**湖南师范大学附属中学期末模拟(一)**

**一、单选题(本大题共8小题，共40.0分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项)**

1. 已知集合，则中元素的个数为( )

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】化简集合，根据交集概念求出，从而可得答案.

【详解】因为，，

所以或或或或或或，

所以,

因为、、、满足，

所以，

所以中元素的个数为.

故选：C

2. 已知实数*a*，*b*，*c*满足，则下列不等式一定成立的是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】利用作差法逐项判断可得答案.

【详解】因为*a*，*b*，*c*满足，所以，，，

对于A，，所以，故A错误；

对于B，，所以，故B错误；

对于C，，所以，故C错误；

对于D，，所以，故D正确；

故选：D.

3. 已知定义域为R的函数f(x)不是偶函数，则下列命题一定为真命题的是(　　)

A. ∀x∈R，f(－x)≠f(x)

B. ∀x∈R，f(－x)≠－f(x)

C. ∃x0∈R，f(－x0)≠f(x0)

D. ∃x0∈R，f(－x0)≠－f(x0)

【答案】C

【解析】

【分析】利用偶函数的定义和全称命题的否定分析判断解答.

【详解】∵定义域为R的函数f(x)不是偶函数，

∴∀x∈R，f(－x)＝f(x)为假命题，

∴∃x0∈R，f(－x0)≠f(x0)为真命题.

故选C

【点睛】本题主要考查偶函数的定义和全称命题的否定，意在考查学生对该知识的理解掌握水平，属于基础题.

4. 若正实数满足，则

A. 有最大值4 B. 有最小值

C. 有最大值 D. 有最小值

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：因为正实数，满足，所以，故有最小值4，故A不正确；由基本不等式可得，故有最大值，故B不正确；由于，故由最大值为，故C正确；，故由最小值，故D不正确．

考点：基本不等式

5. 已知是第三象限角，且，则( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据诱导公式及同角三角函数关系与二倍角公式即可得解.

【详解】由已知得，，则原式

.

故选：D

6. 已知，则“存在使得”是“”的( )．

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据充分条件，必要条件的定义，以及诱导公式分类讨论即可判断.

【详解】(1)当存使得时，

若为偶数，则；

若为奇数，则；

(2)当时，或，，即或，

亦即存在使得．

所以，“存在使得”是“”的充要条件.

故选：C.

【点睛】本题主要考查充分条件，必要条件的定义的应用，诱导公式的应用，涉及分类讨论思想的应用，属于基础题.

7. 为了保障交通安全，某地根据《道路交通安全法》规定：汽车驾驶员血液中的酒精含量不得超过．据仪器监测，某驾驶员喝了二两白酒后，血液中的酒精含量迅速上升到，在停止喝酒后，血液中每小时末的酒精含量都比上一个小时末减少25%．那么此人在开车前至少要休息( )(参考数据：，)

A. 4．1小时 B. 4．2小时 C. 4．3小时 D. 4．4小时

【答案】B

【解析】

【分析】

由题意知经过小时，血液中的酒精含量为，则，解不等式即可.

【详解】设经过小时，血液中的酒精含量为，则.由，得，则.因为，则，所以开车前至少要休息4.2小时，

故选：B．

【点晴】关键点点晴：实际问题，关键是读懂题意抽象出具体函数.

8. 已知定义在**R**上的函数对于任意的*x*都满足，当时，，若函数至少有6个零点，则*a*的取值范围是( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

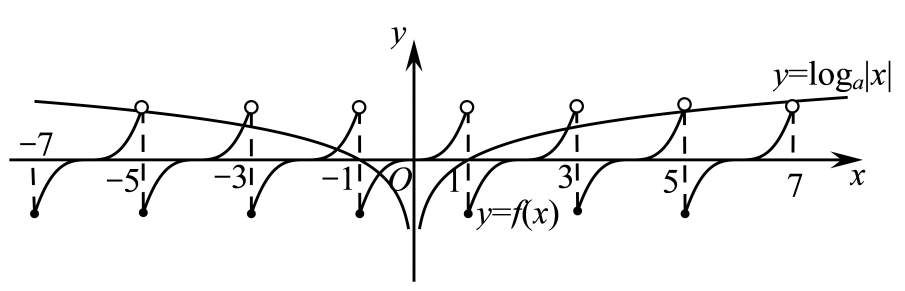
【分析】函数的根转化为两个新函数图像的焦点问题，再对对数函数的进行分类讨论即可.

【详解】由知是周期为2的周期函数，

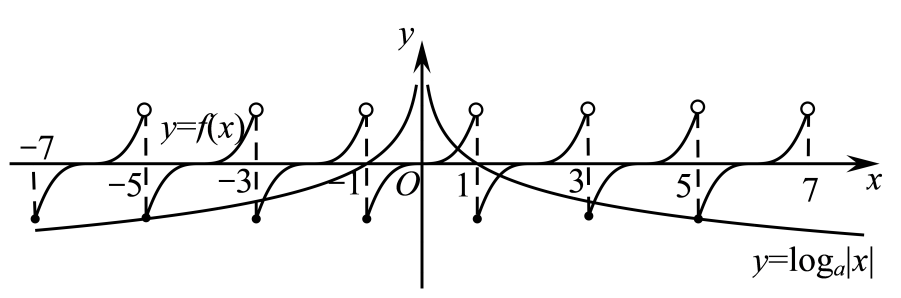
函数至少有6个零点等价于函数 与的图象至少有6个交点，

①当时,画出函数与的图象如下图所示,

根据图象可得,即.



②当时,画出函数与的图象如下图所示,



根据图象可得,即 .

综上所述,的取值范围是.

故选：A

**二、多选题(本大题共4小题，共20.0分.在每小题有多项符合题目要求)**

9. 下列计算结果为有理数的是( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据特殊角的三角函数判断A，根据对数的运算性质与换底公式判断BCD.

【详解】，不是有理数，故A错误；

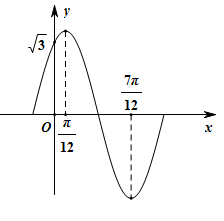
，是有理数，故B正确；

，是有理数，故C正确；

，是有理数，故D正确.

故选:BCD

10. 已知函数在一个周期内的图象如图所示，其中图象最高点、最低点的横坐标分别为、，图象在轴上的截距为．则下列结论正确的是( )



A. 的最小正周期为

B. 的最大值为2

C. 在区间上单调递增

D. 为偶函数

【答案】BC

【解析】

【分析】

由周期求，由五点法作图求出的值，由特殊点的坐标求出*A*，再利用三角函数的图象和性质，得出结论．

【详解】由图知，的最小正周期，则.

由，得.由，得，则，所以.

当时，，则单调递增.

因为，则不是偶函数，

故选：BC．

【点睛】本题主要考查三角函数的图象与性质，解题的关键是会根据图象求解析式.

11. 已知函数，则下列结论正确的是( )

A. 当时，无零点

B. 当时，只有一个零点

C. 当时，有两个零点

D. 若有两个零点，，则

【答案】ABD

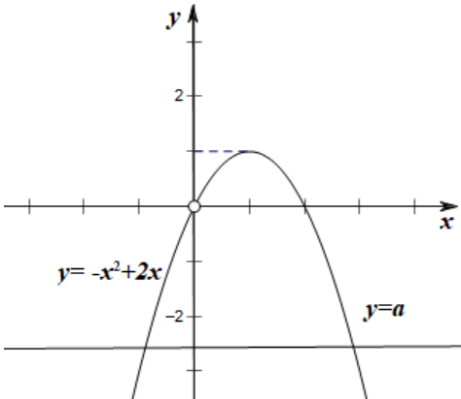
【解析】

【分析】

判断函数零点转化为判断方程的根，再转化为考察直线和抛物线的位置关系即可求解.

【详解】令，则，即，即．

考察直线和抛物线的位置关系，由图可知，



当时，无零点；

当或时，只有一个零点，

当且时，有两个零点；

若有两个零点，，则，是方程的两根，

由韦达定理，得，

故选：ABD

12. 若*a*，*b*，*c*∈*R*，且*ab*＋*bc*＋*ca*＝1，则下列不等式成立的是( )

A. *a*2＋*b*2＋*c*2≥1 B. *a*＋*b*＋*c*≤

C. ++ ≤2 D. (*a*＋*b*＋*c*)2≥3

【答案】AD

【解析】

【分析】

先利用均值不等式得到*a*2＋*b*2＋*c*2≥*ab*＋*bc*＋*ca*，确定A正确，进而推出BD选项正误，再利用特殊值验证C项错误即可.

【详解】由均值不等式知*a*2＋*b*2≥2*ab*，*b*2＋*c*2≥2*bc*，*a*2＋*c*2≥2*ac*，于是*a*2＋*b*2＋*c*2≥*ab*＋*bc*＋*ca*＝1，故A正确；而(*a*＋*b*＋*c*)2＝*a*2＋*b*2＋*c*2＋2(*ab*＋*bc*＋*ca*)≥3(*ab*＋*bc*＋*ca*)＝3，故D项正确，B项错误；令*a*＝*b*＝*c*＝，则*ab*＋*bc*＋*ca*＝1，但 ＝3＞2，故C项错误．

故选：AD.

**三、填空题(本大题共4小题，共20.0分)**

13. 已知集合，，则\_\_\_\_\_\_

【答案】

【解析】

【分析】解不等式求出集合 ,根据集合的交集运算即可求得答案.

【详解】由题意解不等式可得或，则或，

解不等式，即且 ，则 ，

故，

所以，

故答案为：.

14. 设是第二象限角，为其终边上一点，且，则\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】根据三角函数定义，求得，以及，再结合正切的倍角公式，即可求得结果.

【详解】根据题意，，解得或或，又是第二象限角，故；

则，则.

故答案为：.

15. 在等式的等号右侧两个分数的分母方块处，各填上一个正整数，并且使这两个正整数的和最小，则这两个数的积为\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】将题意转化为，，求最小时的值，再根据基本不等式求解即可.

【详解】由题意，即，，求最小时的值.

因为，当且仅当，即时取等号，此时，.

故答案为：

16. 对于函数，若在其定义域内存在两个实数，使当时，的值域也是，则称函数为“保值”函数，区间称为函数的“等域区间”.

(1)请写出一个满足条件的“保值”函数：\_\_\_\_\_\_

(2)若函数是“保值”函数，则实数*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

【答案】 ①.  ②. 

【解析】

【分析】(1)单调函数，定义域与值域一样，固然想到

(2)根据判断的单调性，转化为关于的方程的两个实数根.

【详解】(1)由题意得方程至少有两个根，设函数

(2)因为是增函数，

若是“保值”函数，则存在实数，

使即

所以是关于的方程的两个实数根，

从而方程有两个不相等的实数根.

令，则

函数在上单调递减，在上单调递增，

，根据二次函数的图象可知，

当且仅当时，直线与曲线有两个不同的交点，

即方程有两个不相等的实数根，故实数的取值范围是.

**四、解答题(本大题共6小题，共70.0分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)**

17. 已知函数，集合

(1)当时，求函数的最大值；

(2)记集合，若是的必要条件，求实数*a*的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)先求出对称轴，再讨论区间与对称轴的关系，即可求解．

(2)先得到，再分和，分别列出不等式组，求解即可．

【小问1详解】

，，对称轴为，

当时，在上单调递减，，

当时，在,上单调递增，在,上单调递减，，

当时，在,上单调递增，，

综上所述：．

【小问2详解】

是的充分条件，

①当时，，解得，

②当时，由题意得方程，即在,上有两个实根，

令，则，解得，

综上所述：实数的取值范围是．

18. 已知函数.

(1)求证：是奇函数；

(2)求证：；

(3)若，，求，的值．

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析 (3)， 

【解析】

【分析】(1)由函数解析式可得，求得函数的定义域关于原点对称．再根据，可得是奇函数．

(2)根据对数的运算法则分别求得，，可得要证的等式成立．

(3)由条件利用(2)的结论可得，，由此求得和的值．

【小问1详解】

解：由函数，可得，即，解得，故函数的定义域为，关于原点对称．

再根据，可得是奇函数．

【小问2详解】

证明：，

而，

成立．

小问3详解】

解：若，，则由(2)可得，，

解得， ．

19. 设．

(1)求使不等式成立的的取值集合；

(2)先将图象上所有点的横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变；再向右平移个单位；最后向下平移个单位得到函数的图象．若不等式在上恒成立，求实数的取值范围．

【答案】(1)；(2)．

【解析】

【分析】(1)利用降幂公式和辅助角公式可得，因此等价于，利用正弦函数的性质可求不等式的解集.

(2)根据图象变换可得，从而原不等式可化为在，换元后利用二次函数的性质可求的取值范围.

【详解】解：.

(1)即：

，

所以原不等式的解集为：.

(2)将图象上所有点的横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变,得；再向右平移个单位，得；最后向下平移个单位得到函数，

∴.

设，由可得：，

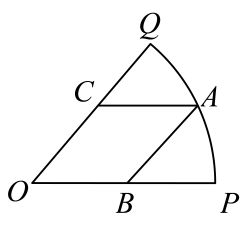
则原不等式等价于：在上恒成立；

设，，则在递增，在递减，所以，

所以．

【点睛】形如的函数，可以利用降幂公式和辅助角公式将其化为的形式，再根据正弦函数的性质求与相关的不等式或方程的求解问题．另外，含的二次式的恒成立问题，常通过换元转化为一元二次不等式在相应范围上的恒成立问题.

20. 如图所示，有一块扇形钢板*OPQ*，面积是平方米，其所在圆的半径为1米，



(1)求扇形圆心角的大小；

(2)现在钢板*OPQ*上裁下一块平行四边形钢板*ABOC*，要求使裁下的钢板面积最大.试问如何确定*A*的位置，才能使裁下的钢板符合要求？最大面积为多少？

【答案】(1)

(2)当是的中点时，裁下的钢板符合要求，最大面积为平方米

【解析】

【分析】(1)利用扇形面积公式列方程，从而求得扇形圆心角的大小.

(2)连接，设，将裁下的钢板的面积用来表示，结合三角函数的性质求得面积的最大值以及此时点的位置.

【小问1详解】

依题意，，

设，则，

即扇形圆心角的大小为.

【小问2详解】

连接，设，过作，垂足为，

在中，，

所以，

设四边形的面积为，

则

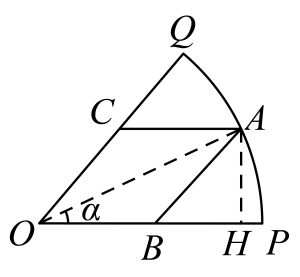


，

由于，

所以当时，取得最大值为(平方米).

所以当是的中点时，裁下的钢板符合要求，最大面积为平方米.



21. 某产品近日开始上市，通过市场调查，得到该产品每1件的市场价单位：元与上市时间单位：天的数据如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 上市时间*x*天 | 4 | 10 | 36 |
| 市场价*y*元 | 90 | 51 | 90 |

(1)根据上表数据，从下列函数中选取一个恰当的函数描述该产品的市场价*y*与上市时间*x*的变化关系，并简要说明你选取的理由；①②③

(2)利用你选取的函数，求该产品市场价最低时的上市天数以及最低的价格；

(3)设你所选取的函数为，若对任意实数*k*，关于*x*的方程恒有两个相异实数根，求实数*m*的取值范围.

【答案】(1)

(2)该产品上市20天时市场价最低，最低的价格为26元；

(3)

【解析】

【分析】(1)随着时间的增加，的值先减后增，结合函数的单调性即可得出结论；

(2)把点代入中，求出函数的解析式，利用配方法，即可求出该产品市场价最低时的上市天数以及最低的价格；

(3)由(2)结合题意可得有两个相异的实根，然后由可求出实数*m*的取值范围.

【小问1详解】

因为随着时间的增加，的值先减后增，而所给的函数中和都是单调函数，不满足题意，

所以选择

【小问2详解】

把点代入中，得

，

解得，

所以，

所以当时，有最小值26，

所以当该产品上市20天时市场价最低，最低的价格为26元；

【小问3详解】

由(2)可知，

所以由，得

，

即，

因为方程有两个相异实数根，

所以，

所以，

因为对任意实数*k*，上式恒成立，

所以，解得，

所以实数*m*的取值范围为.

22. 已知函数().

(1)若，求函数的最小值；

(2)若函数存在两个不同的零点与，求的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)由题意可知，对自变量进行分类讨论，将函数写成分段函数形式利用函数单调性即可求得函数的最小值；(2)对参数的取值进行分类讨论，利用韦达定理写出关于的表达式，再利用换元法构造函数根据函数单调性即可求得其取值范围.

【小问1详解】

解法一：若时，求函数，

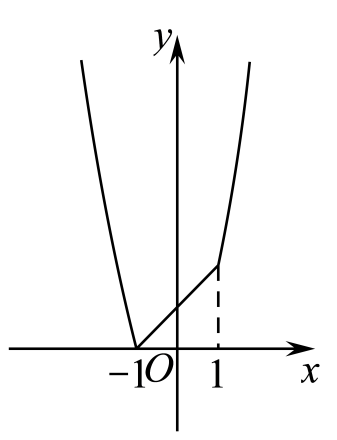
当时，，.

当时，，.

故.

解法二：若时，求函数；

画出和的图像如下图所示：



易得.

小问2详解】

解法一：若，，因为存在两个不同的零点与，所以，得，此时，；

若，，

当时，即时，得，，

有，

令，则，

令，则在上单调递增，，则；

当，即时，有，

在上单调递减，上单调递增，

所以，无零点；

当时，只有一个零点；

故.

解法二：令，等价于存在两个不同的零点与，

当时，，因为存在两个不同的零点与，

所以，得，此时；

当时，

当，即时，得，，

有，

所以；

当，即时，有，在上单调递减，上单调递增，，无零点；

当时，只有一个零点；

故.

【点睛】方法点睛：求解二次函数零点问题时，一般将零点问题转化成二次方程根的问题，利用韦达定理写出两根之间的关系式进而求得某表达式的取值范围.