# 高中数学常用公式大全及常用结论

（理科 176 个）

**1. 元素与集合的关系**

$x\in A\Leftrightarrow x\notin C_UA$，$x\in C_UA\Leftrightarrow x\notin A$.

**2. 德摩根公式**

$C_U(A\bigcap B)=C_UA\bigcup C_UB;C_U(A\bigcup B)=C_UA\bigcap C_UB$.

**3. 包含关系**

$$A\bigcap B=A\Leftrightarrow A\bigcup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow C_UB\subseteq C_UA$$

$$\Leftrightarrow A\bigcap C_UB=\Phi\Leftrightarrow C_UA\bigcup B=R$$

**4. 容斥原理**

$$card(A\bigcup B)=cardA+cardB-card(A\bigcap B)$$

$$card(A\bigcup B\bigcup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\bigcap B)$$

$$-card(A\bigcap B)-card(B\bigcap C)-card(C\bigcap A)+card(A\bigcap B\bigcap C)$$

5. **集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的子集个数**共有 $2^n$ 个；真子集有 $2^n$－1 个；非空子集有 $2^n$－1 个；非空的真子集有 $2^n$－2 个.

**6. 常用二次函数的解析式的三种形式**

(1) 一般式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；

(2) 顶点式 $f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$；

(3) 零点式 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$.

**7. 解连不等式 $N<f(x)<M$ 常有以下转化形式**

$$N<f(x)<M\Leftrightarrow[f(x)-M][f(x)-N]<0$$

$$\Leftrightarrow|f(x)-\frac{M+N}{2}|<\frac{M-N}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)-N}{M-f(x)}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)-N}>\frac{1}{M-N}.$$

8. **方程 $f(x)=0$ 在 $(k_1,k_2)$ 上有且只有一个实根**，与

$f(k_1)f(k_2)<0$ 不等价，前者是后者的一个必要而不是充分条件．特别地，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有且只有一个实根在 $(k_1,k_2)$ 内，等价于 $f(k_1)f(k_2)<0$，或 $f(k_1)=0$ 且 $k_1<-\frac{b}{2a}<\frac{k_1+k_2}{2}$，或 $f(k_2)=0$ 且 $\frac{k_1+k_2}{2}<-\frac{b}{2a}<k_2$．

## 9. 闭区间上的二次函数的最值

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在闭区间 $[p,q]$ 上的最值只能在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处及区间的两端点处取得，具体如下：

(1) 当 a>0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{\min}=f(-\frac{b}{2a}), f(x)_{\max}=_{\max}\{f(p),f(q)\}$；

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，$f(x)_{\max}=_{\max}\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{\min}=_{\min}\{f(p),f(q)\}$．

(2) 当 a<0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$，若 $x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，则 $f(x)_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$．

## 10. 一元二次方程的实根分布

依据：若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,n)$ 内至少有一个实根 ．

设 $f(x)=x_2+px+q$，则

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内有根的充要条件为 $f(m)=0$ 或 $\begin{cases} p^2-4q\ge 0 \\ -\dfrac{p}{2}>m \end{cases}$；

（2）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,n)$ 内有根的充要条件为 $f(m)f(n)<0$ 或 $\begin{cases} f(m)>0 \\ f(n)>0 \\ p^2-4q\ge 0 \\ m<-\dfrac{p}{2}<n \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(m)=0 \\ af(n)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(n)=0 \\ af(m)>0 \end{cases}$；

（3）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,n)$ 内有根的充要条件为 $f(m)<0$ 或 $\begin{cases} p^2-4q\ge 0 \\ -\dfrac{p}{2}<m \end{cases}$.

## 11. 定区间上含参数的二次不等式恒成立的条件依据

(1) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 $L$（形如 $[\alpha,\beta]$，$(-\infty,\beta]$，$[\alpha,+\infty)$ 不同）上含参数的二次不等式 $f(x,t)\ge 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{\min}\ge 0(x\notin L)$.

(2) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间上含参数的二次不等式 $f(x,t)\ge 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{man}\le 0(x\notin L)$.

(3) $f(x)=ax^4+bx^2+c>0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases} a\ge 0 \\ b\ge 0 \\ c>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases}$.

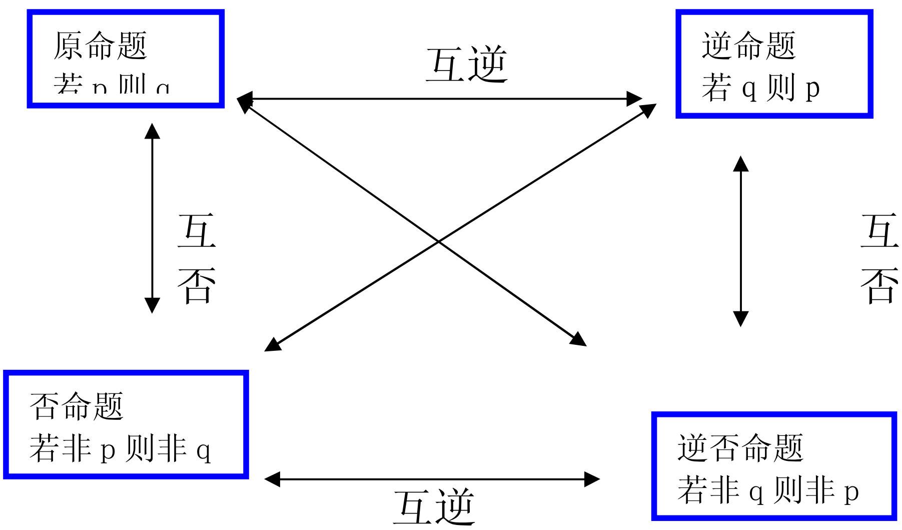
## 12. 真值表

| p | q | 非 p | p 或 q | p 且 q |
|---|---|---|---|---|
| 真 | 真 | 假 | 真 | 真 |
| 真 | 假 | 假 | 真 | 假 |
| 假 | 真 | 真 | 真 | 假 |
| 假 | 假 | 真 | 假 | 假 |

## 13. 常见结论的否定形式

| 原结论 | 反设词 | 原结论 | 反设词 |
|---|---|---|---|
| 是 | 不是 | 至少有一个 | 一个也没有 |
| 都是 | 不都是 | 至多有一个 | 至少有两个 |
| 大于 | 不大于 | 至少有 n 个 | 至多有（$n-1$）个 |
| 小于 | 不小于 | 至多有 n 个 | 至少有（$n+1$）个 |
| 对所有 x，成立 | 存在某 x，不成立 | p 或 q | $\neg p$ 且 $\neg q$ |
| 对任何 x，不成立 | 存在某 x，成立 | p 且 q | $\neg p$ 或 $\neg q$ |

## 14. 四种命题的相互关系



## 15. 充要条件

（1）充分条件：若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 充分条件.

（2）必要条件：若 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 必要条件.

（3）充要条件：若 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 充要条件.

注：如果甲是乙的充分条件，则乙是甲的必要条件；反之亦然.

## 16. 函数的单调性

(1) 设 $x_1 \cdot x_2 \in [a,b], x_1 \neq x_2$ 那么

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数；

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是减函数.

(2) 设函数 $y = f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 为减函数.

## 17. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数，则在公共定义域内，和函数 $f(x) + g(x)$ 也是减函数；如果函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 在其对应的定义域上都是减函数，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 是增函数.

## 18. 奇偶函数的图象特征

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称；反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数.

## 19. 若函数 $y = f(x)$ 是偶函数，则 $f(x+a) = f(-x-a)$；若函数 $y = f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a) = f(-x+a)$.

## 20. 对于函数 $y = f(x)$（$x \in R$），$f(x+a) = f(b-x)$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的对称轴是函数 $x = \dfrac{a+b}{2}$；两个函数 $y = f(x+a)$ 与 $y = f(b-x)$ 的图象关于直线 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 对称.

21. 若 $f(x)=-f(-x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a}{2},0)$ 对称；若 $f(x)=-f(x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 为周期为 $2a$ 的周期函数.

22. 多项式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的奇偶性

多项式函数 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的偶次项(即奇数项)的系数全为零.

多项式函数 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的奇次项(即偶数项)的系数全为零.

23. 函数 $y=f(x)$ 的图象的对称性

(1) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)$

$\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+mx)=f(b-mx)$

$\Leftrightarrow f(a+b-mx)=f(mx)$.

24. 两个函数图象的对称性

(1) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于直线 $x=0$ (即 y 轴)对称.

(2) 函数 $y=f(mx-a)$ 与函数 $y=f(b-mx)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2m}$ 对称.

(3) 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 y=x 对称.

25. 若将函数 $y=f(x)$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到函数 $y=f(x-a)+b$ 的图象；若将曲线 $f(x,y)=0$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到曲线 $f(x-a,y-b)=0$ 的图象.

26. 互为反函数的两个函数的关系

$$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a.$$

27. 若函数 $y=f(kx+b)$ 存在反函数，则其反函数为 $y=\frac{1}{k}[f^{-1}(x)-b]$，并不是 $y=[f^{-1}(kx+b)$，而函数 $y=[f^{-1}(kx+b)$ 是 $y=\frac{1}{k}[f(x)-b]$ 的反函数.

28. 几个常见的函数方程

(1) 对于正比例函数 $f(x)=cx$，有
$f(x+y)=f(x)+f(y), f(1)=c$.

(2) 对于指数函数 $f(x)=a^x$
有 $f(x+y)=f(x)f(y), f(1)=a\neq 0$.

(3) 对于对数函数 $f(x)=\log_a x$
有 $f(xy)=f(x)+f(y), f(a)=1(a>0, a\neq 1)$.

(4) 对于幂函数 $f(x)=x^\alpha$，
有 $f(xy)=f(x)f(y), f^{'}(1)=\alpha$.

(5) 对于余弦函数 $f(x)=\cos x$，正弦函数 $g(x)=\sin x$，有 $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，
$f(0)=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1$.

29. 几个函数方程的周期(约定 a>0)

（1） $f(x)=f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=a；

（2） $f(x)=f(x+a)=0$，

或 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}=f(x+a),(f(x)\in[0,1])$，

则 $f(x)$ 的周期 T=2a；

(3) $f(x)=1-\frac{1}{f(x+a)}(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 的周期 T=3a；

(4) $f(x_1+x_2)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$

且 $f(a)=1(f(x_1)\cdot f(x_2)\neq 1,0<|x_1-x_2|<2a)$，

则 $f(x)$ 的周期 T=4a；

(5)若飞 f（x） +f(x+a)+f(x+2a)+f(x+3a)+f(x+4a)

$=f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=5a；

(6)若 $f(x+a)=f(x)-f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=6a.

## 30. 分数指数幂

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

(2) $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$（$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

## 31．根式的性质

（1）$(\sqrt[n]{a})^n=a$.

（2）当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,a\geq 0\\-a,a<0\end{cases}$.

## 32．有理指数幂的运算性质

(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in Q)$.

(2) $(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in Q)$.

(3) $(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in Q)$.

注： 若 a>0，p 是一个无理数，则 $a^p$ 表示一个确定的实数．上述有理指数幂的运算性质，对于无理数指数幂都适用.

## 33. 指数式与对数式的互化式

$\log_a N=b\Leftrightarrow a^b=N\ (a>0,a\neq 1,N>0)$.

## 34. 对数的换底公式

$\log_a N=\dfrac{\log_m N}{\log_m a}$（$a>0$，且 $a\neq 1$，$m>0$，且 $m\neq 1$，$N>0$）.

推论 $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$（$a>0$，且 $a>1$，$m,n>0$，且 $m\neq 1$, $n\neq 1$, $N>0$）.

## 35. 对数的四则运算法则

若 a＞0，a≠1，M＞0，N＞0，则

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n = n\log_a M (n\in R)$.

36. 设函数 $f(x)=\log_m(ax^2+bx+c)(a\neq 0)$，记 $\Delta=b^2-4ac$．若 $f(x)$ 的定义域为 R，则 $a>0$，且 $\Delta<0$；若 $f(x)$ 的值域为 R，则 $a>0$，且 $\Delta\geq 0$．对于 $a=0$ 的情形，需要单独检验.

## 37. 对数换底不等式及其推广

若 $a>0$，$b>0$，$x>0$，$x\neq\frac{1}{a}$，则函数 $y=\log_{ax}(bx)$

(1) 当 $a>b$ 时，在 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上 $y=\log_{ax}(bx)$ 为增函数.

(2) 当 $a<b$ 时，在 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上 $y=\log_{ax}(bx)$ 为减函数.

推论：设 $n>m>1$，$p>0$，$a>0$，且 $a\neq 1$，则

（1）$\log_{m+p}(n+p)<\log_m n$.

（2）$\log_a m\log_a n<\log_a{}^2\frac{m+n}{2}$.

## 38. 平均增长率的问题

如果原来产值的基础数为 N，平均增长率为 p，则对于时间 x 的总产值 y，有 $y=N(1+p)^x$.

## 39. 数列的通项公式与前 n 项的和的关系

$a_n=\begin{cases} s_1, & n=1 \\ s_n-s_{n-1}, & n\geq 2 \end{cases}$（数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$）.

## 40. 等差数列的通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d \quad (n \in N^*)\text{；}$$

其前 n 项和公式为

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

$$= \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{1}{2}d)n.$$

## 41. 等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \cdot q^n \quad (n \in N^*)\text{；}$$

其前 n 项的和公式为

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1 \\ na_1, q = 1 \end{cases}$$

或 $s_n = \begin{cases} \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}, q \neq 1 \\ na_1, q = 1 \end{cases}$.

## 42. 等比差数列 $\{a_n\}$：$a_{n+1} = qa_n + d, a_1 = b (q \neq 0)$ 的通项公式为

$$a_n = \begin{cases} b + (n-1)d, q = 1 \\ \dfrac{bq^n + (d-b)q^{n-1} - d}{q-1}, q \neq 1 \end{cases}\text{；}$$

其前 n 项和公式为

$$s_n = \begin{cases} nb + n(n-1)d, (q = 1) \\ (b - \dfrac{d}{1-q})\dfrac{1-q^n}{q-1} + \dfrac{d}{1-q}n, (q \neq 1) \end{cases}.$$

## 43. 分期付款(按揭贷款)

每次还款 $x = \dfrac{ab(1+b)^n}{(1+b)^n - 1}$ 元(贷款 a 元, n 次还清, 每期利率为 b).

## 44. 常见三角不等式

（1）若$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\sin x<x<\tan x$.

(2) 若$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$1<\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$.

(3) $|\sin x|+|\cos x|\ge 1$.

## 45. 同角三角函数的基本关系式

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\tan\theta\cdot cot\theta=1$.

## 46. 正弦、余弦的诱导公式

$$\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin\alpha, & \text{(n 为偶数)}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}cos\alpha, & \text{(n 为奇数)}\end{cases}$$

$$cos(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}cos\alpha, & \text{(n 为偶数)}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\alpha, & \text{(n 为奇数)}\end{cases}$$

## 47. 和角与差角公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$（平方正弦公式）；

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$（辅助角$\varphi$所在象限由点$(a,b)$的象限决定，$\tan\varphi=\frac{b}{a}$）.

## 48. 二倍角公式

$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$.

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

## 49. 三角函数的周期公式

函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$，x∈R 函数 $y=\cos(\omega x+\varphi)$，x∈R(A，ω，$\varphi$为常数，且 A≠0，ω＞0)的周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$；函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$ (A，ω，$\varphi$为常数，且 A≠0，ω＞0)的周期$T=\frac{\pi}{\omega}$.

## 50. 正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

## 51. 余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$；

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

## 52. 面积定理

（1）$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$（$h_a$、$h_b$、$h_c$分别表示 a、b、c 边上的高）.

（2）$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$.

(3) $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|)^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$.

## 53. 三角形内角和定理

在△ABC 中，有 $A+B+C=\pi\Leftrightarrow C=\pi-(A+B)$

$$\Leftrightarrow\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\Leftrightarrow 2C=2\pi-2(A+B).$$

## 54. 简单的三角方程的通解

$\sin x=a\Leftrightarrow x=k\pi+(-1)^k\arcsin a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\cos x=a\Leftrightarrow x=2k\pi\pm\arccos a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\tan x=a\Rightarrow x=k\pi+\arctan a(k\in Z,a\in R)$.

特别地, 有

$\sin\alpha=\sin\beta\Leftrightarrow\alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k\in Z)$.

$\cos\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\alpha=2k\pi\pm\beta(k\in Z)$.

$\tan\alpha=\tan\beta\Rightarrow\alpha=k\pi+\beta(k\in Z)$.

## 55. 最简单的三角不等式及其解集

$\sin x>a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arcsin a,2k\pi+\pi-\arcsin a),k\in Z$.

$\sin x<a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi-\pi-\arcsin a,2k\pi+\arcsin a),k\in Z$.

$\cos x>a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi-\arccos a,2k\pi+\arccos a),k\in Z$.

$\cos x<a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arccos a,2k\pi+2\pi-\arccos a),k\in Z$.

$\tan x>a(a\in R)\Rightarrow x\in(k\pi+\arctan a,k\pi+\frac{\pi}{2}),k\in Z$.

$\tan x<a(a\in R)\Rightarrow x\in(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\arctan a),k\in Z$.

## 56. 实数与向量的积的运算律

设λ、μ为实数，那么

(1) 结合律：λ(μa)=(λμ)a;

(2) 第一分配律：(λ+μ)a=λa+μa;

(3) 第二分配律：λ(a+b)=λa+λb.

## 57. 向量的数量积的运算律：

(1) *a*·b= b·*a* （交换律）;

(2) （$\lambda$ *a*)·b= $\lambda$ （*a*·b）=$\lambda$ *a*·b= *a*·（$\lambda$ b）;

(3) （*a*+b）·c= *a* ·c +b·c.

## 58. 平面向量基本定理

如果 $e_1$、$e_2$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且只有一对实数 $\lambda_1$、$\lambda_2$，使得 a=$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$.

不共线的向量 $e_1$、$e_2$叫做表示这一平面内所有向量的一组**基底**.

## 59. 向量平行的坐标表示

设 a=$(x_1,y_1)$, b=$(x_2,y_2)$，且 b≠0，

则 a//b(b≠0) $\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

## 60. *a* 与 b 的数量积(或内积)

*a*·b=|*a*||b|cosθ.

## 61. a·b 的几何意义

数量积 a·b 等于 a 的长度|a|与 b 在 a 的方向上的投影|b|cosθ的乘积.

## 62. 平面向量的坐标运算

(1) 设 a=$(x_1,y_1)$, b=$(x_2,y_2)$，则 a+b=$(x_1+x_2,y_1+y_2)$.

(2) 设 a=$(x_1,y_1)$, b=$(x_2,y_2)$，则 a-b=$(x_1-x_2,y_1-y_2)$.

(3) 设 A$(x_1,y_1)$，B$(x_2,y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

(4) 设 a=$(x,y),\lambda\in R$，则 $\lambda$ a=$(\lambda x,\lambda y)$.

(5) 设 a=$(x_1,y_1)$, b=$(x_2,y_2)$，则 a • b=$(x_1x_2+y_1y_2)$.

## 63. 两向量的夹角公式

$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$（a=$(x_1,y_1)$, b=$(x_2,y_2)$）.

## 64. 平面两点间的距离公式

$d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ （A $(x_1,y_1)$，B$(x_2,y_2)$）.

## 65. 向量的平行与垂直

设 a=$(x_1,y_1)$, b=$(x_2,y_2)$，且 b$\neq$0，则

A//b $\Leftrightarrow$ b=λa $\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

a⊥b(a$\neq$0) $\Leftrightarrow$ $a$ • b=0 $\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

## 66. 线段的定比分公式

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P(x,y)$ 是线段 $P_1P_2$ 的分点，$\lambda$ 是实数，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OP_1}+(1-t)\overrightarrow{OP_2}\ \left(t=\frac{1}{1+\lambda}\right).$$

## 67. 三角形的重心坐标公式

△ABC 三个顶点的坐标分别为 A$(x_1, y_1)$、B$(x_2, y_2)$、C$(x_3, y_3)$，则△ABC 的重心的坐标是 $G(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})$.

## 68. 点的平移公式

$$\begin{cases}x'=x+h\\y'=y+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-h\\y=y'-k\end{cases}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}\ .$$

【注】:图形 F 上的任意一点 P(x，y)在平移后图形 $F'$ 上的对应点为 $P'(x',y')$，且 $\overrightarrow{PP'}$ 的坐标为 $(h,k)$.

## 69. “按向量平移”的几个结论

（1）点 $P(x,y)$ 按向量 a=$(h,k)$ 平移后得到点 $P'(x+h,y+k)$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象 $C$ 按向量 a=$(h,k)$ 平移后得到图象 $C'$,

则 $C'$ 的函数解析式为 $y=f(x-h)+k$ ）.

(3) 图象 $C'$ 按向量 a=$(h,k)$ 平移后得到图象 $C$ , 若 $C$ 的解析式 $y=f(x)$ ,

则 $C'$ 的函数解析式为 $y=f(x+h)-k$.

(4) 曲线 $C:f(x,y)=0$ 按向量 a=$(h,k)$ 平移后得到图象 $C'$ , 则 $C'$ 的方程为 $f(x-h,y-k)=0$.

(5) 向量 m= $(x,y)$ 按向量 a= $(h,k)$ 平移后得到的向量仍然为 m=$(x,y)$.

## 70. 三角形五“心”向量形式的充要条件

设 O 为 $\Delta ABC$ 所在平面上一点，角 $A,B,C$ 所对边长分别为 $a,b,c$，则

（1）O 为 $\Delta ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$.

（2）O 为 $\Delta ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（3）O 为 $\Delta ABC$ 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$.

（4）O 为 $\Delta ABC$ 的内心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（5）O 为 $\Delta ABC$ 的 $\angle A$ 的旁心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}=b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$.

## 71. 常用不等式:

（1）$a,b\in R\Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab$（当且仅当 a=b 时取“=”号）.

（2）$a,b\in R^{+}\Longrightarrow \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（当且仅当 a＝b 时取“=”号）.

（3）$a^3+b^3+c^3\geq 3abc(a>0,b>0,c>0).$

（4）柯西不等式：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2,a,b,c,d\in R.$$

（5）绝对值不等式：$|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$.

## 72. 极值定理

已知 $x,y$ 都是正数，则有

（1）若积 $xy$ 是定 p，则当 $x=y$ 时和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$；

（2）若和 $x+y$ 是定 s，则当 $x=y$ 时积 $xy$ 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$.

推广 已知 $x,y\in R$，则有 $(x+y)^2=(x-y)^2+2xy$

(1)若积 $xy$ 是定值,

则当 $|x-y|$ 最大时, $|x+y|$ 最大;

当 $|x-y|$ 最小时, $|x+y|$ 最小.

(2)若和 $|x+y|$ 是定值, 则当 $|x-y|$ 最大时, $|xy|$ 最小;

当 $|x-y|$ 最小时, $|xy|$ 最大.

## 73. 一元二次不等式

$ax^2+bx+c>0(或<0)$ $(a\neq 0,\Delta=b^2-4ac>0)$,

如果 a 与 $ax^2+bx+c$ 同号，则其解集在两根之外；如果 a 与 $ax^2+bx+c$ 异号，则其解集在两根之间. 简言之：同号两根之外，异号两根之间.

$x_1<x<x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)<0(x_1<x_2)$；

$x<x_1,或x>x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)>0(x_1<x_2)$.

## 74. 含有绝对值的不等式

当 a> 0 时，有 $|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$.

$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.

## 75. 无理不等式

（1） $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$.

（2） $\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$.

（3） $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<[g(x)]^2 \end{cases}$.

## 76. 指数不等式与对数不等式

(1) 当 $a>1$ 时,

$$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x);$$

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}.$$

(2) 当 $0<a<1$ 时,

$$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x);$$

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$$

## 77. 斜率公式

$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ （$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$）.

## 78. 直线的五种方程

（1）点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$ （直线 $l$ 过点 $P_1(x_1,y_1)$，且斜率为 k）.

（2）斜截式 $y=kx+b$ (b 为直线 $l$ 在 y 轴上的截距).

（3）两点式 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ （$y_1\ne y_2$）（$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$）

( $x_1 \neq x_2$ )).

(4) 截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ( $a$、$b$ 分别为直线的横、纵截距，$a$、$b \neq 0$ )

（5）一般式 $Ax+By+C=0$ (其中 A、B 不同时为 0).

## 79. 两条直线的平行和垂直

(1) 若 $l_1: y=k_1x+b_1$， $l_2: y=k_2x+b_2$

①$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2, b_1 \neq b_2$；

②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

(2) 若 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, 且 $A_1$、$A_2$、$B_1$、$B_2$ 都不为零,

①$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$；

②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$；

## 80. 夹角公式

(1) $\tan\alpha=|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}|$.

( $l_1: y=k_1x+b_1$， $l_2: y=k_2x+b_2$, $k_1k_2 \neq -1$ )

(2) $\tan\alpha=|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}|$.

( $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_1A_2+B_1B_2 \neq 0$ ).

直线 $l_1 \perp l_2$ 时，直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$.

## 81．四种常用直线系方程

(1) 定点直线系方程：经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$ (除直线 $x=x_0$), 其中 $k$ 是待定的系数；经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, 其中 $A,B$ 是待定的系数.

(2) 共点直线系方程：经过两直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方

程为$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（除$l_2$），其中λ是待定的系数．

(3)平行直线系方程：直线$y=kx+b$中当斜率k一定而b变动时，表示平行直线系方程．与直线$Ax+By+C=0$平行的直线系方程是$Ax+By+\lambda=0$（$\lambda\neq 0$），λ是参变量．

(4)垂直直线系方程：与直线$Ax+By+C=0$ (A≠0，B≠0)垂直的直线系方程是$Bx-Ay+\lambda=0$，λ是参变量．

## 82. 点到直线的距离

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$（点$P(x_0,y_0)$，直线$l$：$Ax+By+C=0$）．

## 83. 圆的四种方程

（1）圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$．

（2）圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（$D^2+E^2-4F>0$）．

（3）圆的参数方程 $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$．

（4）圆的直径式方程

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$（圆的直径的端点是$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$）．

## 84. 圆系方程

(1)过点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$的圆系方程是

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda[(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)]=0$

$\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda(ax+by+c)=0$，

其中$ax+by+c=0$是直线$AB$的方程，λ是待定的系数．

(2)过直线$l$：$Ax+By+C=0$与圆$C$：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$的交点的圆系方程是$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$，λ是待定的系数．

(3)过圆$C_1$：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$与圆$C_2$：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$的交点的圆系方程是

$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$，λ是待定的系

数.

## 85. 点与圆的位置关系

点 $P(x_0,y_0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种

若 $d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，则

$d>r \Leftrightarrow$ 点 p 在圆外;

$d=r \Leftrightarrow$ 点 p 在圆上;

$d<r \Leftrightarrow$ 点 p 在圆内.

## 86. 直线与圆的位置关系

直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种:

$d>r \Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \Delta<0$;

$d=r \Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \Delta=0$;

$d<r \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \Delta>0$.

其中 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

## 87. 两圆位置关系的判定方法

设两圆圆心分别为 $O_1$，$O_2$，半径分别为 $r_1$，$r_2$，$d=|O_1O_2|$

$d>r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow 4$条公切线;

$d=r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow 3$条公切线;

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow 2$条公切线;

$d=|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow 1$条公切线;

$0<d<|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线.

## 88. 圆的切线方程

(1) 已知圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

①若已知切点 $(x_0,y_0)$ 在圆上，则切线只有一条，其方程是

$x_0x+y_0y+\dfrac{D(x_0+x)}{2}+\dfrac{E(y_0+y)}{2}+F=0$.

当 $(x_0,y_0)$ 圆外时，$x_0x+y_0y+\dfrac{D(x_0+x)}{2}+\dfrac{E(y_0+y)}{2}+F=0$ 表示过

两个切点的切点弦方程.

②过圆外一点的切线方程可设为 $y-y_0=k(x-x_0)$，再利用相切条件求 k，这时必有两条切线，注意不要漏掉平行于 y 轴的切线.

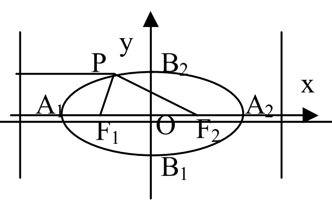
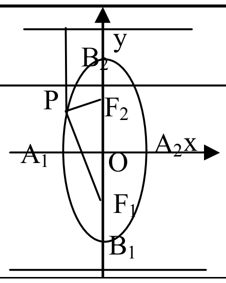
③斜率为 k 的切线方程可设为 $y=kx+b$，再利用相切条件求 b，必有两条切线.

(2) 已知圆 $x^2+y^2=r^2$.

①过圆上的 $P_0(x_0,y_0)$ 点的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

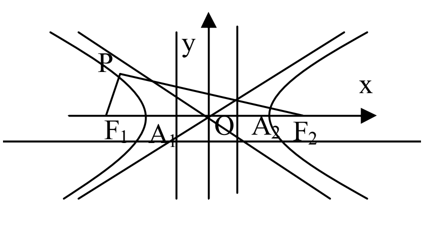
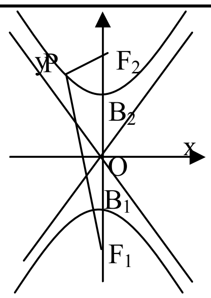
②斜率为 $k$ 的圆的切线方程为 $y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}$.

## 89 椭圆的定义、标准方程、图象及几何性质：

| | | |
|---|---|---|
| 定义 | **平面内与两定点 $F_1$、$F_2$ 的距离的和等于常数 2a（$2a>\|F_1F_2\|$）的点的轨迹叫做椭圆**。定点 $F_1$、$F_2$ 叫做焦点，定点间的距离叫焦距。<br>定义式：$\|PF_1\|+\|PF_2\|=2a$, $(2a>\|F_1F_2\|)$.<br>注：若 $2a=\|F_1F_2\|$,动点 P 的轨迹是线段 $F_1F_2$；若 $2a<\|F_1F_2\|$,动点 P 的轨迹不存在。 | |
| 图　形 | <br>中心在原点，焦点在 $x$ 轴上 | <br>中心在原点，焦点在 $y$ 轴上 |
| 标准方程 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ | $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ |
| 参数方程 | $\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}(\theta为参数)$ | $\begin{cases}x=b\cos\theta\\y=a\sin\theta\end{cases}(\theta为参数)$ |
| 顶　点 | $A_1(-a,0),A_2(a,0),B_1(0,-b),B_2(0,b)$ | $A_1(-b,0),A_2(b,0),B_1(0,-a),B_2(0,a)$ |
| 对称轴 | $x$ 轴， $y$ 轴；短轴为 $2b$， 长轴为 $2a$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 焦　点 | $F_1(-c,0),F_2(c,0)$ | $F_1(0,-c),F_2(0,c)$ |
| 焦　距 | $\|F_1F_2\|=2c(c>0)$　　$c^2=a^2-b^2$ | |
| 离心率 | $e=\frac{c}{a}(0<e<1)$（离心率越大，椭圆越扁） | |
| 准　线 | $x=\pm\frac{a^2}{c}$ | $y=\pm\frac{a^2}{c}$ |
| 焦半径 | $\|PF_1\|=a+ex_0$，　$\|PF_2\|=a-ex_0$ | $\|PF_1\|=a+ey_0$，　$\|PF_2\|=a-ey_0$ |
| 通　径 | $\frac{2b^2}{a}=2ep$（$p$ 为焦准距） | |
| 焦点弦 | $\|AB\|=2a+e(x_A+x_B)$ | $\|AB\|=2a+e(y_A+y_B)$ |
| 焦准距 | $p=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}$ | |

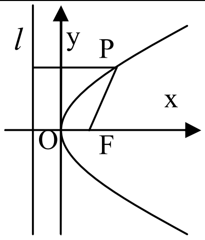
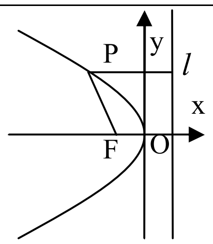
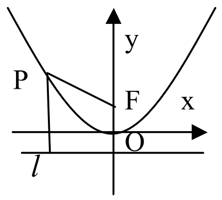
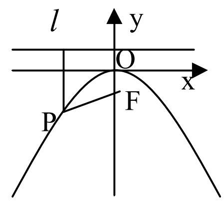
## 90、双曲线的定义、标准方程、图象及几何性质：

| | | |
|---|---|---|
| **定义** | **平面内与两定点 $F_1$、$F_2$ 的距离的差的绝对值等于常数 2a（2a<\|$F_1F_2$\|）的点的轨迹叫做双曲线。**定点 $F_1$、$F_2$ 叫做焦点，定点间的距离叫焦距。<br>定义式：\|\|$PF_1$\|−\|$PF_2$\|\|=2a，（2a<\|$F_1F_2$\|）.<br>注：若 2a=\|$F_1F_2$\|，P 的轨迹是以 $F_1$ 和 $F_2$ 为端点射线；若 2a>\|$F_1F_2$\|，轨迹不存在。 | |
| 图　形 |  |  |
| | 中心在原点，焦点在 $x$ 轴上 | 中心在原点，焦点在 $y$ 轴上 |

| | | |
|---|---|---|
| 标准方程 | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ | $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ |
| 顶　点 | $A_1(-a,0),A_2(a,0)$ | $B_1(0,-a),B_2(0,a)$ |
| 对称轴 | $x$轴，$y$轴；虚轴为$2b$，实轴为$2a$ | |
| 焦　点 | $F_1(-c,0),F_2(c,0)$ | $F_1(0,-c),F_2(0,c)$ |
| 焦　距 | $\|F_1F_2\|=2c(c>0)$　$c^2=a^2+b^2$ | |
| 离心率 | $e=\frac{c}{a}(e>1)$（离心率越大，开口越大） | |
| 准　线 | $x=\pm\frac{a^2}{c}$ | $y=\pm\frac{a^2}{c}$ |
| 渐近线 | $y=\pm\frac{b}{a}x$ | $y=\pm\frac{a}{b}x$ |
| 焦半径 | $P$在左支$\|PF_1\|=-a-ex_0$ $\|PF_2\|=a-ex_0$<br>$P$在右支$\|PF_1\|=a+ex_0$ $\|PF_2\|=-a+ex_0$ | $P$在下支$\|PF_1\|=-a-ey_0$ $\|PF_2\|=a-ey_0$<br>$P$在上支$\|PF_1\|=a+ey_0$ $\|PF_2\|=-a+ey_0$ |
| 通　径 | $\frac{2b^2}{a}=2ep$（$p$为焦准距） | |
| 焦准距 | $p=c-\frac{a^2}{c}=\frac{b^2}{c}$ | |

## 91、抛物线的定义、标准方程、图象及几何性质：$p>0$

| | |
|---|---|
| 定义 | 平面内与一个定点F和一条定直线$l$距离相等的点的轨迹叫做抛物线。<br>点F叫做抛物线的焦点，直线$l$叫做抛物线的准线，其中F$\notin l$。 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 图形 |  |  |  |  |
| | 焦点在$x$轴上，开口向右 | 焦点在$x$轴上，开口向左 | 焦点在$y$轴上，开口向上 | 焦点在$y$轴上，开口向下 |
| 标准方程 | $y^2=2px$ | $y^2=-2px$ | $x^2=2py$ | $x^2=-2py$ |
| 准线 | $x=-\frac{p}{2}$ | $x=\frac{p}{2}$ | $y=-\frac{p}{2}$ | $y=\frac{p}{2}$ |
| 焦点 | $F(\frac{p}{2},0)$ | $F(-\frac{p}{2},0)$ | $F(0,\frac{p}{2})$ | $F(0,-\frac{p}{2})$ |
| 对称轴 | $x$轴 | | $y$轴 | |
| 焦半径 | $\|PF\|=\|x_0\|+\frac{p}{2}$ | | $\|PF\|=\|y_0\|+\frac{p}{2}$ | |
| 顶点 | $O(0,0)$ | | | |
| 离心率 | $e=1$ | | | |
| 通径 | $2p$ | | | |
| 焦点 | $x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\theta}$（$\theta$为焦点弦的倾斜角，当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，为$2p$—— | | | |

| | |
|---|---|
| 弦 | 通径） |
| 焦准距 | $p$ |

## 92 圆锥曲线的统一定义：

若平面内一个动点$M$到一个定点$F$和一条定直线$l$的距离之比等于一个常数$e(e>0)$，则动点的轨迹为圆锥曲线。其中定点$F$为焦点，定直线$l$为准线，$e$为离心率。

当$0<e<1$时，轨迹为椭圆；当$e=1$时，轨迹为抛物线；当$e>1$时，轨迹为双曲线。

**1. 圆锥曲线焦点位置的判断**（首先化成标准方程，然后再判断）：

（1）椭圆：由$x^2$，$y^2$分母的大小决定，焦点在分母大的坐标轴上。**如**已知方程$\frac{x^2}{|m|-1}+\frac{y^2}{2-m}=1$表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 m 的取值范围是__（答：$(-\infty,-1)\cup(1,\frac{3}{2})$）

（2）双曲线：由$x^2$，$y^2$项系数的正负决定，焦点在系数为正的坐标轴上；

（3）抛物线：焦点在一次项的坐标轴上，一次项的符号决定开口方向。

**【特别提醒】**：

（1）在求解椭圆、双曲线问题时，首先要判断焦点位置，焦点 $F_1$，$F_2$的位置，是椭圆、双曲线的定位条件，它决定椭圆、双曲线标准方程的类型，而方程中的两个参数$a,b$，确定椭圆、双曲线的形状和大小，是椭圆、双曲线的定形条件；在求解抛物线问题时，首先要判断开口方向；

（2）在椭圆中，$a$最大，$a^2=b^2+c^2$，在双曲线中，$c$最大，$c^2=a^2+b^2$。

**2、焦点三角形问题**（椭圆或双曲线上的一点与两焦点所构成的三角形）：常利用第一定义和正弦、余弦定理求解。

设椭圆或双曲线上的一点$P(x_0,y_0)$到两焦点$F_1,F_2$的距离分别为$r_1,r_2$，焦点$\Delta F_1PF_2$的面积为$S$，

（1）在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中， ①$\theta$＝$\arccos(\frac{2b^2}{r_1r_2}-1)$，且当$r_1=r_2$即$P$为短轴端点时，$\theta$最大为$\theta_{\max}$＝$\arccos\frac{b^2-c^2}{a^2}$；②$S=b^2\tan\frac{\theta}{2}=c|y_0|$，当$|y_0|=b$即$P$为短轴端点时，$S_{\max}$的最大值为 bc；

（2）对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点三角形有：①$\theta=\arccos\left(1-\frac{2b^2}{r_1r_2}\right)$；②$S=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta=b^2\cot\frac{\theta}{2}$。

**3．几个重要结论**

（1）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$；

（2）以$y=\pm\frac{b}{a}x$为渐近线（即与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$共渐近线）的双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda$为参数，$\lambda$≠0)。若$\lambda>0$，焦点在 x 轴上，若$\lambda<0$，焦点在 y 轴上。

（3）中心在原点，坐标轴为对称轴的椭圆、双曲线方程可设为$mx^2+ny^2=1$；

（4）通径是所有焦点弦（过焦点的弦）中最短的弦；

（5）若 OA、OB 是过抛物线$y^2=2px(p>0)$顶点 O 的两条互相垂直的弦，则直线 AB 恒经过定点$(2p,0)$

(6)等轴双曲线：实轴长与虚轴长相等，即 a=b，从而离心率 e=$\sqrt{2}$.

（7）抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，过 F 的焦点弦 AB 的倾斜角为$\theta$，则 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}$.

以上述焦点弦 AB 为直径的圆与其准线相切。

## 93、直线与圆锥曲线的位置关系

直线与圆锥曲线联系在一起的综合题在高考中多以高档题、压轴题出现，主要涉及位置关系的判定，弦长问题、最值问题、对称问题、轨迹问题等.

**（1）直线与圆锥曲线的交点：**直线与圆锥曲线有无公共点或有几个公共点的问题，实际上是研究它们的方程组成的方程是否有实数解或实数解的个数问题，此时要注意用好分类讨论和数形结合的思想方法.

（2）**直线与圆锥曲线的位置关系**：判断直线 *l* 与圆锥曲线 r 的位置关系时，通常将直线 *l* 的方程 Ax+By+C=0(A,B 不同时为 0)代入圆锥曲线的 r 的方程：F(x,y)=0,消去 y 得到一个关于 x 的一元方程。

即 $\begin{cases} Ax+By+c=0, \\ F(x,y)=0 \end{cases}$，消去 y 得 $ax+by+c=0$

（1） 当 a≠0,则有Δ>0，直线 *l* 与圆锥曲线相交；当Δ=0 时，直线与曲线 r 相切；Δ<0 时，直线 r 与曲线 r 相离。

（2） 当 a=0，即得到一个一次方程，则直线 *l* 与曲线 r 相交，此时，若 r 是双曲线，则直线 *l* 与双曲线 r 的渐近线平行；r 是抛物线，则直线 r 与抛物线的对称轴位置关系是：平行或重合。

**注意：开放型曲线（双曲线和抛物线）的特殊性：**

①相交：$\Delta>0 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆(圆)相交

$\Delta>0 \Rightarrow$ 直线与双曲线相交

$\Delta>0 \Rightarrow$ 直线与抛物线相交

②相切：$\Delta=0 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆(圆)相切 $\Leftrightarrow$ **直线与椭圆(圆)只有一个公共点；**

$\Delta=0 \Leftrightarrow$ 直线与双曲线相切 $\Rightarrow$ **直线与双曲线只有一个公共点；**

$\Delta=0 \Leftrightarrow$ 直线与抛物线相切 $\Rightarrow$ **直线与抛物线只有一个公共点；**

## 94、直线与圆锥曲线相交的弦长公式：

直线被圆锥曲线截得的线段称为圆锥曲线的弦。若该弦通过了圆锥曲线的焦点，此时得到的弦也叫焦点弦。当直线的斜率存在时，

弦长 $l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

当斜率 K 存在且非零时，$l=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|y_1-y_2\right|$.

## 95、轨 迹 问 题

（1）**坐标法**：借助坐标系研究几何图形的方法叫做坐标法，它解决的主要问题是：

①根据已知条件，求平面曲线的方程； ②通过曲线的方程研究平面曲线的性质。

（2）**曲线与方程的概念**：

一般地，在直角坐标系中，如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 建立了如下的关系：

（1）曲线上的点的坐标都是这个方程的解——纯粹性；

（2）以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点——完备性；

那么，这个方程叫做曲线的方程，这条曲线叫做方程的曲线。

## 96、点与曲线的关系：

①若曲线 C 的方程是 $f(x,y)=0$，则：点 $P_0(x_0,y_0)$ 在曲线 C 上 $\Leftrightarrow f(x_0,y_0)=0$；

点 $P_0(x_0,y_0)$ 不在曲线 C 上 $\Leftrightarrow f(x_0,y_0)\neq 0$

②若曲线 $C_1$，$C_2$ 的方程分别为 $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$, 则

方程组 $\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$ 有 n 个不同的实数解，两条曲线就有 n 个不同的交点；方程组没有实数解，曲线就没有 交点。　点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $C_1$，$C_2$ 的交点 $\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_0,y_0)=0 \\ f_2(x_0,y_0)=0 \end{cases}$

## 97、 求曲线方程(动点轨迹方程)的常用方法：

（1）**直接法**（直译法）：把题中提供的等量关系直接转换为关于 x,y 的方程。用此法求轨迹方程的一般步骤是：①建立适当的坐标系，设出动点的坐标；②列出等量关系式；③用坐标将等量关系式化为方程 $f(x,y)=0$；④化简方程；⑤检验曲线完备性、纯粹性（要注意一些隐含条件，若轨迹是曲线的一部分，应对方程注明 x 的取值范围，或同时注明 x.,y 的取值范围）。

（2）**定义法**：若动点的轨迹满足常见曲线的定义，则根据定义直接

求出轨迹方程。

（3）**待定系数法**：已知曲线的类型，如：直线、圆、圆锥曲线等，则可设出含有待定系数的方程，再根据题设中的条件，确定系数，从而求得曲线的方程。

**注**：求圆锥曲线方程的问题，可按照“先定形，后定式，再定量”的步骤.

定形——指的是二次曲线**对称轴的位置**与**焦点位置**。

定式——根据“形”设方程的形式，如：当椭圆的焦点不确定在哪个坐标轴上时，可设方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$；如果双曲线的渐近线为 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ 时，可设方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$.

定量——由题设中的条件求出待定系数的值，从而得到所求的曲线方程。

（4）**代入法**（相关点法，转移法）动点 P 随着曲线 C 上动点 Q 变化而变化，可考虑此法。其关键是用点 P 的坐标表示出点 Q 的坐标，再将 Q 的坐标代入曲线 C 的方程，从而得到点 P 的轨迹方程。

98. 二次函数 $y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ $(a\neq 0)$ 的图象是抛物线：

（1）顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$；

（2）焦点的坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2+1}{4a})$；

（3）准线方程是 $y=\frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

99. 直线与圆锥曲线相交的弦长公式 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 或

$\left|AB\right|=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}=|x_1-x_2|\sqrt{1+\tan^2\alpha}=|y_1-y_2|\sqrt{1+\cot^2\alpha}$（弦端点 A $(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由方程 $\begin{cases}y=kx+b\\F(x,y)=0\end{cases}$ 消去 y 得到 $ax^2+bx+c=0$，$\Delta>0$，$\alpha$ 为直线 $AB$ 的倾斜角，$k$ 为直线的斜率）.

97. 曲线 $F(x,y)=0$ 关于点 $P(x_0,y_0)$ 成中心对称的曲线是 $F(2x_0-x,2y_0-y)=0$.

98. “四线”一方程

对于一般的二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，用 $x_0x$ 代 $x^2$，用 $y_0y$ 代 $y^2$，用 $\frac{x_0y+xy_0}{2}$ 代 $xy$，用 $\frac{x_0+x}{2}$ 代 x，用 $\frac{y_0+y}{2}$ 代 y 即得方程

$Ax_0x+B\cdot\frac{x_0y+xy_0}{2}+Cy_0y+D\cdot\frac{x_0+x}{2}+E\cdot\frac{y_0+y}{2}+F=0$，曲线的切线，切点弦，中点弦，弦中点方程均是此方程得到.

100. 证明直线与直线的平行的思考途径

（1）转化为判定共面二直线无交点；
（2）转化为二直线同与第三条直线平行；
（3）转化为线面平行；
（4）转化为线面垂直；
（5）转化为面面平行.

101. 证明直线与平面的平行的思考途径

（1）转化为直线与平面无公共点；
（2）转化为线线平行；
（3）转化为面面平行.

102. 证明平面与平面平行的思考途径

（1）转化为判定二平面无公共点；
（2）转化为线面平行；
（3）转化为线面垂直.

103. 证明直线与直线的垂直的思考途径

（1）转化为相交垂直；
（2）转化为线面垂直；

（3）转化为线与另一线的射影垂直；
（4）转化为线与形成射影的斜线垂直.

**104．证明直线与平面垂直的思考途径**

（1）转化为该直线与平面内任一直线垂直；
（2）转化为该直线与平面内相交二直线垂直；
（3）转化为该直线与平面的一条垂线平行；
（4）转化为该直线垂直于另一个平行平面；
（5）转化为该直线与两个垂直平面的交线垂直.

**105．证明平面与平面的垂直的思考途径**

（1）转化为判断二面角是直二面角；
（2）转化为线面垂直.

**106. 空间向量的加法与数乘向量运算的运算律**

(1)加法交换律：a＋b=b＋a．
(2)加法结合律：(a＋b)＋c=a＋(b＋c)．
(3)数乘分配律：λ(a＋b)=λa＋λb．

**107. 平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广**

始点相同且不在同一个平面内的三个向量之和，等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所表示的向量.

**108. 共线向量定理**

对空间任意两个向量 a、b(b≠0 )，a∥b $\Leftrightarrow$ 存在实数λ使 a=λb．

$P$、$A$、$B$ 三点共线

$\Leftrightarrow AP \parallel AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 共线且 $AB$、$CD$ 不共线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{CD}$ 且 $AB$、$CD$ 不共线.

**109. 共面向量定理**

向量 p 与两个不共线的向量 a、b 共面的 $\Leftrightarrow$ 存在实数对 $x,y$，使 $p=ax+by$．

推论 空间一点 P 位于平面 MAB 内的 $\Leftrightarrow$ 存在有序实数对 $x,y$，使 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$，

或对空间任一定点 O，有序实数对 $x,y$，使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$．

100. 对空间任一点 $o$ 和不共线的三点 A、B、C，满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ （$x+y+z=k$），

则当$k=1$时，对于空间任一点$O$，总有P、A、B、C四点共面；当$k\neq 1$时，若$O\in$平面ABC，则P、A、B、C四点共面；若$O\notin$平面ABC，则P、A、B、C四点不共面.

$A$、$B$、C、D 四点共面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 共面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OD}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$ （$O\notin$平面ABC）.

111.空间向量基本定理

如果三个向量a、b、c不共面，那么对空间任一向量p，存在一个唯一的有序实数组x，y，z，使p＝xa＋yb＋zc.

推论　设O、A、B、C是不共面的四点，则对空间任一点P，都存在唯一的三个有序实数x，y，z，使$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

112.射影公式. 已知向量$\overrightarrow{AB}$=a和轴$l$，e是$l$上与$l$同方向的单位向量. 作A点在$l$上的射影$A'$，作B点在$l$上的射影$B'$，则

$A'B'=|\overrightarrow{AB}|\cos$〈a，e〉=a•e

113.向量的直角坐标运算

设a＝$(a_1,a_2,a_3)$，b＝$(b_1,b_2,b_3)$则

(1)a＋b＝$(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；

(2)a－b＝$(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；

(3)λa＝$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$ （λ∈R)；

(4)a•b＝$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

114.设A$(x_1,y_1,z_1)$，B$(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

115. 空间的线线平行或垂直

设$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\lambda x_2\\y_1=\lambda y_2\\z_1=\lambda z_2\end{cases};$$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

## 116. 夹角公式

设 $a=(a_1,a_2,a_3)$，b$=(b_1,b_2,b_3)$，则

cos〈$a$，b〉$=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

推论 $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$，此即三维柯西不等式.

## 117. 异面直线所成角

$$\cos\theta = |\cos\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle|$$

$$=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}\cdot\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}$$

（其中$\theta$（$0^\circ<\theta\le 90^\circ$）为异面直线$a,b$所成角，$\vec{a},\vec{b}$分别表示异面直线$a,b$的方向向量）

## 118. 直线 $AB$ 与平面所成角

$\beta = arc\sin\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{m}|}$（$\overrightarrow{m}$ 为平面 $\alpha$ 的法向量）.

## 119. 二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角

$\theta = arc\cos\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}$或$\pi - arc\cos\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}$（$\overrightarrow{m}$，$\overrightarrow{n}$为平面$\alpha$，$\beta$的法向量）.

## 120. 空间两点间的距离公式

若 A$(x_1,y_1,z_1)$，B$(x_2,y_2,z_2)$，则

$d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

## 121. 点 $Q$ 到直线 $l$ 距离

$h=\frac{1}{|a|}\sqrt{(|a||b|)^2-(a\cdot b)^2}$（点 $P$ 在直线 $l$ 上，直线 $l$ 的方向向量 a= $\overrightarrow{PA}$，向量 b= $\overrightarrow{PQ}$）.

## 122. 异面直线间的距离

$d=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$（$l_1,l_2$ 是两异面直线，其公垂向量为 $\overrightarrow{n}$，$C$、$D$ 分别是 $l_1,l_2$ 上任一点，$d$ 为 $l_1,l_2$ 间的距离）.

## 123. 点 $B$ 到平面 $\alpha$ 的距离

$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$（$\overrightarrow{n}$ 为平面 $\alpha$ 的法向量，$AB$ 是经过面 $\alpha$ 的一条斜线，$A\in\alpha$）.

## 124. 面积射影定理

$$S=\frac{S'}{\cos\theta}.$$

(平面多边形及其射影的面积分别是 $S$、$S'$，它们所在平面所成锐二面角的为 $\theta$).

## 125. 球的半径是 R，则

其体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其表面积 $S=4\pi R^2$.

## 126. 球的组合体

(1)球与长方体的组合体：长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长.

(2)球与正方体的组合体:正方体的内切球的直径是正方体的棱长，正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长，正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长.

(3) 球与正四面体的组合体：棱长为 $a$ 的正四面体的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$，外接球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

## 127. 柱体、锥体的体积

$V_{柱体}=\frac{1}{3}Sh$（$S$ 是柱体的底面积、$h$ 是柱体的高）.

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$（$S$ 是锥体的底面积、$h$ 是锥体的高）.

## 128. 分类计数原理（加法原理）

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n.$$

## 129. 分步计数原理（乘法原理）

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n.$$

## 130. 排列数公式

$$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

（$n$，$m\in N^*$，且 $m\le n$）.

注:规定 $0!=1$.

## 131. 排列恒等式

(1) $A_n^m=(n-m+1)A_n^{m-1}$； (2) $A_n^m=\frac{n}{n-m}A_{n-1}^m$；

(3) $A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$； (4) $nA_n^n=A_{n+1}^{n+1}-A_n^n$；

(5) $A_{n+1}^m=A_n^m+mA_n^{m-1}$. (6) $1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

## 132. 组合数公式

$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\times 2\times\cdots\times m}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$（$n\in N^*$，$m\in N$，且 $m\le n$）.

## 133. 组合数的两个性质

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$；

(2) $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.

【注】:规定 $C_n^0=1$.

## 134. 组合恒等式

（1）$C_n^m=\frac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$；（2）$C_n^m=\frac{n}{n-m}C_{n-1}^m$；

（3）$C_n^m=\frac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$；　　　（4）$\sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$；

（5）$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$.

(6) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^n=2^n$.

(7) $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots 2^{n-1}$.

(8) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$.

(9) $C_m^rC_n^0+C_m^{r-1}C_n^1+\cdots+C_m^{0r}C_n^r=C_{m+n}^r$.

(10) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

## 135. 排列数与组合数的关系

$A_n^m=m!\cdot C_n^m$ .

## 136．单条件排列

以下各条的大前提是从 n 个元素中取 m 个元素的排列.

（1）“在位”与“不在位”

①某（特）元必在某位有 $A_{n-1}^{m-1}$ 种；

②某（特）元不在某位有

$A_n^m-A_{n-1}^{m-1}$（补集思想）

$=A_{n-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼位置）$=A_{n-1}^m+A_{m-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼元素）种.

（2）紧贴与插空（即相邻与不相邻）

①定位紧贴：$k(k\le m\le n)$个元在固定位的排列有 $A_k^kA_{n-k}^{m-k}$ 种.

②浮动紧贴：n 个元素的全排列把 k 个元排在一起的排法有 $A_{n-k+1}^{n-k+1}A_k^k$ 种.注：此类问题常用捆绑法；

③插空：两组元素分别有 k、h 个（$k\le h+1$），把它们合在一起来作全排列，k 个的一组互不能挨近的所有排列数有 $A_h^hA_{h+1}^k$ 种.

（3）两组元素各相同的插空

m 个大球 n 个小球排成一列，小球必分开，问有多少种排法？

当 $n>m+1$ 时，无解；当 $n\le m+1$ 时，

有$\frac{A_{m+1}^n}{A_n^n}=C_{m+1}^n$种排法.

（4）两组相同元素的排列：两组元素有 m 个和 n 个，各组元素分别相同的排列数为$C_{m+n}^n$.

## 137. 二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$$

二项展开式的通项公式

$$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r\ (r=0,1,2\cdots,\ n).$$

## 138. 等可能性事件的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

## 139. 互斥事件 A，B 分别发生的概率的和

P(A＋B)=P(A)＋P(B).

## 140. n 个互斥事件分别发生的概率的和

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

## 141. 独立事件 A，B 同时发生的概率

P(A·B)= P(A)·P(B).

## 142. n 个独立事件同时发生的概率

$P(A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)$.

## 143. n 次独立重复试验中某事件恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}.$$

## 144. 离散型随机变量的分布列的两个性质

（1）$P_i\ge 0(i=1,2,\cdots)$;

（2）$P_1+P_2+\cdots=1$.

## 145. 数学期望

$$E\xi=x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_nP_n+\cdots$$

## 146. 数学期望的性质

(1) $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$.

(2) 若$\xi\sim B(n,p)$，则$E\xi=np$.

(3)若$\xi$服从几何分布,

且$P(\xi = k) = g(k,p) = q^{k-1}p$，则$E\xi = \dfrac{1}{p}$.

**147. 方差**

$$D\xi = \left(x_1 - E\xi\right)^2 \cdot p_1 + \left(x_2 - E\xi\right)^2 \cdot p_2 + \cdots + \left(x_n - E\xi\right)^2 \cdot p_n + \cdots$$

**148. 标准差**

$\sigma\xi = \sqrt{D\xi}$.

**149. 方差的性质**

(1) $D\left(a\xi + b\right) = a^2 D\xi$；

(2）若$\xi \sim B(n,p)$，则$D\xi = np(1-p)$.

(3）若$\xi$服从几何分布,且$P(\xi = k) = g(k,p) = q^{k-1}p$，

则$D\xi = \dfrac{q}{p^2}$.

**150. 方差与期望的关系**

$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2$.

**151. 正态分布密度函数**

$f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}6} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{26^2}}, x \in \left(-\infty, +\infty\right)$，式中的实数μ，$\sigma$（$\sigma$>0）是参数，分别表示个体的平均数与标准差.

**152. 标准正态分布密度函数**

$f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}6} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \left(-\infty, +\infty\right)$.

**153. 对于$N(\mu, \sigma^2)$，取值小于 x 的概率**

$F\left(x\right) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

$$P\left(x_1 < x_0 < x_2\right) = P\left(x < x_2\right) - P\left(x < x_1\right)$$
$$= F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$$

## 154. 回归直线方程

$$\hat{y}=a+bx\text{，其中}\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ a=\overline{y}-b\overline{x} \end{cases}.$$

## 155. 相关系数

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2)}}.$$

$|r|\leqslant 1$，且$|r|$越接近于 1，相关程度越大；$|r|$越接近于 0，相关程度越小.

## 156. 特殊数列的极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0 & |q|<1\\ 1 & q=1\\ \text{不存在} & |q|<1\text{或}q=-1\end{cases}$.

.

（3）$S=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}$（$s$无穷等比数列$\left\{a_1q^{n-1}\right\}$（$|q|<1$）的和）.

## 157. 几个常用极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$（$|a|<1$）;

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x_0}$.

## 158. 两个重要的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$（e=2.718281845…）.

## 159. 函数极限的四则运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$， 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=a\pm b$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=a\cdot b$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$.

## 160. 数列极限的四则运算法则

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$， 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c\cdot a$（ c 是常数）.

## 161. $f(x)$ 在 $x_0$ 处的导数（或变化率或微商）

$$f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

## 162. 瞬时速度

$$\upsilon=s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

## 163. 瞬时加速度

$$a=v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}.$$

## 164. $f(x)$ 在 $(a,b)$ 的导数

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

## 165. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数是曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率 $f'(x_0)$，相应的切线方程是 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

## 166. 几种常见函数的导数

(1) $C'=0$（C 为常数）.

(2) $(x_n)'=nx^{n-1}(n\in Q)$.

(3) $(\sin x)'=\cos x$.

(4) $(\cos x)'=-\sin x$.

(5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；$(\log a^x)'=\frac{1}{x}\log_a{}^e$.

(6) $(e^x)'=e^x$；$(a^x)'=a^x\ln a$.

## 167. 导数的运算法则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$.

（2）$(uv)'=u'v+uv'$.

（3）$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

## 168. 复合函数的求导法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x$ 处有导数 $u_x'=\varphi'(x)$，函数 $y=f(u)$ 在点 x 处的对应点 U 处有导数 $y_u'=f'(u)$，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处有导数，且 $y_x'=y_u'\cdot u_x'$，或写作 $f_x'(\varphi(x))=f'(u)\varphi'(x)$.

## 169. 判别 $f(x_0)$ 是极大（小）值的方法

当函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续时，

（1）如果在 $x_0$ 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大值；

（2）如果在 $x_0$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值.

## 170. 复数的相等

$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,b=d$.（$a,b,c,d\in R$）

## 171. 复数 $z=a+bi$ 的模（或绝对值）

$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

## 172. 复数的四则运算法则

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$;

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$;

(3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$;

(4) $(a+bi)\div(c+di)=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c+di\neq 0)$.

## 173. 复数的乘法的运算律

对于任何 $z_1,z_2,z_3\in C$，有

交换律: $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

结合律: $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

分配律: $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$ .

## 174. 复平面上的两点间的距离公式

$d=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$（$z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$）.

## 175. 向量的垂直

非零复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，则

$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$ $\Leftrightarrow$ $\overline{z_1}\cdot z_2$ 的实部为零 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数

$\Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$

$\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$

$\Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2|$

$\Leftrightarrow ac+bd=0$

$\Leftrightarrow z_1=\lambda iz_2$（λ为非零实数）.

## 176. 实系数一元二次方程的解

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，

①若 $\Delta=b^2-4ac>0$，则 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

②若 $\Delta=b^2-4ac=0$，则 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$；

③若 $\Delta=b^2-4ac<0$，它在实数集 R 内没有实数根；在复数集 C 内有且仅有两个共轭复数根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}i}{2a}(b^2-4ac<0)$.