.故选 B.

例 15 变式 1

解析 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $S_{2m-1}=(2m-1)a_m=38$. 又 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$，所以 $2a_m-a_m^2=-a_m(a_m-2)=0$，解得 $a_m=0$(舍)或 $a_m=2$，所以 $S_{2m-1}=(2m-1)\cdot 2=38$，解得 $m=10$.

例 15 变式 2

解析 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是等差数列，所以 $a_1+a_{2n-1}=2a_n$，所以 $A_{2n-1}=\frac{(a_1+a_{2n-1})(2n-1)}{2}=(2n-1)a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.同理 $B_{2n-1}=(2n-1)b_n$，所以 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+45}{2n+2}=7+\frac{12}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.所以要使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数，正整数 n 可能的值为 1,2,3,5,11，共 5 个.故选 D.

例 16

解析 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，若 $q=1$，则 $S_3=3$，$S_6=6$，$9S_3\neq S_6$，与已知矛盾，故 $q\neq1$.所以有 $\frac{9(1-q^3)}{1-q}=\frac{1-q^6}{1-q}$，即 $9=1+q^3$.解得 $q=2$.

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，其前 5 项和为 $\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$.故选 C.

评注 这里由于项数不多，可用和定义列方程，不必分情况. $9(a_1+a_2+a_3)=a_1+a_2+\cdots+a_6$，所以 $q=2$，下同.

例 16 变式 1

解析 **解法一**：因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $S_5=\frac{31}{16}$，$a_3=\frac{1}{4}$，若 $q=1$，则 $S_5=5a_3=\frac{5}{4}$，与已知矛盾.故 $q\neq1$.

所以有 $\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{31}{16}$，$\frac{1-q^5}{1-q}=\frac{31}{16a_1}$.因为 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$ 可看作是数列 $\frac{1}{a_5},\frac{1}{a_4},\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_1}$ 的 5 项和，且首项为 $\frac{1}{a_5}$，公比为 q.

故所求和为 $\frac{\frac{1}{a_5}(1-q^5)}{1-q}=\frac{1}{a_5}\cdot\frac{31}{16a_1}=\frac{31}{16a_3^2}=31$.

解法二：由等比数列 $\{a_n\}$ 知，$a_1a_5=a_2a_4=a_3^2$，得 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=\frac{a_1+a_5}{a_1a_5}+\frac{a_2+a_4}{a_2a_4}+\frac{a_3}{a_3^2}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_3^2}=\frac{S_5}{a_3^2}=\frac{\frac{31}{16}}{\frac{1}{16}}=31$.

评注 若 a_1,a_2,a_3 是公比为 q 的等比数列，则 $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_3}$ 是公比为 $\frac{1}{q}$ 的等比数列；a_3,a_2,a_1 是公比为 $\frac{1}{q}$ 的等比数列；$\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_1}$ 是公比为 q 的等比数列.本题需深入理解等比数列性质及求和公式的变形应用.

例 17

解析 **解法一**：因为 (n,S_n) 在函数 $y=b^x+r$ 的图像上，所以 $S_n=b^n+r,n\in\mathbf{N}^*$.

所以 $S_1=b+r,S_2=b^2+r,S_3=b^3+r$.于是有 $a_1=b+r,a_2=b^2-b,a_3=b^3-b^2$.

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $(b^2-b)^2=(b+r)\cdot(b^3-b^2)$，且 $b>0,b\neq1$，解得 $r=-1$.

解法二：数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$q\neq1$ 时，

$S_n=\lambda-\lambda q^n\left(\lambda=\frac{a_1}{1-q}\right)$，所以 $S_n=r+b^n=(-1)+1\cdot b^n$，故 $r=-1$.

评注 若本题为填空题或选择题，由 $q\neq1$ 的等比数列前 n 项和公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n=k\cdot q^n-k$ 的形式知 $r=-1$（即 q^n 的系数与常数项互为相反数），需灵活掌握公式变形应用.

例 17 变式 1

解析 因为 $S_n=t\cdot5^{n-2}-\frac{1}{5}=\frac{t}{25}\cdot5^n-\frac{1}{5}$.又 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $\frac{t}{25}-\frac{1}{5}=0$，解得 $t=5$.故选 B.

例 17 变式 2

分析 由题意知 $f(n)$ 为等比数列求和问题，其中 $a_1=3,q=\frac{3^3}{3}=\cdots=\frac{3^{2n+9}}{3^{2n+7}}=9$，末项为 3^{2n+9}，但项数不易确定，故使用 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ 计算更为迅捷.

解析 由 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$，知 $f(n)=\frac{3-3^{2n+9}\times9}{1-9}=\frac{3}{8}(3^{2n+9}\times3-1)=\frac{3}{8}(9^{n+5}-1)$.

例 18

解析 由已知 $\frac{S_6}{S_3}=3$，得 $S_6=3S_3$，因为 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 也为等比数列，所以 $(S_6-S_3)^2=S_3(S_9-S_6)$，则 $(2S_3)^2=S_3(S_9-3S_3)$，化简得 $S_9=7S_3$，从而 $\frac{S_9}{S_6}=\frac{7S_3}{3S_3}=\frac{7}{3}$.故选 B.

评注 本题利用 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 仍为等比数列，以 S_3 为基本量，设而不求体现了整体思想，故可令 $S_3=1$，则 $S_6=3$，从而 $S_6-S_3=2$，$S_9-S_6=4$，所以 $S_9=7$，故 $\frac{S_9}{S_6}=\frac{7}{3}$.如此求解更为简捷.

例 18 变式 1

解析 由结论十五(2)知，S_2,S_4-S_2,S_6-S_4 成等比数列，故 $(S_4-S_2)^2=S_2\cdot(S_6-S_4)$，得 $S_6-S_4=\frac{(S_4-S_2)^2}{S_2}=\frac{(15-3)^2}{3}=48$，故 $S_6=48+S_4=63$.故选 C.

例 18 变式 2

解析 由结论十五(1)知，$S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8$，$S_{16}-S_{12}$ 成等差数列，不妨设 $S_4=k$，则 $S_8=3k$，故 $k,2k,S_{12}-S_8,S_{16}-S_{12}$ 成等差数列，所以 $S_{12}-S_8=3k,S_{16}-S_{12}=4k$，可得 $S_{12}=6k,S_{16}=10k$，所以 $\frac{S_8}{S_{16}}=\frac{3k}{10k}=\frac{3}{10}$.故选 A.

例 19

解析 **解法一**：因为点 $P(3,1)$ 在圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 外，所以直线 AB 的方程为 $(3-1)(x-1)+y=1$，即 $2x+y-3=0$.故选 A.

解法二：如图 2-37 所示，设 $P(3,1)$，圆心 $C(1,0)$，切点分别为 A,B.

由题意可知 $A(1,1)$，$k_{PC}=\frac{1}{2}$.

又 $AB\perp PC$，所以 $k_{AB}=-2$.

故直线 AB 的方程为 $y-1=-2(x-1)$，即 $2x+y-3=0$.故选 A.

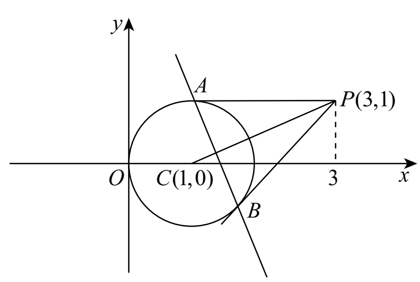


图 2-37

例 19 变式 1

解析 依题意，点 $M(a,b)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$

外,则 $a^2+b^2>1$.

圆心 $O(0,0)$ 到直线 $l:ax+by=1$ 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1=r$,因此直线 $ax+by=1$ 与圆 O 的位置关系是相交.故选 B.

例 19 变式 2

解析 令 $P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$,由题意,过点 P 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线有两条,其中一条为 $x=1$,则切点为 $(1,0)$,设 $A(1,0)$,则 A 为椭圆的右焦点,即 $c=1$,如图 2-38 所示.

由结论十六中的 1(2) 可知直线 AB 方程为 $1\cdot x+\dfrac{1}{2}\cdot y=1$,即 $2x+y-2=0$.设 C 为椭圆的上顶点,可得 $C(0,2)$,即 $c=1,b=2$,所以 $a^2=b^2+c^2=5$,所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

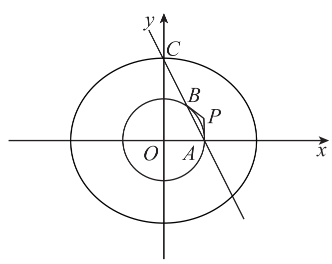


图 2-38

例 20

解析 令 $P(x_0,y_0)$,由结论十七的 1(3) 可知,$k_1k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$.故选 D.

例 20 变式 1

解析 设线段 PQ 中点为 $M(x,y)$,焦点为 F,由结论十七中的 3 可知,$k_{PQ}=\dfrac{2}{y}=k_{MF}=\dfrac{y-0}{x-1}$,可得 $y^2=2(x-1)=2x-2$.故选 B.

例 21

解析 如图 2-39 所示,设 $P(1,-1)$,则有 $k_{AB}\cdot k_{OP}=-\dfrac{b^2}{a^2}$,即 $-\dfrac{b^2}{a^2}=k_{FP}\cdot k_{OP}=\dfrac{0-(-1)}{3-1}\times\dfrac{-1}{1}=-\dfrac{1}{2}$,亦即 $a^2=2b^2$.由 $c^2=a^2-b^2=2b^2-b^2=b^2$,得 $b^2=9$,所以 $a^2=18$,即椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$.故选 D.

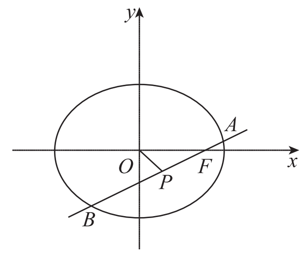


图 2-39

例 21 变式 1

解析 设 PA_2 的斜率为 k_2,PA_1 的斜率为 k_1,则 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$.

又 $k_2\in[-2,-1]$,所以 $k_1\in\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4}\right]$.故选 B.

例 21 变式 2

分析 由结论十七 1(2) 知 $k_{AB}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$,所以要想证明 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$,需证明 k_{AB} 与 k_{PA} 之间的关系,即 $k_{PA}=2k_{AB}=2k_{AC}$.

解析 证明:设 $P(x_0,y_0)$,则 $A(-x_0,-y_0)$,$C(x_0,0)$,$k_{AC}=\dfrac{0+y_0}{x_0-(-x_0)}=\dfrac{y_0}{2x_0}$.

又 $k_{PA}=\dfrac{y_0}{x_0}=k$,所以 $k_{AC}=\dfrac{k}{2}$.由 $k_{BA}\cdot k_{BP}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 知,$k_{BP}\cdot k_{BA}=k_{BP}\cdot k_{AC}=\dfrac{k}{2}\cdot k_{PB}=-\dfrac{2}{4}$,所以 $k_{PB}\cdot k=-1$,即 $PA\perp PB$.

评注 本题为解答题,求解时应对相应结论加以证明.若为填空题或选择题,可直接应用.

例 22

解析 设直线 AE 的方程为 $y=k(x-1)+\dfrac{3}{2}$ $(k\neq0)$,联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-1)+\dfrac{3}{2}\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$,

消去 y 整理,得

$(4k^2+3)x^2+(12k-8k^2)x+4\left(\dfrac{3}{2}-k\right)^2-12=0$,

则 $x_E=\dfrac{4\left(\dfrac{3}{2}-k\right)^2-12}{(4k^2+3)x_A}=\dfrac{(3-2k)^2-12}{4k^2+3}$ ①

同理,设直线 AF 的方程为 $y=-k(x-1)+$

$\frac{3}{2}$，则 $x_F=\frac{(3+2k)^2-12}{4k^2+3}$ ②

所以 $k_{EF}=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=$

$\frac{-k(x_F-1)+\frac{3}{2}-\left[k(x_E-1)+\frac{3}{2}\right]}{x_F-x_E}=$

$\frac{-k(x_F+x_E)+2k}{x_F-x_E}$，将式①，式②代入上式，

化简得 $k_{EF}=\frac{1}{2}$，为定值.

评注 由结论十八(1)知 k_{AB} 实际上是点 P 关于 x 轴的对称点 $(x_0,-y_0)$ 处切线的斜率，即 $k_{EF}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}$.

例 22 变式 1

解析 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(8,4)$，$k_{PA}=k$，$k_{PB}=-k(k\neq0)$，直线 PA 的方程为 $y-4=k(x-8)$，得 $x=\frac{1}{k}(y-4)+8$.

联立 $\begin{cases}x=\frac{1}{k}(y-4)+8\\y^2=2x\end{cases}$，消去 x，

整理得 $y^2=\frac{2}{k}(y-4)+16$，

即 $y^2-\frac{2}{k}y+\frac{8}{k}-16=0$，

得 $y_1+4=\frac{2}{k}$，$x_1=\frac{1}{k}(y_1-4)+8=\frac{1}{k}\left(\frac{2}{k}-8\right)+8$.

同理可得 $y_2+4=\frac{-2}{k}$，

$x_2=-\frac{1}{k}\left(-\frac{2}{k}-8\right)+8=\frac{1}{k}\left(\frac{2}{k}+8\right)+8$.

所以直线 AB 的斜率

$$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{4}{k}}{-\frac{16}{k}}=-\frac{1}{4}.$$

所以直线 AB 的斜率 k_{AB} 为定值，且为 $-\frac{1}{4}$.

评注 由结论十八(3)知，$k_{AB}=-\frac{p}{y_0}=-\frac{1}{4}$.

例 23

分析 要证直线 $y=kx+m$ 过定点，必须知道直线 $l:y=kx+m$ 中 k 与 m 的关系.

解析 证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\y=kx+m\end{cases}$

消 y 得，$3x^2+4(kx+m)^2=12$，

整理得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

则有 $\Delta=(8km)^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)>0$，

即 $m^2<4k^2+3$，且 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+3}\\x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}\end{cases}$ ①

因为以 AB 为直径的圆过椭圆右顶点 $(2,0)$，设 $P(2,0)$，则 $PA\perp PB$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

得 $(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=0$，

即 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=0$，亦即 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

整理得 $(k^2+1)x_1x_2+(km-2)(x_1+x_2)+m^2+4=0$ ②

把式①代入式②化简得 $7m^2+16km+4k^2=0$，得 $m=-2k$ 或 $m=-\frac{2k}{7}$.

(1)当 $m=-2k$ 时，直线 $l:y=kx-2k$ 过右顶点 $(2,0)$，与题意不符，故舍去；

(2)当 $m=-\frac{2k}{7}$ 时，直线 $l:y=kx-\frac{2k}{7}$ 过定点 $\left(\frac{2}{7},0\right)$，且满足 $m^2<4k^2+3$，符合题意.

所以 $l:y=kx+m$ 过定点 $\left(\frac{2}{7},0\right)$.

例 23 变式 1

解析 由题意知 l_{AB} 的斜率不为 0（否则只有一个交点），故可设 $l_{AB}:x=ty+m$，$A(x_1,y_2)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程组 $\begin{cases}y^2=2px\\x=ty+m\end{cases}$，消 x 得，

$y^2-2pty-2pm=0$，从而 $\Delta=(-2pt)^2-4(-2pm)=4p^2t^2+8pm>0$，$pt^2+2m>0$，

$\begin{cases}y_1+y_2=2pt\\y_1y_2=-2pm\end{cases}$ ①

因为以 AB 为直径的圆过顶点 $O(0,0)$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

也即 $(ty_1+m)(ty_2+m)+y_1y_2=0$，

整理得 $(t^2+1)y_1y_2+tm(y_1+y_2)+m^2=0$，

把式①代入上式化简得 $m(m-2p)=0$，

解得 $m=0$ 或 $m=2p$.

(1)当 $m=0$ 时,$x=ty$,l_{AB} 过顶点 $O(0,0)$,与题意不符,故舍去;

(2)当 $m=2p$ 时,$x=ty+2p$,令 $y=0$,得 $x=2p$,所以 l_{AB} 过定点 $(2p,0)$,此时 $m=2p$ 满足 $pt^2+2m>0$.

综上所述,l_{AB} 过定点 $(2p,0)$.

评注 (1)巧设直线方程:$x=ty+m$,对于焦点在 x 轴上的抛物线消 x 后计算得到简化;

(2)当求得 m 有两值时必须讨论,并检验 $\Delta>0$ 是否成立;

(3)一般地,曲线过定点只需把曲线方程变为 $f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$,$\lambda$ 为参数.

由 $\begin{cases}f_1(x,y)=0\\f_2(x,y)=0\end{cases}$,即得定点.此过程称为"参变分离,系常为零".

例如,直线 $x=ty+2p$ 中令参数 t 的系数 y 为 0,可解得 $x=2p$,$y=0$,故直线 $x=ty+2p$ 过定点 $(2p,0)$.

同理,直线 $y=kx+1$ 必过定点 $(0,1)$,故关于直线 l:$x=ty+m$ 过定点问题有以下重要结论:

①若 m 为常数 b,则直线 l 必过定点 $(b,0)$.如本题中 $x=ty+2p$,则直线 l 必过定点 $(2p,0)$;

②若 $m=nt$(其中 n 为常数),则直线 l 必过定点 $(0,-n)$.如 $x=ty+3t=t(y+3)$,则直线 l 必过定点 $(0,-3)$;

③若 $m=nt+b$(其中 n,b 为常数),则直线 l 必过定点 $(b,-n)$.如 $x=ty-3t+2$,即 $x=t(y-3)+2$,则直线 l 必过定点 $(2,3)$.

例 23 变式 2

分析 用向量法的夹角公式 $\cos\angle MON=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|}$ 求角.

解析 由题意知 l 的斜率不为 0(否则 l 与抛物线交于一点),故可设 l:$x=ty+a$,

联立方程组 $\begin{cases}y^2=2px\\x=ty+a\end{cases}$,消 x 得,

$y^2-2pty-2pa=0$,从而 $\Delta=(-2pt)^2+4(2pa)=4p(pt^2+2a)>0$ 成立 $(a,p>0)$.且有

$$\begin{cases}y_1+y_2=2pt\\y_1y_2=-2pa\end{cases} \quad ①$$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=(ty_1+a)(ty_2+a)+y_1y_2=(t^2+1)y_1y_2+at(y_1+y_2)+a^2$.

把式①代入化简得,

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=(t^2+1)(-2pa)+at(2pt)+a^2=a^2-2pa$,所以当 $a=2p$ 时,$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$.

从而 $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}$,即 $\angle MON=90°$.

评注 本题证明了结论十九(3)的逆命题成立,即直线 MN 过定点 $(a,0)$,若 $a=2p$,则 $\angle MON=90°$;同理可证:当 $a>2p$ 时,$\angle MON$ 为锐角;当 $0<a<2p$ 时,$\angle MON$ 为钝角.

例 23 变式 3

解析 由结论十九(3)的逆命题成立可知,当 $a=1$ 时,$\angle AOB=90°$;同理可证,当 $0<a<1$ 时,$\angle AOB>90°$;

当 $a>1$ 时,$\angle AOB$ 为锐角.故若该抛物线上存在点 C,使得 $\angle ACB=90°$,则 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

评注 当 $\angle AOB$ 为锐角或直角时,才存在点 C 满足题意.

例 24

解析 如图 2-40 所示,因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$,所以 $MA\perp MB$,故点 M 在以 AB 为直径的圆上.

又准线为 $x=-2$,直线 AB 经过焦点 $F(2,0)$,由结论二十(2)知 $MF\perp AB$,又 $k_{MF}=\dfrac{2}{-2-2}=-\dfrac{1}{2}$,所以 $k_{AB}=2$.故选 D.

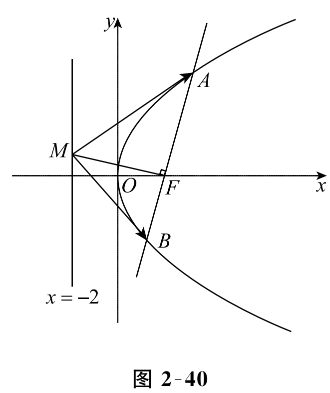


图 2-40

例 24 变式 1

解析 **证法一**:如图 2-41 所示,当 $a=\dfrac{p}{2}$ 时,点 $A\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ 为抛物线的焦点,l 为其准线 $x=-\dfrac{p}{2}$,

由抛物线定义得 $|MA|=|MM_1|$,$|NA|=|NN_1|$,

所以 $\angle MAM_1=\angle MM_1A$,$\angle NAN_1=\angle NN_1A$.

因为 $MM_1\parallel NN_1$,所以 $\angle M_1MA+\angle N_1NA=$

$180°$，所以$\angle MM_1A+\angle MAM_1+\angle NN_1A+\angle NAN_1=180°$，则$\angle MAM_1+\angle NAN_1=90°$，即$\angle M_1AN_1=90°$，故$AM_1\perp AN_1$.

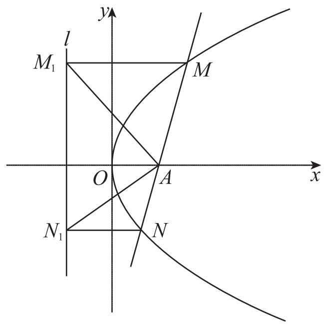


图 2-41

证法二：依题意，可设直线MN的方程为$x=my+a$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则有$M_1(-a,y_1)$，$N_1(-a,y_2)$. 由$\begin{cases}x=my+a\\y^2=2px\end{cases}$，

消去x，可得$y^2-2mpy-2ap=0$，

故$\begin{cases}y_1+y_2=2mp & ①\\y_1\cdot y_2=-2ap & ②\end{cases}$

当$a=\dfrac{p}{2}$时，点$A\left(\dfrac{p}{2},0\right)$为抛物线的焦点，$l$为其准线$x=-\dfrac{p}{2}$，此时$M_1\left(-\dfrac{p}{2},y_1\right)$，$N_1\left(-\dfrac{p}{2},y_2\right)$.

由式②可得$y_1\cdot y_2=-p^2$.

因为$\overrightarrow{AM_1}=(-p,y_1)$，$\overrightarrow{AN_1}=(-p,y_2)$，所以$\overrightarrow{AM_1}\cdot\overrightarrow{AN_1}=p^2+y_1y_2=0$，即$AM_1\perp AN_1$.

证法三：因为$k_{AM_1}=-\dfrac{y_1}{p}$，$k_{AN_1}=-\dfrac{y_2}{p}$，由证法二知，$y_1y_2=-p^2$，所以$k_{AM_1}\cdot k_{AN_1}=-1$，即$AM_1\perp AN_1$.

例 25

解析　设双曲线C_2的方程为$\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1$，则有$a_2^2+b_2^2=c_2^2=c_1^2=4-1=3$. 又四边形$AF_1BF_2$为矩形，所以焦点$\triangle AF_1F_2$的面积为$b_1^2\tan45°=\dfrac{b_2^2}{\tan45°}$，

即$b_2^2=b_1^2=1$. 所以$a_2^2=c_2^2-b_2^2=3-1=2$.

故双曲线的离心率$e=\dfrac{c_2}{a_2}=\sqrt{\dfrac{c_2^2}{a_2^2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

故选 D.

例 25 变式 1

解析　在焦点$\triangle PF_1F_2$中，$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，故$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|$. 又$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，则$(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|=|F_1F_2|^2$，

即$4a^2-2|PF_1||PF_2|=4c^2$，

所以$|PF_1||PF_2|=2b^2$，

则$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2=9$，故$b=3$.

评注　本题$\angle F_1PF_2=90°$，由结论二十一(1)知$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\cdot\tan45°=b^2=9$，易得$b=3$.

例 25 变式 2

解析　设点M到x轴的距离为h. 由$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$可知$\angle F_1MF_2=90°$.

由双曲线的方程可得$a^2=1$，$b^2=2$，则$c^2=3$，即$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$. 由结论二十一(2)得，

$S_{\triangle F_1F_2M}=\dfrac{2}{\tan\dfrac{90°}{2}}=2$.

又$S_{\triangle F_1F_2M}=\dfrac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot h$，

所以$\sqrt{3}\cdot h=2$，得$h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

例 25 变式 3

解析　证明：点P在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上，又在双曲线$\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$上，

由结论二十一(1)得，$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cdot\tan\alpha$，

由结论二十一(2)得，$S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{n^2}{\tan\alpha}$，

则$b^2\cdot\tan\alpha=\dfrac{n^2}{\tan\alpha}$. 所以$\tan^2\alpha=\dfrac{n^2}{b^2}$.

因为$0<2\alpha<180°$，所以$0<\alpha<90°$，

故$\tan\alpha=\dfrac{n}{b}$.