活用二级结论

结论一　奇函数的最值性质

已知函数 f(x)是定义在区间 D 上的奇函数,则对任意的 x∈D,都有 f(x)+f(-x)=0.特别地,若奇函数 f(x)在 D 上有最值,则 $f(x)_{max}+f(x)_{min}=0$,且若 0∈D,则 f(0)=0.

例 1　已知函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 均为奇函数，$h\left(x\right)=af\left(x\right)+bg\left(x\right)+2$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上有最大值 5，那么 $h\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上的最小值为

A. －5　　B. －3　　C. －1　　D. 5

【答案】C

【解析】令 $F\left(x\right)=h\left(x\right)-2=af\left(x\right)+bg\left(x\right)$，因为 $F\left(x\right)$ 为奇函数，$\because x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$h\left(x\right)\le 5$，$F\left(x\right)=h\left(x\right)-2\le 3$，又 $x\in\left(-\infty,0\right)$ 时，$-x\in\left(0,+\infty\right)$，$F\left(-x\right)\le 3\Rightarrow F\left(x\right)\ge -3$，$\therefore h\left(x\right)\ge -3+2=-1$，故选 C.

【变式训练】

1．已知函数 $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{x^2+\sin x+2017}{x^2+2017}$，则 $\sum\limits_{i=0}^{2017}f\left(\dfrac{i}{2017}\right)=$______.

2．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+cosx-sinx+1}{x^2+cosx+1}$ $(x\in\mathrm{R})$ 的最大值为M，最小值为m，则M＋m＝______________.

结论二　　函数周期性问题

已知定义在 R 上的函数 f(x),若对任意 x∈R,总存在非零常数 T,使得 f(x+T)=f(x),则称 f(x)是周期函数,T 为其一个周期.除周期函数的定义外,还有一些常见的与周期函数有关的结论如下:学*-++-科网

(1)如果 f(x+a)=-f(x)(a≠0),那么 f(x)是周期函数,其中的一个周期 T=2a.

(2)如果 f(x+a)=$\dfrac{1}{f(x)}$(a≠0),那么 f(x)是周期函数,其中的一个周期 T=2a.

(3)如果 f(x+a)+f(x)=c(a≠0),那么 f(x)是周期函数,其中的一个周期 T=2a.

(4)如果 f(x)=f(x+a)+f(x-a)(a≠0),那么 f(x)是周期函数,其中的一个周期 T=6a.

例 2【山东省德州市 2019 届高三期末联考】已知定义在R的奇函数$f(x)$满足$f(x+2)=-f(x)$，当$0\le x\le 1$时，$f(x)=x^2$，则$f(2019)=$（　）

A. 2019^2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

【答案】D

【解析】

根据题意，函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，则有 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即函数是周期为 4 的周期函数，

则 $f(2019)=f(-1+2020)=f(-1)$，

又由函数为奇函数，则 $f(-1)=-f(1)=-(1)^2=-1$；

则 $f(2019)=-1$；

故选：D. 学@科网

【变式训练】

1.【2018 山西太原第五中学模拟】已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(3-x)+f(x)=0$，且当 $x\in\left(-\frac{3}{2},0\right)$ 时，$f(x)=\log_2(2x+7)$，则 $f(2017)=$

A. $-\log_2 5$　　B. 2　　C. -2　　D. $\log_2 5$

2. 已知函数 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数，且 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=x$，则 $f\left(\frac{21}{2}\right)=$ ______.

结论三　函数的对称性

已知函数 f(x)是定义在 R 上的函数.

(1)若 f(a+x)=f(b−x)恒成立,则 y=f(x)的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称,特别地,若 f(a+x)=f(a−x)恒成立,则 y=f(x)的图象关于直线 x=a 对称;

(2)若 f(a+x)+f(b−x)=c,则 y=f(x)的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 对称.特别地,若 f(a+x)+f(a−x)=2b 恒成立,则 y=f(x)的图象关于点(a,b)对称.

例 3【2018 四川省广元市统考】已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)+f(1-x)=2$，$g(x)=(x-1)^3+1$，若函数 $f(x)$ 图象与函数 $g(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{2018},y_{2018})$，则 $\sum_{i=1}^{2018}(x_i+y_i)=$（　）

A. 8072　　B. 6054　　C. 4036　　D. 2018

【答案】B

【解析】由题意知，函数 $g(x)=(x-1)^3+1$ 的图象也关于点（1,1）对称．

故 $\sum_{i=1}^{2018}x_i=(x_1+x_{2018})+(x_2+x_{2017})+\cdots+(x_{1009}+x_{1010})=1009\times2=2018$，

$\sum_{i=1}^{2018}y_i=(y_1+y_{2018})+(y_2+y_{2017})+\cdots+(y_{1009}+y_{1010})=1009\times2=2018$

所以 $\sum_{i=1}^{2018}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{2018}x_i+\sum_{i=1}^{2018}y_i=2\times2018=4036$．选 C．

【变式训练】

1. 【2018 安徽省六安市第一中学模拟】设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f(x+2)=f(2-x)$，

当 $x\in[-2,0]$ 时， $f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x-1$，若在区间 $(-2,6)$ 内关于 x 的方程

$f(x)-\log_a(x+2)=0(a>0,a\neq1)$ 有且只有 4 个不同的根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\frac{1}{4},1\right)$　　B. $(1,4)$　　C. $(1,8)$　　D. $(8,+\infty)$

2.【2019 年安徽省宿州市十三所重点中学】定义在R上的偶函数$y=f(x)$，其图像关于点$(\frac{1}{2},0)$对称，且当

$x\in[0,1]$时，$f(x)=-x+\frac{1}{2}$，则$f(\pi)=$（　　）

A. $\frac{9}{2}-\pi$　　B. $\frac{7}{2}-\pi$　　C. $\pi-\frac{3}{2}$　　D. $\pi-\frac{7}{2}$

结论四　反函数的图象与性质

若函数 y=f(x)是定义在非空数集 D 上的单调函数,则存在反函数 $y=f^{-1}(x)$.特别地,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$互为反函数,两函数图象在同一直角坐标系内关于直线 y=x 对称,即$(x_0,\ f(x_0))$与$(f(x_0),x_0)$分别在函数 y=f(x)与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象上.

例 4【2019 年上海市浦东新区】已知函数$f(x)=a^x+b$的图像经过点$(1,7)$,反函数$f^{-1}(x)$的图像经过点$(4,0)$.

（1）求$y=f(x)$的解析式;

（2）求证：$F(x)=f(x)-f(-x)$是增函数.

【答案】(1) $f(x)=4^x+3$ (2) 见证明

【解析】

(1) 由题意可得：$\begin{cases}a+b=7\\a^0+b=4\end{cases}$，∴$\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$，

∴$f(x)=4^x+3$

（2）$F(x)=f(x)-f(-x)=4^x-4^{-x}$，

任取x_1、$x_2\in R$且$x_1<x_2$，

$F(x_1)-F(x_2)=(4^{x_1}-4^{-x_1})-(4^{x_2}-4^{-x_2})$

$=\left(4^{x_1}-4^{x_2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4^{x_1+x_2}}\right)$

∵$x_1<x_2$

∴$4^{x_1}-4^{x_2}<0$

又$1+\frac{1}{4^{x_1+x_2}}>0$

∴$\left(4^{x_1}-4^{x_2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4^{x_1+x_2}}\right)<0$

∴$F(x_1)<F(x_2)$

∴$F(x)$是增函数. 学科@网

【变式训练】【2018 四川省成都市 9 校联考】已知函数 $f(x)=x^2-ax$（$\frac{1}{e}\le x\le e$， e为自然对数的底数）与 $g(x)=e^x$ 的图象上存在关于直线 $y=x$ 对称的点，则实数 a 取值范围是

A. $\left[1,e+\frac{1}{e}\right]$ B. $\left[1,e-\frac{1}{e}\right]$ C. $\left[e-\frac{1}{e},e+\frac{1}{e}\right]$ D. $\left[e-\frac{1}{e},e\right]$

结论五 两个经典不等式

(1) 对数形式：$\frac{x}{x+1}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x\ (x>-1)$，当且仅当 x=0 时，等号成立.

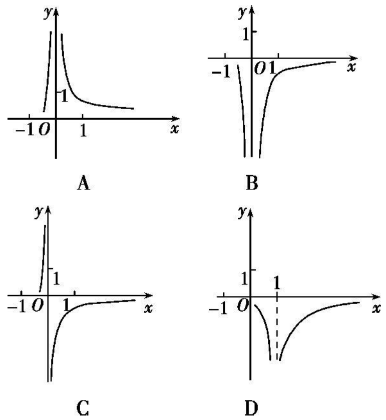
(2) 指数形式：$e^x\geqslant x+1\ (x\in R)$，当且仅当 x=0 时，等号成立.

例 5 设函数 $f(x)=1-e^{-x}$. 证明：当 $x>-1$ 时，$f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$.

证明 $x>-1$ 时，$f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow x>-1,\ 1-e^{-x}\geqslant\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow 1-\frac{x}{x+1}\geqslant e^{-x}\ (x>-1)\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}\geqslant\frac{1}{e^x}\ (x>-1)\Leftrightarrow x+1\leqslant e^x\ (x>-1)$.

当 x>-1 时, $e^x \geqslant x+1$ 恒成立, 所以当 x>-1 时, $f(x) \geqslant \frac{x}{x+1}$.

【变式训练】1. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x+1)-x}$, 则 y=f(x)的图象大致为(　　)



2. 已知函数 $f(x)=e^x$, x∈R. 证明: 曲线 y=f(x)与曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 有唯一公共点.

结论六　三点共线的充要条件

设平面上三点 O, A, B 不共线, 则平面上任意一点 P 与 A, B 共线的充要条件是存在实数 λ 与 μ, 使得 $\vec{OP}=\lambda\vec{OA}+\mu\vec{OB}$, 且 λ+μ=1. 特别地, 当 P 为线段 AB 的中点时, $\vec{OP}=\frac{1}{2}\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OB}$.

例 6【福建省厦门市 2019 届高三上期末】在平面四边形$ABCD$中，ΔACD面积是ΔABC面积的 2 倍，数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，且$\vec{CA}=(a_{n+1}-3)\vec{CB}+(a_n-2)\vec{CD}$，则$a_5=$（　）

A．31　　B．33　　C．63　　D．65

【答案】B

【解析】

设AC和BD交于点E，ΔACD和ΔABC的高分别为h_1, h_2，

∵ΔACD的面积是ΔABC面积的 2 倍，∴$h_1=2h_2 \Rightarrow |DE|=2|EB|$，

∴$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EB}$，即$\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=2(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CE})$，

∴$\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，

又$\overrightarrow{CA}=(a_{n+1}-3)\overrightarrow{CB}+(a_n-2)\overrightarrow{CD}$，

由A, C, E三点共线，设$\overrightarrow{CA}=\lambda\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{CD}$，

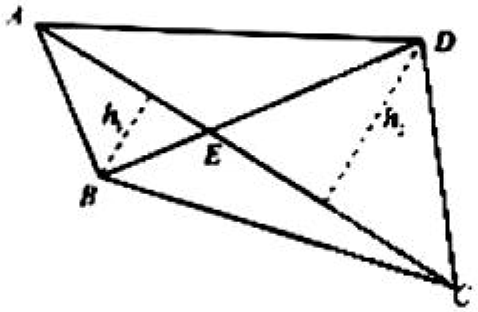
由平面向量基本定理得$\begin{cases} a_{n+1}-3=\frac{2}{3}\lambda \\ a_n-2=\frac{1}{3}\lambda \end{cases}$，

∴$a_{n+1}-3=2(a_n-2)$，即$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$，

∴数列$\{a_n-1\}$是以$a_1-1=2$为首项，以 2 为公比的等比数列，学科*网

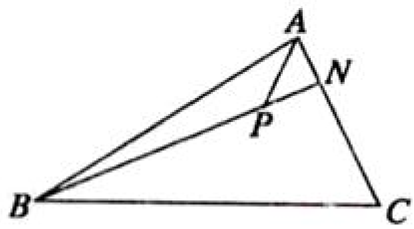
∴$a_n-1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，即$a_n=2^n+1$，

所以$a_5=32+1=33$.



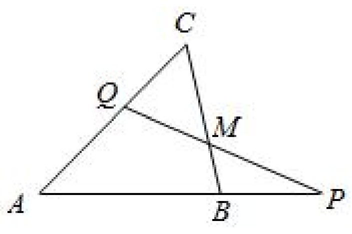
【变式训练】

1.【2018 河南省郑州市质量检测】如图，在$\triangle ABC$中，N为线段AC上靠近A的三等分点，点P在BN上且$\overrightarrow{AP}=\left(m+\frac{2}{11}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{BC}$，则实数$m$的值为（　　）



A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{9}{11}$　　D. $\frac{5}{11}$

2.【河北省唐山一中 2019 届高三上期中】如图，在△ABC 中，$\vec{CM}=2\vec{MB}$，过点 M 的直线分别交射线 AB、AC 于不同的两点 P、Q，若$\vec{AP}=m\vec{AB},\vec{AQ}=n\vec{AC}$，则$mn+m$的最小值为（　）



A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 6　　D. $6\sqrt{3}$

结论七　三角形“四心”向量形式的充要条件

设O为△ABC所在平面上一点，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，则

(1)O为△ABC的外心⇔$|\vec{OA}|=|\vec{OB}|=|\vec{OC}|=\dfrac{a}{2\sin A}$.

(2)O为△ABC的重心⇔$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=0$.

(3)O为△ABC的垂心⇔$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\vec{OB}\cdot\vec{OC}=\vec{OC}\cdot\vec{OA}$.

(4)O为△ABC的内心⇔$a\vec{OA}+b\vec{OB}+c\vec{OC}=0$.

例7【2019年吉林省辽源市田家炳高级中学】在△ABC中，点M是BC的中点，AM=1，点P在AM上，且满足AP=2PM，则$\vec{PA}\cdot(\vec{PB}+\vec{PC})$等于(　　)

A．$-\dfrac{4}{3}$　　B．$-\dfrac{4}{9}$　　C．$\dfrac{4}{3}$　　D．$\dfrac{4}{9}$

【答案】B

【解析】

∵M是BC的中点，知AM是BC边上的中线，

又由点P在AM上且满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$

∴P是三角形ABC的重心

∴$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AP}=-|\overrightarrow{PA}|^2$

又∵AM=1

∴$|\overrightarrow{PA}|=\frac{2}{3}$

∴$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=-|\overrightarrow{PA}|^2=-\frac{4}{9}$.

【变式训练】

1.【吉林省长春市实验中学2019届高三上学期期中】点M为ΔABC的重心，$AB=2,BC=1,\angle ABC=60^\circ$，则$\vec{AM}\cdot\vec{AC}=$(　　)

A．1　　B．$\frac{2}{3}\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

2.O是平面上一定点，A、B、C是平面上不共线的三个点，动点P满足$\vec{OP}=\dfrac{\vec{OB}+\vec{OC}}{2}+\lambda\vec{AP}$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则P的轨迹一定通过△ABC的(　　)

A.外心　B.内心　C.重心　D.垂心

3.O是平面上一定点，A，B，C是平面上不共线的三个点，动点P满足$\vec{OP}=\vec{OA}+\lambda\left(\dfrac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\dfrac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则P的轨迹一定通过△ABC的(　　)

A.外心　B.内心　C.重心　D.垂心

4.【吉林省长春市实验中学2019届高三期末】A、B、C是平面上不共线的三点，O为ΔABC所在平面内一点，D是AB的中点，动点P满足$\vec{OP}=\frac{1}{3}[(2-2\lambda)\vec{OD}+(1+2\lambda)\vec{OC}](\lambda\in R)$，则点$P$的轨迹一定过$\Delta ABC$____心（内心、外心、垂心或重心）. 学科&网

结论八　等差数列

设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和.

(1) $a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d, p+q=m+n\Rightarrow a_p+a_q=a_m+a_n (m,n,p,q\in N^*)$.

(2) $a_p=q, a_q=p (p\neq q)\Rightarrow a_{p+q}=0$.

(3) $S_k, S_{2k}-S_k, S_{3k}-S_{2k},\cdots$构成的数列是等差数列.

(4) $\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}n+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)$是关于n的一次函数或常函数,数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列.

(5) $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\frac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$.

(6)若等差数列$\{a_n\}$的项数为偶数2m,公差为d,所有奇数项之和为$S_{奇}$,所有偶数项之和为$S_{偶}$,则所有项之和$S_{2m}=m(a_m+a_{m+1})$, $S_{偶}-S_{奇}=md$, $\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{a_{m+1}}{a_m}$.

(7)若等差数列$\{a_n\}$的项数为奇数2m-1,所有奇数项之和为$S_{奇}$,所有偶数项之和为$S_{偶}$,则所有项之和$S_{2m-1}=(2m-1)a_m$, $S_{奇}=ma_m$, $S_{偶}=(m-1)a_m$, $S_{奇}-S_{偶}=a_m$, $\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{m}{m-1}$.

(8)若$S_m=n, S_n=m (m\neq n)$,则$S_{m+n}=-(m+n)$.

(9) $S_{m+n}=S_m+S_n+mnd$.

例8【广东省揭阳市2019届高三学业水平考试】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=-\frac{1}{9}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{8a_n+1}$ $(n\in N^*)$，则数列$\{a_n\}$中最大项的值为______.

【答案】$\frac{1}{7}$

【解析】

由$a_{n+1}=\frac{a_n}{8a_n+1}$得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{8a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+8\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=8$，

即数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是公差为8的等差数列，故$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\times 8=8n-17$，所以$a_n=\frac{1}{8n-17}$,

当$n=1,2$时$a_n<0$；当$n\geq 3$时，$a_n>0$，数列$\{a_n\}$递减，故最大项的值为$a_3=\frac{1}{7}$.

【变式训练】

1. 等差数列$\{a_n\}$共有$3m$项，若前$2m$项的和为200，前$3m$项的和为225，则中间m项的和为（　）

A. 50　B. 75　C. 100　D. 125

2. 【2018宁夏育才中学模拟】已知无穷等差数列$\{a_n\}$的公差$d>0$，$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_5<0$，则下列结论中正确的是（　）

A. $\{S_n\}$是递增数列　B. $\{S_n\}$是递减数列

C. S_{2n}有最小值　D. S_{2n}有最大值

3.【四川省广元市2019届高三第一次高考适应】已知方程$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，则$|m-n|=$_____.

结论九　等比数列

已知等比数列$\{a_n\}$，公比为q，前n项和为S_n.

(1)$a_n=a_m\cdot q^{n-m}$，$a_{n+m}=a_nq^m=a_mq^n(m,n\in N^*)$.

(2)若m+n=p+q，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q(m,n,p,q\in N^*)$；反之，不一定成立.

(3)$a_1a_2a_3\cdots a_m$，$a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_{2m}$，$a_{2m+1}a_{2m+2}\cdots a_{3m}$，…成等比数列$(m\in N^*)$.

(4)公比$q\neq -1$时，S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…成等比数列$(n\in N^*)$.

(5)若等比数列的项数为$2n(n\in N^*)$，公比为q，奇数项之和为$S_奇$，偶数项之和为$S_偶$，则$\frac{S_偶}{S_奇}=q$.

(6)$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等比数列，则$\{\lambda a_n\}$，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$，$\{a_nb_n\}$，$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$也是等比数列$(\lambda\neq 0,n\in N^*)$. xk-*/w

(7)通项公式$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$. 从函数的角度来看，它可以看作是一个常数与一个关于n的指数函数的积，其图象是指数函数图象上一群孤立的点. 学科#网

(8)与等差中项不同，只有同号的两个数才能有等比中项；两个同号的数的等比中项有两个，它们互为相反数.

(9)三个数成等比数列，通常设为$\frac{x}{q}$，x，xq；四个数成等比数列，通常设为$\frac{x}{q^3}$，$\frac{x}{q}$，xq，xq^3.

例9【吉林省高中2019届高三上期末】在递增的等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=6$，且$4(a_3-a_2)=a_4-6$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n = a_n + 2n - 1$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

【答案】（1）$a_n = 2 \times 3^{n-1}$ （2）$S_n = 3^n - 1 + n^2$

【解析】

（1）设公比为q，由$4(a_3 - a_2) = a_4 - 6$，得$4(6q - 6) = 6q^2 - 6$，

化简得$q^2 - 4q + 3 = 0$，解得$q = 3$或$q = 1$，

因为等比数列$\{a_n\}$是递增的，所以$q = 3$，$a_1 = 2$，

所以$a_n = 2 \times 3^{n-1}$.

（2）由（1）得$b_n = 2 \times 3^{n-1} + 2n - 1$，

所以$S_n = (2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \times 3^{n-1}) + (1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1)$，

则$S_n = \dfrac{2 \times (1 - 3^n)}{1 - 3} + \dfrac{n(1 + 2n - 1)}{2}$，

所以$S_n = 3^n - 1 + n^2$.

【变式训练】

1.【2018 西藏拉萨一模】已知等比数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，若$a_1 = -24$，$a_4 = -\dfrac{8}{9}$，则当T_n取得最大值时，n的值为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

2.【广东省惠州市 2019 届高三第三次调研】已知公差为正数的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_2 \cdot a_3 = 40$，$S_4 = 26$，数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n = 2^{n+1} - 2(n \in N^*)$。

（1）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n \cdot b_n\}$的前n项和M_n.

结论十　多面体的外接球和内切球

1. 长方体的体对角线长 d 与共顶点的三条棱的长 a, b, c 之间的关系为 $d^2=a^2+b^2+c^2$;若长方体外接球的半径为 R, 则有 $(2R)^2=a^2+b^2+c^2$.

2. 棱长为 a 的正四面体内切球半径 $r=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$, 外接球半径 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

例 10【四川省泸州市 2019 届高三第一次诊断】已知三棱锥$S-ABC$的所有顶点都在同一球面上，底面ABC是正三角形且和球心O在同一平面内，若此三棱锥的最大体积为$16\sqrt{3}$，则球O的表面积等于__________.

【答案】64π

【解析】

$\because \Delta ABC$与球心O在同一平面内，$\therefore O$是ΔABC的外心，

设球半径为R，

则ΔABC的边长$a=\sqrt{3}R$，

$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3}R)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$，

当S到ΔABC所在面的距离为球的半径R时，

$S-ABC$体积最大，

$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\times R=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\sqrt{3}R^2\times R=16\sqrt{3}$，

$\therefore R^3=64, R=4$，

球表面积为$4\pi R^2=4\pi\times 16=64\pi$，故答案为$64\pi$.

【变式训练】

1.《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑，若三棱锥$P-ABC$为鳖臑，$PA\perp$平面$ABC, PA=3, AB=4, AC=5$，三棱锥$P-ABC$的四个顶点都在球O的球面上，则球O的表面积为（ ）

A. 17π　　B. 25π　　C. 34π　　D. 50π

2. 球 O 的球心为点 O，球 O 内切于底面半径为$\sqrt{3}$、高为 3 的圆锥，三棱锥 V－ABC 内接于球 O，已知 OA⊥OB，AC⊥BC，则三棱锥 V－ABC 的体积的最大值为_____.

结论十一　焦点三角形的面积公式

(1) 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>0) 中，F_1, F_2 分别为左、右焦点，P 为椭圆上一点，则$\triangle PF_1F_2$的面积$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}$，其中$\theta=\angle F_1PF_2$.

(2) 在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>0, b>0) 中，F_1, F_2 分别为左、右焦点，P 为双曲线上一点，则$\triangle PF_1F_2$的面积$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$，其中$\theta=\angle F_1PF_2$.

例 11　已知椭圆的中心在原点，对称轴为坐标轴，F_1、F_2 为焦点，点 P 在椭圆上，直线 PF_1 与 PF_2 倾斜角的差为 $90°$，△F_1PF_2 的面积是 20，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，求椭圆的标准方程.

【解析】设 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $\theta=90°$． $\because\ S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=b^2\tan 45°=b^2=20$，

又 $\because\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore\ 1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{9}$，即 $1-\frac{20}{a^2}=\frac{5}{9}$.

解得：$a^2=45$.

$\therefore$ 所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ 或 $\frac{y^2}{45}+\frac{x^2}{20}=1$.

【变式训练】

1. 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的点，F_1、F_2 分别是椭圆的左、右焦点，若 $\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|}=\frac{1}{2}$，则△$F_1PF_2$ 的面积为（　　）

A. $3\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 两焦点为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，直线 PF_1，PF_2 倾斜角之差为 $\frac{\pi}{3}$，则△F_1PF_2 面积为(　　)

A．$16\sqrt{3}$　　B．$32\sqrt{3}$　　C．32　　D．42

结论十二　圆锥曲线的切线问题

1. 过圆 C:$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$.

2. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

3. 已知点 $M(x_0,y_0)$，抛物线 C:$y^2=2px(p\neq0)$ 和直线 $l:y_0y=p(x+x_0)$.

(1) 当点 M 在抛物线 C 上时，直线 l 与抛物线 C 相切，其中 M 为切点，l 为切线.

(2)当点 M 在抛物线 C 外时,直线 l 与抛物线 C 相交,其中两交点与点 M 的连线分别是抛物线的切线,即直线 l 为切点弦所在的直线.

(3)当点 M 在抛物线 C 内时,直线 l 与抛物线 C 相离.

例 12　已知抛物线 C:$x^2=4y$,直线 l:x-y-2=0,设 P 为直线 l 上的点,过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA,PB,其中 A,B 为切点,当点 P(x_0,y_0)为直线 l 上的定点时,求直线 AB 的方程.

解析　联立方程得$\begin{cases} x^2=4y, \\ x-y-2=0, \end{cases}$

消去 y,整理得 $x^2-4x+8=0$,

$\Delta=(-4)^2-4\times8=-16<0$,故直线 l 与抛物线 C 相离.

由结论知,P 在抛物线外,故切点弦 AB 所在的直线方程为 $x_0x=2(y+y_0)$,即 $y=\frac{1}{2}x_0x-y_0$.

【变式训练】

1.过点(3,1)作圆$(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线,切点分别为 A,B,则直线 AB的方程为(　　)

A.2x+y-3=0　B.2x-y-3=0

C.4x-y-3=0　D.4x+y-3=0

2.设椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,点 P$\left(1,\frac{3}{2}\right)$,则椭圆 C 在点 P 处的切线方程为________________.

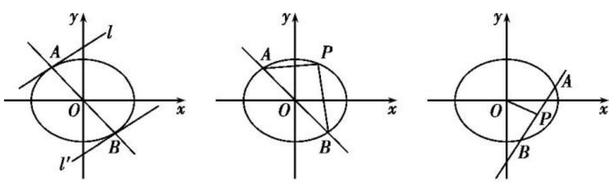
结论十三　圆锥曲线的中点弦问题

1.在椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中:

(1)如图①所示,若直线 y=kx(k≠0)与椭圆 E 交于 A,B 两点,过 A,B 两点作椭圆的切线 l,l',有 l∥l',设其斜率为 k_0,则 $k_0\cdot k=-\frac{b^2}{a^2}$.

(2)如图②所示,若直线 y=kx 与椭圆 E 交于 A,B 两点,P 为椭圆上异于 A,B 的点,若直线 PA,PB 的斜率存在,且分别为 k_1,k_2,则 $k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2}$.

(3)如图③所示,若直线 y=kx+m(k≠0 且 m≠0)与椭圆 E 交于 A,B 两点,P 为弦 AB 的中点,设直线 PO 的斜率为 k_0,则 $k_0\cdot k=-\frac{b^2}{a^2}$.



图①　图②　图③

2.在双曲线 E:$\frac{x^2}{a^2}$-$\frac{y^2}{b^2}$=1(a>0,b>0)中,类比上述结论有:

(1)$k_0\cdot k=\frac{b^2}{a^2}$.

(2)$k_1\cdot k_2=\frac{b^2}{a^2}$.

(3)$k_0\cdot k=\frac{b^2}{a^2}$.

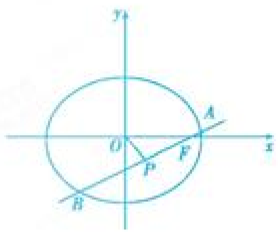
例 13　已知椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1(a>b>0)的右焦点为 F(3,0),过点 F 的直线交椭圆 E 于 A,B 两点.若 AB 的中点坐标为(1,-1),则椭圆 E 的方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}$=1　B.$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}$=1

C.$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}$=1　D.$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}$=1

答案　D

解析

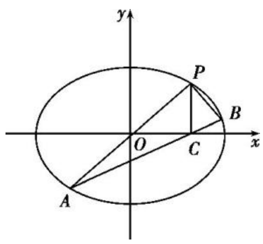


如图所示,设 P(1,-1),则有 $k_{AB}\cdot k_{OP}=-\frac{b^2}{a^2}$.

即$-\frac{b^2}{a^2}=k_{PF}\cdot k_{OP}=\frac{0-(-1)}{3-1}\times\frac{-1}{1}=-\frac{1}{2}$,即 $a^2=2b^2$,故选 D.

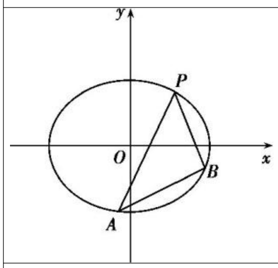
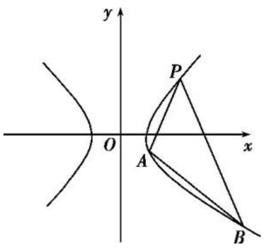
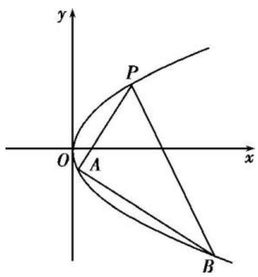
【变式训练】1.椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}$=1 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,点 P 在椭圆 C 上且直线 PA_2 的斜率的取值范围是[-2,-1],那么直线 PA_1 的斜率的取值范围是________.

2.如图所示,在平面直角坐标系 xOy 中,过坐标原点的直线交椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$=1 于 P,A 两点,其中 P 在第一象限,过 P 作 x 轴的垂线,垂足为 C,连接 AC,并延长交椭圆于点 B,设直线 PA 的斜率为 k.对任意 k>0,求证:PA⊥PB.



结论十四　圆锥曲线中的一类定值问题

在圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)中,曲线上的一定点P(非顶点)与曲线上的两动点A,B满足直线PA与PB的斜率互为相反数(倾斜角互补),则直线AB的斜率为定值.

图示	条件	结论
	已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,定点$P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$在椭圆上,设A,B是椭圆上的两个动点,直线PA,PB的斜率分别为k_{PA},k_{PB},且满足$k_{PA}+k_{PB}=0$.	直线AB的斜率k_{AB}为定值$\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.
	已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$,定点$P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$在双曲线上,设A,B是双曲线上的两个动点,直线PA,PB的斜率分别为k_{PA},k_{PB},且满足$k_{PA}+k_{PB}=0$.	直线AB的斜率k_{AB}为定值$-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.
	已知抛物线$y^2=2px(p>0)$,定点$P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$在抛物线上,设A,B是抛物线上的两个动点,直线PA,PB的斜率分别为k_{PA},k_{PB},且满足$k_{PA}+k_{PB}=0$.	直线AB的斜率k_{AB}为定值$-\frac{p}{y_0}$.

例14　已知抛物线$C:y^2=2x$,定点$P(8,4)$在抛物线上,设A,B是抛物线上的两个动点,直线PA,PB的斜率分别为k_{PA},k_{PB},且满足$k_{PA}+k_{PB}=0$.证明:直线AB的斜率k_{AB}为定值,并求出该定值.

解析　设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$k_{PA}=k$,

则$k_{PB}=-k(k\neq0)$,又$P(8,4)$,

所以直线PA的方程为$y-4=k(x-8)$,

即 $y=kx+4-8k$,联立方程得$\begin{cases}y=kx+4-8k,\\ y^2=2x,\end{cases}$消去 y 得 $k^2x^2+(8k-16k^2-2)x+(4-8k)^2=0$,$8x_1=\frac{(4-8k)^2}{k^2}$,得

$x_1=\frac{(4-8k)^2}{8k^2}$,

同理可得 $x_2=\frac{(4+8k)^2}{8k^2}$,$x_2-x_1=\frac{(4+8k)^2}{8k^2}-\frac{(4-8k)^2}{8k^2}=\frac{128k}{8k^2}=\frac{16}{k}$,$x_1+x_2=\frac{16+64k^2}{8k^2}\times 2=\frac{4+16k^2}{k^2}$,因为

$y_1=kx_1+4-8k$,$y_2=-kx_2+4+8k$,

故 $y_2-y_1=-k(x_1+x_2)+16k=-k\times\frac{4+16k^2}{k^2}+16k=\frac{-4}{k}$,故 $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-\frac{4}{k}}{\frac{16}{k}}=-\frac{1}{4}$,所以直线 AB 的斜率 k_{AB} 为定值,且为$-\frac{1}{4}$.

【变式训练】已知椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,A 为椭圆上的定点,若其坐标为 A$\left(1,\frac{3}{2}\right)$,E,F 是椭圆 C 上的两个动点,如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数.证明:直线 EF 的斜率为定值,并求出这个定值.

结论十五　圆锥曲线中的一类定点问题

若圆锥曲线中内接直角三角形的直角顶点与圆锥曲线的顶点重合,则斜边所在直线过定点.

(1)对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>b>0)上异于右顶点的两动点 A,B,以 AB 为直径的圆经过右顶点(a,0),则直线 l_{AB} 过定点$\left(\frac{(a^2-b^2)a}{a^2+b^2},0\right)$.同理,当以 AB 为直径的圆过左顶点(-a,0)时,直线 l_{AB} 过定点$\left(-\frac{(a^2-b^2)a}{a^2+b^2},0\right)$.

(2)对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a>0,b>0)上异于右顶点的两动点 A,B,以 AB 为直径的圆经过右顶点(a,0),则直线 l_{AB} 过定点$\left(\frac{(a^2+b^2)a}{a^2-b^2},0\right)$.同理,对于左顶点(-a,0),则定点为$\left(-\frac{(a^2+b^2)a}{a^2-b^2},0\right)$.

(3)对于抛物线 $y^2=2px$(p>0)上异于顶点的两动点 A,B,若$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$,则弦 AB 所在直线过点(2p,0).同理,抛物线 $x^2=2py$(p>0)上异于顶点的两动点 A,B,若$\vec{OA}\perp\vec{OB}$,则直线 AB 过定点(0,2p).

例 15　已知抛物线 $y^2=2px$(p>0)上异于顶点的两动点 A,B 满足以 AB 为直径的圆过顶点.

求证:AB 所在的直线过定点,并求出该定点的坐标.

解析　由题意知 l_{AB} 的斜率不为 0(否则只有一个交点),故可设 l_{AB}:$x=ty+m$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}y^2=2px,\\ x=ty+m\end{cases}$消去 x 得 $y^2-2pty-2pm=0$,从而 $\Delta=(-2pt)^2-4(-2pm)=4p^2t^2+8pm>0$,即 $pt^2+2m>0$,$\begin{cases}y_1+y_2=2pt,\\ y_1y_2=-2pm.\end{cases}$①

因为以 AB 直径的圆过顶点 O(0,0),所以$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$,即 $x_1x_2+y_1y_2=0$,也即$(ty_1+m)(ty_2+m)+y_1y_2=0$,把式①代入化简得 $m(m-2p)=0$,得 m=0 或 m=2p.

(1)当 $m=0$ 时,$x=ty$,l_{AB} 过顶点 $O(0,0)$,与题意不符,故舍去;

(2)当 $m=2p$ 时,$x=ty+2p$,令 $y=0$,得 $x=2p$,所以 l_{AB} 过定点 $(2p,0)$,此时 $m=2p$ 满足 $pt^2+2m>0$.

综上,l_{AB} 过定点 $(2p,0)$.

【变式训练】 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆交于 A,B 两点(A,B 不是左、右顶点),且以 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点.求证:直线 l 过定点,并求该定点的坐标.

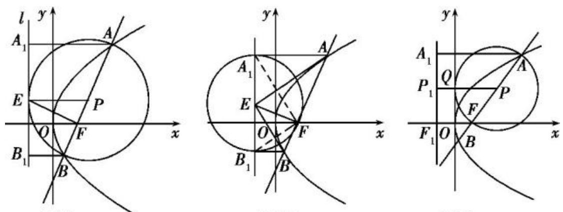
结论十六 抛物线中的三类直线与圆相切问题

AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的弦(焦点弦),过 A,B 分别作准线 $l:x=-\frac{p}{2}$ 的垂线,垂足分别为 A_1,B_1,E 为 A_1B_1 的中点.

(1)如图①所示,以 AB 为直径的圆与准线 l 相切于点 E.

(2)如图②所示,以 A_1B_1 为直径的圆与弦 AB 相切于点 F,且 $EF^2=A_1A\cdot BB_1$.

(3)如图③所示,以 AF 为直径的圆与 y 轴相切.

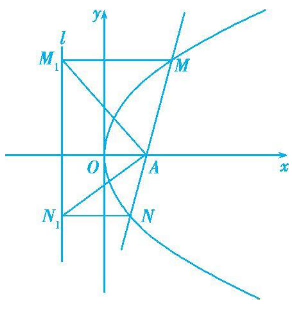


图① 图② 图③

例 16 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的对称轴上一点 $A(a,0)(a>0)$ 的直线与抛物线相交于 M,N 两点,自 M,N 向直线 $l:x=-a$ 作垂线,垂足分别为 M_1,N_1.当 $a=\frac{p}{2}$ 时,求证:$AM_1\perp AN_1$.

证明 证法一:如图所示,当 $a=\frac{p}{2}$ 时,点 $A\left(\frac{p}{2},0\right)$ 为抛物线的焦点,l 为其准线 $x=-\frac{p}{2}$,由抛物线定义得 $|MA|=|MM_1|$,$|NA|=|NN_1|$,所以 $\angle MAM_1=\angle MM_1A$,$\angle NAN_1=\angle NN_1A$.

因为 $MM_1\parallel NN_1$,故 $\angle M_1MA+\angle N_1NA=180°$,所以 $\angle MM_1A+\angle MAM_1+\angle NN_1A+\angle NAN_1=180°$,所以 $\angle MAM_1+\angle NAN_1=90°$,即 $\angle M_1AN_1=90°$,故 $AM_1\perp AN_1$.



证法二：依题意，可设直线 MN 的方程为 $x=my+a$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$，则有 $M_1(-a,y_1)$, $N_1(-a,y_2)$. 由 $\begin{cases}x=my+a,\\ y^2=2px\end{cases}$ 消去 x，可得 $y^2-2mpy-2ap=0$，

故 $\begin{cases}y_1+y_2=2mp, ①\\ y_1\cdot y_2=-2ap, ②\end{cases}$

于是 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2a=2m^2p+2a$, ③

$x_1\cdot x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{y_1^2\cdot y_2^2}{4p^2}=a^2$. ④

当 $a=\frac{p}{2}$ 时，点 $A\left(\frac{p}{2},0\right)$ 为抛物线的焦点，l 为其准线 $x=-\frac{p}{2}$，此时 $M_1\left(-\frac{p}{2},y_1\right)$，$N_1\left(-\frac{p}{2},y_2\right)$，

由②可得 $y_1\cdot y_2=-p^2$.

因为 $\vec{AM_1}=(-p,y_1)$，$\vec{AN_1}=(-p,y_2)$，

故 $\vec{AM_1}\cdot\vec{AN_1}=0$，即 $AM_1\perp AN_1$.

证法三：同证法二得 $y_1\cdot y_2=-p^2$.

因为 $k_{AM_1}=-\frac{y_1}{p}$，$k_{AN_1}=-\frac{y_2}{p}$，故 $k_{AM_1}\cdot k_{AN_1}=-1$，即 $AM_1\perp AN_1$.

【变式训练】

1. 设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l：$x=-\frac{3}{2}$，若过焦点 F 的直线与抛物线 C 相交于 A,B 两点，则以线段 AB 为直径的圆与直线 l 的位置关系为（　　）

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 以上三个答案均有可能

2. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若 $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$，则 k=________.

【变式训练】【答案】

结论一　奇函数的最值性质

【变式训练】

1.【答案】2018

【解析】$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{x^2+\sin x+2017}{x^2+2017}=1+\frac{\sin x}{x^2+2017}$，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)-1=\frac{\sin x}{x^2+2017}$，设

$g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-1=\frac{\sin x}{x^2+2017}$，$g(x)$为奇函数，$g(-x)+g(x)=0$，则

$f\left(-x+\frac{1}{2}\right)-1+f\left(x+\frac{1}{2}\right)-1=0$，$f\left(-x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=2$，令$-x+\frac{1}{2}=t$,

$x=\frac{1}{2}-t, x+\frac{1}{2}=1-t$，$f(t)+f(1-t)=2$，$f(0)+f(1)=2, f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2016}{2017}\right)=2,\ldots$，则

$\sum_{i=0}^{2017} f\left(\frac{i}{2017}\right)=2\times\frac{2018}{2}=2018$.

2.【答案】2

【解析】$f(x)=1-\frac{sinx}{x^2+cosx+1}$，又 $y=-\frac{sinx}{x^2+cosx+1}$ 为奇函数

$\therefore$ $f(x)$ 的图象关于点$(0,1)$对称，学/*科网

$\therefore$最大值对应的点与最小值对应的点也关于点$(0,1)$对称

$\therefore \frac{M+m}{2}=1$，即 $M+m=2$

故答案为：2

结论二　函数周期性问题

【变式训练】

1.

【答案】A

【解析】依题意 $f(3-x)=-f(x)=f(-x)$，故函数 $f(x)$ 为周期为 3 的周期函数，

$f(2017)=f(3\times672+1)=f(1)=-f(-1)=-\log_2(-2+7)=-\log_2 5$，故选 A.

2.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

根据题意，函数$f(x)$是周期为 2 的函数，则$f\left(\frac{21}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}+10\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，

又由$f(x)$为奇函数，则$f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$,

则 $f(\frac{21}{2})=\frac{1}{2}$;

故答案为：$\frac{1}{2}$

结论三　函数的对称性

【变式训练】

1. 【答案】D

【解析】∵ $f(2+x)=f(2-x)$，

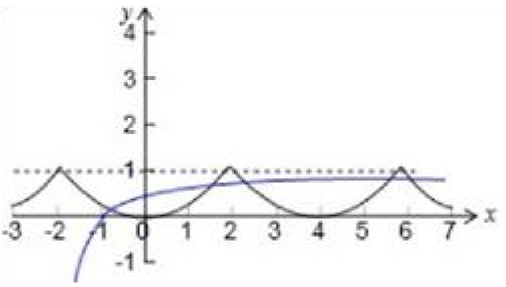
∴函数 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=2$，即 $f(-x)=f(x+4)$，

又函数 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，

∴ $f(x+4)=f(x)$，

∵函数 $f(x)$ 为周期函数，且 $\mathrm{T}=4$ 是一个周期.

结合函数 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x}-1$，画出函数 $f(x)$ 在区间 $(-2,6)$ 上的图象（如图所示），并且 $f(-2)=f(2)=f(6)=1$.



∵在区间 $(-2,6)$ 内方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0(a>0，a\neq 1)$ 有且只有 4 个不同的根，

∴函数 $\mathrm{y}=f(x)$ 和 $\mathrm{y}=\log_a(x+2)$ 的图象在区间 $(-2,6)$ 内仅有 4 个不同的公共点.

结合图象可得只需满足 $\begin{cases} a>1 \\ \log_a 8<1 \end{cases}$，解得 $a>8$.

∴实数 a 的取值范围是 $(8,+\infty)$.

2. 【答案】D

【解析】

因为$y=f(x)$ 图像关于点$(\frac{1}{2},0)$对称，所以$f\left(\frac{1}{2}+x\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)=0$，所以$f(1+x)+f(-x)=0$，又$y=f(x)$为偶函数，所以$f(-x)=-f(x)$，所以$f(x+2)=-f(1+x)=f(x)$，所以函数$f(x)$最小正周期为 2，所以$f(\pi)=f(\pi-4)=f(4-\pi)=\pi-4+\frac{1}{2}=\pi-\frac{7}{2}$.

结论四　反函数的图象与性质

【变式训练】

【答案】A

【解析】因为函数$f(x)=x^2-ax$与$g(x)=e^x$（e为自然对数的底数）的图象上存在关于直线$y=x$对称的点，所以函数$f(x)=x^2-ax$与$h(x)=\ln x$的图象有公共点，则$x^2-ax=\ln x$有解，即$a=x-\frac{\ln x}{x}$有解，令$F(x)=x-\frac{\ln x}{x}$，则$F'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}<0$在$\left[\frac{1}{e},1\right)$成立，$F'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}>0$在$(1,e]$上成立，即$F(x)=x-\frac{\ln x}{x}$在$\left[\frac{1}{e},1\right)$单调递减，在$(1,e]$上单调递增，且$F(e)=e-\frac{1}{e}$，$F\left(\frac{1}{e}\right)=e+\frac{1}{e}$，$F(1)=1$，所以$1\le a\le e+\frac{1}{e}$；故选 A.

结论五　两个经典不等式

【变式训练】

1.

【答案】B

【解析】因为 f(x)的定义域为$\begin{cases}x+1>0,\\ \ln(x+1)-x\neq 0,\end{cases}$ 即{x|x>-1 且 x≠0},所以排除选项 D.

令 g(x)=ln(x+1)x,则由经典不等式 ln(x+1)≤x 知,g(x)≤0 恒成立,故 f(x)=$\frac{1}{g(x)}$<0 恒成立,所以排除 A,C,故选 B.

2.【解析】证明　令 $g(x)=f(x)-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$, $x\in R$,则 $g'(x)=e^x-x-1$,

由经典不等式 $e^x\geqslant x+1$ 恒成立可知,$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立,所以 g(x)在 R 上为单调递增函数,且 g(0)=0,所以函数 g(x)有唯一零点,即两曲线有唯一公共点.

结论六　三点共线的充要条件

【变式训练】

1.【答案】D

【解析】设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BN}=\lambda\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}\right)=\lambda\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AC}\left(0\le\lambda\le1\right)$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\left(1-\lambda\right)\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AC}$．

又 $\overrightarrow{AP}=\left(m+\frac{2}{11}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{BC}=\left(m+\frac{2}{11}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=m\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\begin{cases}\frac{\lambda}{3}=\frac{2}{11}\\ m=1-\lambda\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{6}{11}\\ m=\frac{5}{11}\end{cases}$．

$\therefore m=\frac{5}{11}$．选 D．

2. 【答案】A

【解析】

由已知，可得 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3m}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3n}\overrightarrow{AQ}$，

因为 P，M，Q 三点共线，所以 $\frac{2}{3m}+\frac{1}{3n}=1$，

所以 mn+m= $\frac{2n+m}{3}+m=\frac{2n}{3}+\frac{4m}{3}=\left(\frac{2n}{3}+\frac{4m}{3}\right)\left(\frac{2}{3m}+\frac{1}{3n}\right)$

$=\frac{10}{9}+\frac{4n}{9m}+\frac{4m}{9n}\geqslant\frac{10}{9}+2\sqrt{\frac{4n}{9m}\times\frac{4m}{9n}}$

=2，

故选：A．

结论七　三角形“四心”向量形式的充要条件

【变式训练】

1. 【答案】C

【解析】

$\because\Delta ABC$ 中，已知 $AB=2,BC=1,\angle ABC=60^{\circ}$，

由余弦定理可得 $AC^2=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3,AC=\sqrt{3}$，

所以 $BC^2+AC^2=AB^2\Rightarrow AC\perp BC$，

设BC的中点为D，

因为点M为ΔABC的重心，

所以$\vec{AM}=\frac{2}{3}\vec{AD}=\frac{2}{3}(\vec{AC}+\vec{CD})$，

可得$\vec{AM}\cdot\vec{AC}=\frac{2}{3}(\vec{AC}+\vec{CD})\cdot\vec{AC}=\frac{2}{3}\vec{AC}^2+\frac{2}{3}\vec{CD}\cdot\vec{AC}$

$=\frac{2}{3}\vec{AC}^2=\frac{2}{3}\times 3=2$，故选 C.

2. 【答案】C

【解析】设 BC 的中点为 M，则$\frac{\vec{OB}+\vec{OC}}{2}=\vec{OM}$，则有$\vec{OP}=\vec{OM}+\lambda\vec{AP}$，即$\vec{MP}=\lambda\vec{AP}$，∴P 的轨迹所在直线一定通过△ABC 的重心.

3. 【答案】B

【解析】解法一：$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$为$\overrightarrow{AB}$上的单位向量，$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$为$\overrightarrow{AC}$上的单位向量，则$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$的方向为∠BAC 的平分线$\overrightarrow{AD}$的方向. 又 $\lambda\in[0,+\infty)$，∴$\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$的方向与$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$的方向相同. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，∴点 P 在$\overrightarrow{AD}$上移动. ∴P 的轨迹一定要通过△ABC 的内心. 故选 B.

解法二：由于 P 点轨迹通过△ABC 内一定点且该定点与 O 点位置和△ABC 的形状无关，故取 O 点与 A 点重合，由平行四边形法则很容易看出 P 点在∠BAC 的平分线上，故选 B.

4. 【答案】重心

【解析】

∵动点 P满足$\vec{OP}=\frac{1}{3}$[（2－2λ）$\vec{OD}$＋（1+2λ）$\vec{OC}$]（λ∈R），

且$\frac{1}{3}(2-2\lambda)+\frac{1}{3}(1+2\lambda)=1$，

∴P、C、D三点共线，

又 D是 AB的中点，

∴CD 为中线，

∴点 P的轨迹一定过△ABC的重心.

故答案为重心.

结论八　等差数列

【变式训练】

1. 【答案】B

【解析】设等差数列前 m 项的和为 x，由等差数列的性质可得，中间的 m 项的和可设为 x+d，后 m 项的和设为 x+2d，

由题意得 2x+d=200，3x+3d=225，

解得 x=125，d=－50，

故中间的 m 项的和为 75，

故选 B．学科#网

2. 【答案】C

【解析】$\because d>0$， $a_5<0$

则$\{a_n\}$是递增数列，

但$\{S_n\}$应是先减后增数列，

故 A,B 错误，

$S_{2n}=2na_1+\frac{2n(2n-1)}{2}d$ 应有最小值，故 C 正确

故选 C

3. 【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

方程（x^2-2x+m）（x^2-2x+n）＝0 可化为

$x^2-2x+m=0$①，或 $x^2-2x+n=0$②，

设$\frac{1}{4}$是方程①的根，

则将$\frac{1}{4}$代入方程①，可解得 $m=\frac{7}{16}$，

∴方程①的另一个根为$\frac{7}{4}$.

设方程②的另一个根为 s，t，（$s\leqslant t$）

则由根与系数的关系知，$s+t=2$，$st=n$，

又方程①的两根之和也是 2，

∴$s+t=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}$

由等差数列中的项的性质可知，

此等差数列为$\frac{1}{4}$，s，t，$\frac{7}{4}$，

公差为$[\frac{7}{4}-\frac{1}{4}]\div 3=\frac{1}{2}$，

$\therefore s=\frac{3}{4}$，$t=\frac{5}{4}$，

$\therefore n=st=\frac{15}{16}$

$\therefore$，$|m-n|=|\frac{7}{16}-\frac{15}{16}|=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$

结论九　等比数列

【变式训练】

1.【答案】C

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_4=-24q^3=-\frac{8}{9}$，$q^3=\frac{1}{27}$，$q=\frac{1}{3}$，此等比数列各项均为负数，当n为奇数时，T_n为负数，当n为偶数时，T_n为正数，所以T_n取得最大值时，n为偶数，排除B，而

$T_2=(-24)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)=24\times 8=192$，$T_4=(-24)^4\left(\frac{1}{3}\right)^6=8^4\times\frac{1}{9}=\frac{8^4}{9}>192$，

$T_6=(-24)^6\left(\frac{1}{3}\right)^{15}=8^6\times\left(\frac{1}{3}\right)^9=\frac{8^6}{3^9}=\frac{1}{9}\times\frac{8^6}{3^7}<\frac{8^4}{9}$，$T_4$最大，选择C.

2.【答案】(1) $a_n=3n-1$，$b_n=2^n$ $(n\in N^*)$．(2) $M_n=(3n-4)\cdot 2^{n+1}+8$

【解析】

(1) 由题意知$a_2\cdot a_3=40$，$S_4=\frac{4(a_1+a_4)}{2}=26$，

$\therefore a_2\cdot a_3=40$，$a_2+a_3=13$，

又公差为正数，故$a_2=5$，$a_3=8$，公差$d=3$，

$\therefore a_n=3n-1$，

由$T_n=2^{n+1}-2$ $(n\in N^*)$ 得

当$n=1, b_1=T_1=2$，

当$n \ge 2, n \in N^*$时，$b_n = T_n - T_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) = 2^n$

综上得$b_n = 2^n$（$n \in N^*$）.

（2）由（1）知$a_n \cdot b_n = (3n-1) \cdot 2^n$

∴$M_n = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + (3n-1) \cdot 2^n$①

〖解法1〗（错位相减法）

$2M_n = 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + (3n-1) \cdot 2^{n+1}$②

①－②得$M_n = (3n-1) \cdot 2^{n+1} - 4 - 3(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n)$

$= (3n-4) \cdot 2^{n+1} + 8$.

〖解法2〗（待定系数法）

设$M_n = (An+B) \cdot 2^n - B$

由$M_1 = 4, M_2 = 24$，得$\begin{cases} (A+B) \cdot 2 - B = 4 \\ (2A+B) \cdot 2^2 - B = 24 \end{cases}$解得$A = 6, B = -8$

所以$M_n = (6n-8) \cdot 2^n + 8$

〖解法3〗（分合法）

$M_n = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + (3n-1) \cdot 2^n$

$= 4 + 2[5 \cdot 2^1 + 8 \cdot 2^2 \cdots + (3n-1) \cdot 2^{n-1}]$

$= 4 + 2[(3+2) \cdot 2^1 + (3+5) \cdot 2^2 \cdots + (3+3n-4) \cdot 2^{n-1}]$

$= 4 + 2[2 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 \cdots + (3n-4) \cdot 2^{n-1}] + 6[2^1 + 2^2 \cdots + 2^{n-1}]$

∴$M_n = 4 + 2[M_n - (3n-1) \cdot 2^n] + 6\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}$

化简得$M_n = (3n-4) \cdot 2^{n+1} + 8$

结论十　多面体的外接球和内切球

【变式训练】

1.【答案】C

【解析】由题意，PA⊥面 ABC，则 $\triangle PAC,\triangle PAB$ 为直角三角形，PA=3,AB=4，所以 PB=5，又△ABC 是直角三角形，所以∠ABC=90°,AB=4，AC=5 所以 BC=3,因为 $\triangle PBC$ 为直角三角形，经分析只能 $\angle PBC=90^{\circ}$，故 $PC=\sqrt{PB^2+BC^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的圆心为 PC 的中点，所以 $2R=\sqrt{34}$ 则球 O 的表面积为 $4\pi R^2=34\pi$.

故选 C.

2.【答案】$\dfrac{2+\sqrt{2}}{12}$

【解析】圆锥的母线长为 $\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$，设球 O 的半径为 r，则 $\dfrac{r}{\sqrt{3}}=\dfrac{3-r}{2\sqrt{3}}$，

解得 r=1.

∵OA⊥OB，OA=OB=1，∴AB=$\sqrt{2}$，

∵AC⊥BC，∴C 在以 AB 为直径的圆上，

∴平面 OAB⊥平面 ABC，

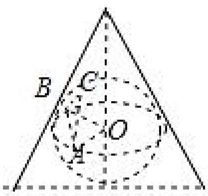
∴O 到平面 ABC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故 V 到平面 ABC 的最大距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$.

又 C 到 AB 的最大距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴三棱锥 V－ABC 的体积的最大值为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{12}$.

故答案为：$\dfrac{2+\sqrt{2}}{12}$.



结论十一　焦点三角形的面积公式

【变式训练】

1.【答案】A

【解析】设 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|}=\dfrac{1}{2}$， $\therefore\theta=60°$.

$\therefore S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}=9\tan 30°=3\sqrt{3}$. 故选答案 A.

2. 【答案】A

【解析】：设 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$． $\therefore S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\cot\dfrac{\theta}{2}=16\cot\dfrac{\pi}{6}=16\sqrt{3}$.

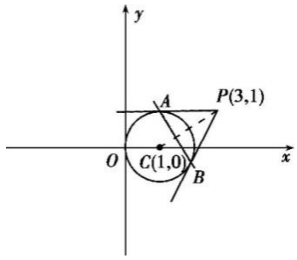
故答案选 A.

结论十二　圆锥曲线的切线问题

【变式训练】

1.【答案】A

【解析】如图,圆心坐标为 C(1,0),易知 A(1,1).



又 $k_{AB}\cdot k_{PC}=-1$,且 $k_{PC}=\frac{1-0}{3-1}=\frac{1}{2}$, ∴$k_{AB}=-2$.

故直线 AB 的方程为 $y-1=-2(x-1)$,即 $2x+y-3=0$,故选 A.

2.【答案】 $x+2y-4=0$

【解析】由于点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$在椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上,故切线方程为$\frac{x}{4}+\frac{\frac{3}{2}y}{3}=1$,即 $x+2y-4=0$.

结论十三　圆锥曲线的中点弦问题

【变式训练】【答案】 $\left[\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$

【解析】 设 PA_2 的斜率为 k_2, PA_1 的斜率为 k_1, 则 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$, 又 $k_2\in[-2,-1]$, 所以 $k_1\in\left[\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$.

2.

证明 设 $P(x_0,y_0)$, 则 $A(-x_0,-y_0)$, $C(x_0,0)$, $k_{AC}=\dfrac{0+y_0}{x_0-(-x_0)}=\dfrac{y_0}{2x_0}$, 又 $k_{PA}=\dfrac{y_0}{x_0}=k$, 所以 $k_{AC}=\dfrac{k}{2}$, 由 $k_{BA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 知, $k_{PB}\cdot k_{BA}=k_{PB}\cdot k_{AC}=\dfrac{k}{2}\cdot k_{PB}=-\dfrac{2}{4}$, 所以 $k_{PB}\cdot k=-1$, 即 $PA\perp PB$.

结论十四　圆锥曲线中的一类定值问题

【变式训练】【解析】设直线 AE 的方程为 $y=k(x-1)+\frac{3}{2}$，联立方程得 $\begin{cases} y=k(x-1)+\frac{3}{2}, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$

消去 y，整理得 $(4k^2+3)x^2+(12k-8k^2)x+4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12=0$，则 $x_E=\frac{4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12}{(4k^2+3)x_A}=\frac{(3-2k)^2-12}{4k^2+3}$. ①

同理，设直线 AF 的方程为 $y=-k(x-1)+\frac{3}{2}$，学*/科+-/网

则 $x_F=\frac{(3+2k)^2-12}{4k^2+3}$. ②

所以 $k_{EF}=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}$

$=\frac{-k(x_F-1)+\frac{3}{2}-\left[k(x_E-1)+\frac{3}{2}\right]}{x_F-x_E}$

$=\frac{-k(x_F+x_E)+2k}{x_F-x_E}$，将①②代入上式，化简得 $k_{EF}=\frac{1}{2}$.

结论十五　圆锥曲线中的一类定点问题

【变式训练】　【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程得 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \\ y=kx+m, \end{cases}$ 消去 y 得，$(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

则有 $\Delta=(8km)^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)>0$，即 $m^2<4k^2+3$，$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+3}, \\ x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}. \end{cases}$ ①

因为以 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点 $(2,0)$，所以 $(x_1-2,y_1)\cdot(x_2-2,y_2)=0$，即 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=0$，

即 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$. 把式①代入化简得 $7m^2+16km+4k^2=0$，得 $m=-2k$ 或 $m=-\frac{2k}{7}$.

(1)当 $m=-2k$ 时，直线 $l:y=kx-2k$ 过右顶点 $(2,0)$，与题意不符，故舍去；

(2)当 $m=-\frac{2k}{7}$时，直线 $l:y=kx-\frac{2k}{7}$过定点$\left(\frac{2}{7},0\right)$，且满足 $m^2<4k^2+3$，符合题意. 所以 $l:y=kx+m$ 过定点$\left(\frac{2}{7},0\right)$.

结论十六　抛物线中的三类直线与圆相切问题

【变式训练】

1. 【答案】C

【解析】根据结论知道一 AB 为直径的圆和准线相切，该抛物线的准线为 $x=-1$，故这个圆和直线 $x=-\frac{3}{2}$

是相离的关系。学科%网

故答案为：C。

2.【答案】2

【解析】如图所示,因为$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$,所以 MA⊥MB,故点 M 在以 AB 为直径的圆上,又准线为 x=-2,直线 AB 经过焦点 F(2,0),所以有 MF⊥AB,又 $k_{MF}=\frac{2}{-2-2}=-\frac{1}{2}$,所以 $k_{AB}=2$.