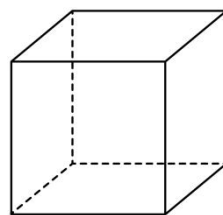


理科数学

第 I 卷 选择题 (60 分)

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $B = \{x | x > 1\}$ ，则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$
 A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $(-\infty, 1]$
- 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$ ，则 $z - \bar{z} =$
 A. $-i$ B. i C. 0 D. 1
- 从 1, 2, 3, 8, 9 中任取两个不同的数，记为 (a, b) ，则 $\log_a b > 1$ 成立的概率为
 A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{10}$
- 函数 $f(x)$ 的图象向右平移一个单位长度，所得图象与 $y = e^x$ 关于 y 轴对称，则 $f(x) =$
 A. e^{x+1} B. e^{x-1} C. e^{-x+1} D. e^{-x-1}
- 如果一次伯努利试验中，出现“成功”的概率为 $\frac{1}{3}$ ，记 6 次独立重复试验中出现“成功”的次数为 X ，则 $D(X) =$
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4
- 在 $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^9$ 的展开式中， x^3 的系数为
 A. 120 B. 84 C. 210 D. 126
- 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1 (单位: m) 的正方体容器 (容器壁厚度忽略不计) 内的有
 A. 直径为 1.01m 的球体
 B. 所有棱长均为 1.42m 的四面体
 C. 底面直径为 1.01m，高为 1.8m 的圆柱体
 D. 底面直径为 1.2m，高为 0.01m 的圆柱体



8. 教室的图书角摆放了一些阅读书目，其中有 3 本相同的论语、6 本互不相同的近代文学名著，现从这 9 本书中选出 3 本，则不同的选法种数为

- A. 84 B. 42 C. 41 D. 35

9. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，分别取棱 AA_1 ， A_1D_1 的中点 E ， F ，点 G 为 EF 上一个动点，则点 G 到平面 ACD_1 的距离为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆 C 上, 且 $PF_2 \perp F_1F_2$, 过 P 作 F_1P 的垂线交 x 轴于点 A , 若 $|AF_2| = \frac{1}{2}c$, 记椭圆的离心率为 e , 则 $e^2 =$

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ B. $3-\sqrt{5}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\frac{1}{2}$

11. 已知 $a = \sin \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $c = \cos \frac{1}{2}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

12. 若 $x \in (1, +\infty)$ 时, 关于 x 的不等式 $ax^{a-1} \ln x - e^x \leq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$ B. $(-\infty, e]$ C. $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ D. $\left(\frac{1}{e}, e\right]$

第 II 卷 非选择题 (90 分)

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 写出“ $x + \frac{1}{x} \leq -2$ ”的一个充分不必要条件_____.

14. 牛膝是苋科多年生药用草本植物, 具有活血通经、补肝肾、强筋骨等功效, 可用于治疗腰膝酸痛等症状. 某农户种植牛膝的时间 x (单位: 天) 和牛膝的根部直径 y (单位: mm) 的统计表如下:

x	20	30	40	50	60
y	0.8	1.3	2.2	3.3	4.5

由上表可得经验回归方程为 $\hat{y} = 0.094x + \hat{a}$, 若此农户准备在 $y = 9\text{mm}$ 时采收牛膝, 据此模型预测, 此批牛膝采收时间预计是第_____天.

15. 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(2, 0)$ 且上顶点到 x 轴的距离为 1, 直线 m 过点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 与椭圆 E 交于 A, B 两点且 AB 中点在坐标轴上, 则直线 m 的方程为_____.

16. 已知等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边 $BC = 2\sqrt{2}$, 沿斜边的高线 AD 将 $\triangle ABC$ 折起, 使二面角 $B-AD-C$ 为 60° , 则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

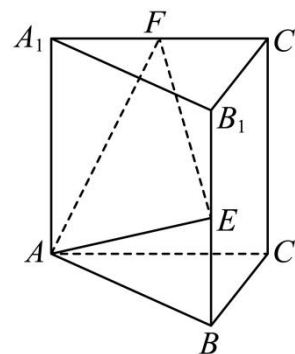
(一) 必考题: 共 60 分.

17. 为积极响应国家医药卫生体制改革及 2023 年全国文化科技“三下乡”活动要求, 真正让“人民至上”理念落到实处, 着力推动优质医疗资源重心下移、力量下沉, 不断增强医疗服务的“深度”和“温度”. 我市人民医院打算从各科室推荐的 6 名医生中任选 3 名去参加“健康送下乡, 义诊暖人心”的活动. 这 6 名医生中, 外科医生、内科医生、眼科医生各 2 名.

(1) 求选出的外科医生人数多于内科医生人数的概率;

(2) 设 X 表示选出的 3 人中外科医生的人数, 求 X 的均值与方差.

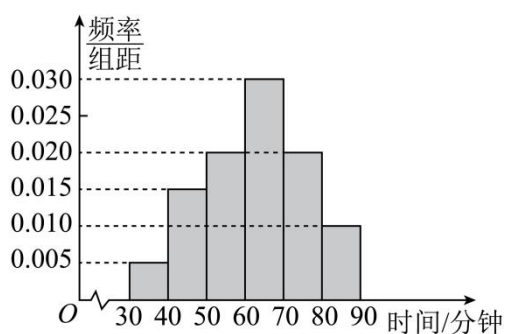
18. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 E, F 分别为棱 BB_1, A_1C_1 的中点.



(1) 若过 A, E, F 三点的平面, 交棱 B_1C_1 于点 P , 求 $\frac{C_1P}{PB_1}$ 的值;

(2) 若三棱柱所有棱长均为 2, 求 A_1E 与平面 AEF 所成角的正弦值.

19. 某市为了解该市小学生在“双减”政策下课外活动的时间, 随机抽查了 50 名小学生, 统计了他们参加课外活动的时间, 并绘制了如下的频率分布直方图, 如图所示.



(1) 由频率分布直方图估计小学生课外活动时间的平均数 (同一组中的数据用该组区间的中点值代替);

(2) 由频率分布直方图可认为: 课外活动时间 t (分钟) 近似服从正态分布 $N(\mu, 13.4^2)$, 其中 μ 为样本中课外活动时间的平均数. 用频率估计概率, 在该市随机抽取 10 名学生, 记课外活动时间在 $(35.7, 75.9]$ 内的人数为 X , 求 X 的数学期望 (精确到 0.1).

参考数据: 当 t 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 时, $P(\mu - \sigma < t \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < t \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$,

$P(\mu - 3\sigma < t \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$.

20. 已知函数 $f(x) = ae^x - x - a$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的值;

(2) 证明: 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) > x \ln x - \sin x$ 成立.

21. 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上任取一点 D , 过点 D 作 x 轴的垂线段 DH , H 为垂足, 线段 DH 上一点 E 满足 $\frac{|DH|}{|EH|} = \sqrt{2}$.

记动点 E 的轨迹为曲线 C

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 设 O 为原点, 曲线 C 与 y 轴正半轴交于点 A , 直线 AP 与曲线 C 交于点 P , 与 x 轴交于点 M , 直线 AQ 与曲线 C 交于点 Q , 与 x 轴交于点 N , 若 $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = -2$, 求证: 直线 PQ 经过定点.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (选修 4-4 极坐标与参数方程)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - \frac{2t}{3} \end{cases}$, (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴非负

半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{1 + 3\sin^2 \theta}$.

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若 P 是曲线 C 上一点, Q 是直线 l 上一点, 求 $|PQ|$ 的最小值.

23. (选修 4-5 不等式选讲)

已知函数 $f(x) = |x - 3| + |x - 2|$.

(1) 求不等式 $f(x) < 3$ 的解集 M ;

(2) 证明: 当 $a, b \in M$ 时, $|a + b| < |1 + ab|$.