**2022—2023学年第一学期高一年级期中考试**

**数学试题**

**一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上.**

1. 已知集合，则的真子集的个数为( )

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】集合的元素是个，则其真子集个数是个.

【详解】，则的真子集为：

故选：C

2. 下列图象中，表示函数关系的有( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数概念逐一判断即可.

【详解】根据函数的概念知，对于定义域内任意，都有唯一确定的和它对应，由图象可看出，

对于A，当时，有两个值与其对应，不符合；

对于B，当时，有两个值与其对应，不符合；

对于C，符合定义域内任意，都有唯一确定的和它对应，可表示函数关系；

对于D，当时，有无数个值与其对应，不符合.

故选：C.

3. 已知函数是幂函数，且时，单调递减，则的值为( )

A.  B. 1 C. 2或 D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】利用幂函数的定义及性质列式计算并判断.

【详解】∵ 是幂函数，

∴，即，解得，或，

又当 时，单调递减，∴，

当时，，不合题意，舍去；

当，，符合题意，

故．

故选：A．

4. 镜片的厚度是由镜片的折射率决定，镜片的折射率越高，镜片越薄，同时镜片越轻，也就会带来更为舒适的佩戴体验．某次社会实践活动中，甲、乙、丙三位同学分别制作了三种不同的树脂镜片，折射率分别为，，．则这三种镜片中，制作出最薄镜片和最厚镜片的同学分别为( )

A. 甲同学和乙同学 B. 丙同学和乙同学

C. 乙同学和甲同学 D. 丙同学和甲同学

【答案】C

【解析】

【分析】判断出，，的大小关系即可得出答案.

【详解】，．∵．∴．

又∵，，∴．

∴有．

又因为镜片折射率越高，镜片越薄，故甲同学创作的镜片最厚，乙同学创作的镜片最薄．

故选：C.

5. 已知为实数，使“，”为真命题的一个充分不必要条件是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据全称量词命题的真假性求得的取值范围，然后确定其充分不必要条件.

【详解】解：依题意，全称量词命题：为真命题，

所以，在区间上恒成立，所以，

所以使“”为真命题的一个充分不必要条件是“”.

故选：B

6. 已知函数由下表给出，若，则

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 1 | 3 | 1 | 2 |

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】结合表格数据可得的值,进而可求得的值,即可求得.

【详解】由题可得,,则,故.

故选:D.

【点睛】本题考查了函数值的求法,利用表格中的数据是解决本题的关键,属于基础题.

7. 已知，，且满足，则的最大值为( )

A. 9 B. 6 C. 4 D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】由题可得，利用基本不等式可得 ，进而即得.

【详解】因为，，，

所以，

所以，

当且仅当，即时等号成立，

所以，即的最大值为1.

故选：D

8. 一次速算表演中，主持人出题：一个35位整数的31次方根仍是一个整数，下面我报出这个35位数，请说出它的31次方根.这个35位数是……未等主持人报出第一位数字，速算专家已经写出了这个数的31次方根：13.其实因为只有一个整数，它的31次方是一个35位整数.速算专家心中记住了右表(表中常用对数为近似值).请你也尝试借助此表求一求：一个31位整数的64次方根仍是一个整数，这个64次方根是( )

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 真数 | 常用对数 | 真数 | 常用对数 |
| 2 | 0.30 | 11 | 1.04 |
| 3 | 0.48 | 12 | 1.08 |
| 4 | 0.60 | 13 | 1.11 |
| 5 | 0.70 | 14 | 1.15 |
| 6 | 0.78 | 15 | 1.18 |
| 7 | 0.85 | 16 | 1.20 |
| 8 | 0.90 | 17 | 1.23 |
| 9 | 0.95 | 18 | 1.26 |
| 10 | 1.00 | 19 | 1.28 |

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可知，两边取对数，然后计算出的取值范围，查表即可得出答案.

【详解】解：由题意得：

，

，

，即，

故此，即，

又因为为整数，故根据上表可知：，

故选：B

**二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上.全部选对得5分，部分选对得2分，不选或有选错的得0分.**

9. 若不等式的解集是，则下列对于系数，，的结论中，正确的是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】ABC

【解析】

【分析】由一元二次不等式与一元二次方程根的关系及韦达定理可得*b*、*c*可用*a*的代数式表示，检验各选项即可得结果.

【详解】由题意知：

A项： ，即：A项正确；

B项： ，即：B项正确；

C项： ，即：C项正确；

D项：，即：D项错误.

故选：ABC.

10. 下列说法中，正确的是( )

A. 集合和表示同一个集合

B. 函数的单调增区间为

C. 若，，则用，表示

D. 已知是定义在上的奇函数，当时，，则当时，

【答案】BC

【解析】

【分析】对于A，根据集合的定义即可判断；对于B，利用复合函数的单调性即可判断；对于C，利用对数的换底公式及运算性质即可判断；对于D，利用函数的奇偶性求对称区间上的解析式即可判断.

【详解】对于A，集合中元素为数，集合为点，可知表示的不是同一个集合，所以A选项错误；

对于B，根据解得函数的定义域为，

令则，

为二次函数，开口向下，对称轴为，所以函数在区间上单调递增，在区间上单调递减，

函数为增函数，根据复合函数的单调性可知函数的单调增区间为，所以B选项正确；

对于C，因为，，根据对数的换底公式可得，所以C选项正确；

对于D，因为当时，，可令，则，所以，又因为是定义在上的奇函数，所以，与题干结果不符，所以D选项错误.

故选：BC.

11. 已知，，且，则( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于A，利用换元结合不等式的性质即可求解；对于B、C、D三个选项可以利用基本不等式证明求解.

【详解】对于A，因为，所以，又因为，，

所以，即，所以，

又因为，所以，可知A选项正确；

对于B，因为，

当且仅当，即，时等号成立，

所以，可知B选项错误；

对于C，因为，解得，当且仅当，即，时等号成立，可知C选项正确；

对于D，因为，所以，

所以，

当且仅当，即，时等号成立，可知D选项正确.

故选：ACD.

12. 定义在上的函数满足，当时，，则以下结论正确的是( )

A.  B. 为奇函数

C. 为单调减函数 D. 为单调增函数

【答案】ABD

【解析】

【分析】A.令求解判断；B.令求解判断；CD.令，，且，由判断其符号即可.

【详解】解：令得，即得，A正确；

在定义域范围内令得，即得是奇函数，B正确；

令，，且，

所以，

又且，，

所以，即，

所以，即

所以在上是单调增函数，D正确，C错误．

故选：ABD．

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.请把答案填写在答题卡相应位置.**

13. 计算：\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】3

【解析】

【分析】根据指数幂运算法则、对数恒等式运算即可.

详解】解：.

故答案：3.

14. 已知函数，则\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】用换元法求解析式,令,得,代入,即可得到的解析式

【详解】解：令,得,代入得

即的解析式为

故答案为：

15. 已知函数，其中，

(1)若函数在单调，则实数的范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)若存在互不相等的三个实数，，，使得，则函数的值域为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】 ①.  ②. 

【解析】

【分析】(1)利用单调性的定义进行处理.

(2)利用函数图象以及换元法来处理.

【详解】(1)当时，，在单调递增，当时，，其对称轴为，所以在

上单调递增，若函数在单调，则，

解得.

(2)若存在互不相等的三个实数，，，使得，

则的图象如图所示：



则，即，解得或(舍去).

对于函数，令，，所以，

其对称轴为，所以在上单调递减，所以，则函数的值域为.

故答案为：，.

16. 已知为正实数，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】6

【解析】

【分析】将原式变形为，结合基本不等式即可求得最值.

【详解】由题得，

设，则.

当且仅当时取等.

所以的最小值为6.

故答案为：6

**四、解答题：本大题共6小题，共70分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.**

17. (1)求的值；

(2)已知，求的值.

【答案】(1)；(2)

【解析】

【分析】(1)利用指数幂的运算性质化简计算即可；

(2)把平方，结合即可求得，利用可得的值，代入所求的式子即可得答案．

【详解】(1)；

(2)，，，

，．

18. 已知命题：对任意实数，不等式都成立，命题：关于的方程无实数根.若命题，有且只有一个是真命题，求实数的取值范围.

【答案】

【解析】

【分析】先求出真、真时的取值范围，根据题设条件可得真假或假真，从而可求出实数的取值范围.

详解】若真，对任意实数，不等式都成立.

∴当时，显然对于任意实数，不等式不都成立

当时，，解得

∴真时，；

若真，则方程无实数根，

∴，

∴真时，.

∵命题、中有且仅有一个真命题，

∴当真假时，且，故实数*m*的取值范围是：；

当假真时，且，故实数*m*的取值范围是：；

综上，实数取值范围为

19. 已知函数是定义域上的奇函数.

(1)确定的解析式；

(2)用定义证明：在区间上是减函数；

(3)解不等式.

【答案】(1)；(2)证明见解析；(3).

【解析】

【分析】

(1)利用奇函数的定义，经过化简计算可求得实数，进而可得出函数的解析式；

(2)任取、，且，作差，化简变形后判断的符号，即可证得结论；

(3)利用奇函数的性质将所求不等式变形为，再利用函数的定义域和单调性可得出关于的不等式组，即可解得实数的取值范围.

【详解】(1)由于函数是定义域上的奇函数，则，

即，化简得，因此，；

(2)任取、，且，即，

则，

，，，，，，.

，，因此，函数在区间上是减函数；

(3)由(2)可知，函数是定义域为的减函数，且为奇函数，

由得，所以，解得.

因此，不等式的解集为.

【点睛】本题考查利用函数的奇偶性求参数、利用定义法证明函数的单调性以及函数不等式的求解，考查推理能力与运算求解能力，属于中等题.

20. 某地拟建造一座大型体育馆，其设计方案侧面的外轮廓如图所示，曲线是以点为圆心的圆的四分之一部分，其中，轴，垂足为；曲线是抛物线的一部分；，垂足为，且恰好等于的半径，假定拟建体育馆的高(单位：米，下同).



(1)试将用和表示；

(2)若要求体育馆侧面的最大宽度不超过75米，求的取值范围.

【答案】(1)，

(2)

【解析】

【分析】(1)根据抛物线方程求得，从而可得半径，即，进而求解出点坐标后，可知；

(2)根据题意，恒成立，即恒成立，再根据基本不等式求最值即可得答案.

【小问1详解】

解：由抛物线方程得： ，

∵，均为圆的半径，

，圆的半径为：，

∴，入抛物线方程可得，解得，

∵曲线是以点为圆心的圆的四分之一部分，其中，轴，垂足为，

∴，

∴，.

【小问2详解】

解：∵要求体育馆侧面的最大宽度不超过75米，

，整理可得：，

，

(当且仅当时取等号)，

 ，

.

∴的取值范围为：

21. 已知集合，集合.

(1)若，求的取值范围；

(2)在中有且仅有两个整数，求的取值范围.

【答案】(1)；

(2).

【解析】

【分析】(1)根据二次根式的性质，结合一元二次不等式的解法、集合并集的性质分类讨论进行求解即可；

(2)根据集合交集的定义，结合题意进行求解即可.

【小问1详解】

由，所以.

由，

因为，所以，

当时，即时，不等式为，显然该不等式解集为空集，

即，显然成立；

当时，即时，，

要想，只需，而，所以；

当时，即时，，

要想，只需，而，所以，

综上所述：的取值范围为；

【小问2详解】

由(1)可知：当时，，此时不符合题意；

由(1)可知：当时，，

要想中有且仅有两个整数，只需，或，

由，显然，所以，

由，

所以；

由(1)可知：时，，

要想中有且仅有两个整数，只需，或，

由，而，即，

由，

所以，

综上所述：的取值范围为.

【点睛】关键点睛：根据一元二次方程两根的大小确定一元二次不等式的解集，分类讨论是解题的关键.

22. 对于定义域为的函数，如果存在区间，同时满足：①在内是单调函数；②当定义域是时，的值域也是，则称是该函数的“优美区间”．

(1)写出函数的一个“优美区间”；

(2)求证：函数不存在“优美区间”；

(3)已知函数有“优美区间”，当变化时，求出的最大值．

【答案】(1)

(2)答案见解析 (3)

【解析】

【分析】(1)结合“优美区间”的定义，即可写出函数的一个“优美区间”；

(2)若函数存在“优美区间”，可得函数在上单调递减，从而可得，联立可推出矛盾，即可证明结论；

(3)函数有“优美区间”，结合单调性可得，说明是方程的两个同号且不等的实数根，结合根与系数的关系可求得的关系，进而可求得的最大值．

【小问1详解】

是的一个“优美区间”，证明如下：

在区间上单调递增，

又，，∴的值域为，

∴是的一个“优美区间”．

【小问2详解】

设是函数的定义域的子集．

由，可得或，

∴函数在上单调递减．

若是函数的“优美区间”，则，

两式相减得，，则，

，

则，显然等式不成立，

∴函数不存在“优美区间”．

【小问3详解】

的定义域为，是函数的定义域的子集，

则或，

而函数在上单调递增，

若是函数的“优美区间”，则，

∴是方程，即的两个同号且不等的实数根．

，∴同号，

只需，解得或，

，，

，

∴当时，取得最大值．