泸县五中高2021级高三上学期开学考试

文科数学参考答案

1．A　2．A　3．D　4．D　5．C　6．B 7．D　8．D　9．D　10．A　11．B　12．B

13．$x=-2$（答案不唯一）　14．110　15．$y=\frac{1}{2}$或$y=\frac{1}{2}x$或$x=1$　16．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

17．解：（1）依题意可得：$c=120\div 500\div 10=0.024$

又∵ a,b,c 成等差数列，

∴ $2b=a+c$ 且 $(0.005\times 2+a+b+c)\times 10=1$，

解得：$a=0.036, b=0.03$

（2）估计中位数设为 t，而 $[50,70)$ 的频率为 0.41，$[50,80)$ 的频率为 0.71,则 $t\in[70,80)$，

∴ $(0.005+0.036)\times 10+(t-70)\times 0.03=0.5$，

解得：$t=73$，即中位数估计为 73，

估计平均数为：

$55\times 0.05+65\times 0.36+75\times 0.3+85\times 0.24+95\times 0.05=73.8$．

（3）5 人中，将甲、乙分别编号为 1,2，其余 3 人编号 $3,4,5$，

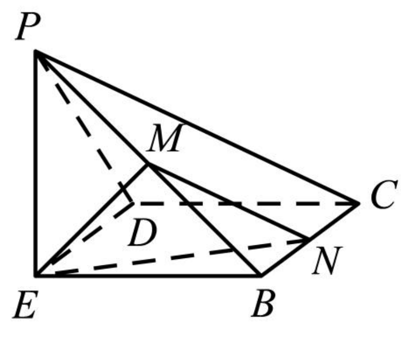
从这 5 人中选 3 人帮助 A 的所以可能结果有：（1，2，3），（1，2，4），（1，2，5），

（1，3，4），（1，3，5）（1，4，5），（2，3，4），（2，3，5），（2，4，5），（3，4，5），共 10 个基本事件，

其中满足条件的有（1，2，3），（1，2，4），（1，2，5），共 3 个，故满足条件的概率为$\frac{3}{10}$.

18．解：（1）证明：∵ $PE\perp EB$，$PE\perp ED$，$EB\cap ED=E$，$EB,ED\subset$平面 $EBCD$

∴ $PE\perp$平面 $EBCD$ 又 $BC\subset$ 平面 $EBCD$，∴ $PE\perp BC$



∵ $BC\perp EB$，$PE,BE\subset$平面 PEB，$PE\cap BE=E$

∴ $BC\perp$平面 PEB

∵ $EM\subset$平面 PEB ∴ $EM\perp BC$

由 $PE=EB$，$PM=MB$ 知 $EM\perp PB$

又 $BC,PB\subset$平面 PBC，$BC\cap PB=B$

∴ $EM\perp$平面 PBC 又 $EM\subset$平面 EMN，∴平面 $EMN\perp$平面 PBC

（2）∵ N 为 BC 中点∴ $\frac{S_{\Delta EBN}}{S_{EBCD}}=\frac{\frac{1}{2}EB\cdot BN}{EB\cdot BC}=\frac{1}{4}$，

点 M，P 到平面 $EBCD$ 的距离之比为$\frac{1}{2}$ ∴ $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}S_{\Delta EBC}}{\frac{1}{3}S_{EBCD}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

19 解：（1）解：$f\left(x\right)=\frac{1+\cos 2\omega x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+a=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+a+\frac{1}{2}$.

选择①②：因为$f\left(0\right)=1+a=\frac{1}{2}$，所以$a=-\frac{1}{2}$，

又因为$f\left(x\right)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以$\omega=1$，所以$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$；

选择②③：因为$f\left(x\right)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以$\omega=1$，则$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+a+\frac{1}{2}$，

又因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}+a=1$，所以$a=-\frac{1}{2}$，所以$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$；

选择①③：因为$f\left(0\right)=1+a=\frac{1}{2}$，所以$a=-\frac{1}{2}$，所以$f\left(x\right)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.

又因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以$\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，

所以$\omega=1+6k$，$k\in\mathrm{Z}$，又因为$0<\omega<2$，所以$\omega=1$，所以$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

（2）解：依题意，令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，

解得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，

所以$f\left(x\right)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathrm{Z}$.

20．解：（1）解法一：由$f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{x}-x-a$，得$f\left(0\right)=0$，

又$f(x)\ge 0$，所以$x=0$是$f\left(x\right)$的极小值点，

故$f'\left(0\right)=0$，而$f'\left(x\right)=a\mathrm{e}^{x}-1,f'\left(0\right)=a-1=0$，故$a=1$，若$a=1$，则$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-1$，

当$x<0,f'\left(x\right)<0$；当$x>0,f'\left(x\right)>0$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$单调递减，在$\left(0,+\infty\right)$单调递增，

故$x=0$是$f\left(x\right)$唯一的极小值点，也是最小值点，

由$f\left(0\right)=0$，所以当且仅当$a=1$时$f(x)\ge 0$，

解法二：由$f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{x}-x-a$，得$f\left(0\right)=0$，又$f'\left(x\right)=a\mathrm{e}^{x}-1$，

当$a\le 0$时，有$f'\left(x\right)<0$恒成立，所以$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递减，

又$f\left(0\right)=0$，则$f(x)\ge 0$不成立，

当$a>0$时，令$f'\left(x\right)=0$，得$x=\ln\frac{1}{a}$，

则 $x>\ln\frac{1}{a}$ 时，有 $f'(x)>0, x<\ln\frac{1}{a}$ 时，有 $f'(x)<0$，

即 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 单调递减，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1+\ln a-a\geq 0$，

$(1+\ln x-x)'=\frac{1-x}{x}$，

函数 $y=1+\ln x-x$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，$(0,1)$ 单调递增，

$f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1+\ln a-a\leq 0$，当且仅当 $a=1$ 取等号，

故 $a=1$；

（2）当 $a\geq 1, x>0$ 时，$f(x)=ae^x-x-a=a\left(e^x-1\right)-x\geq e^x-1-x$，设 $g(x)=e^x-x-x\ln x+\sin x-1$，

当 $0<x\leq 1$ 时，$-x\ln x>0, \sin x>0$，又由（1）知 $e^x-1-x>0$，故 $g(x)>0$，

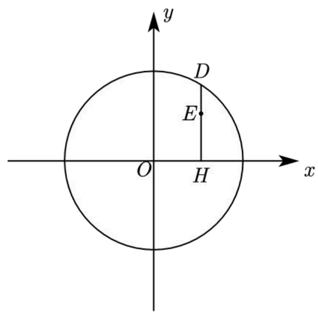
当 $x>1$ 时，$g'(x)=e^x-2-\ln x+\cos x$，

设 $h(x)=e^x-2-\ln x+\cos x$，则 $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}-\sin x, h'(x)>e-1-1>0$,

则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$h(x)>h(1)=e-2+\cos 1>0$，

所以 $g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$g(x)>g(1)=e-2+\sin 1>0$，

综上，$g(x)>0$，即当 $a\geq 1$ 时，$f(x)>x\ln x-\sin x$



.21．解：（1）由题意，设 $E(x,y), D(x_0,y_0)$，又 $\frac{|DH|}{|EH|}=\sqrt{2}$，则 $\begin{cases}x_0=x\\ y_0=\sqrt{2}y\end{cases}$，又

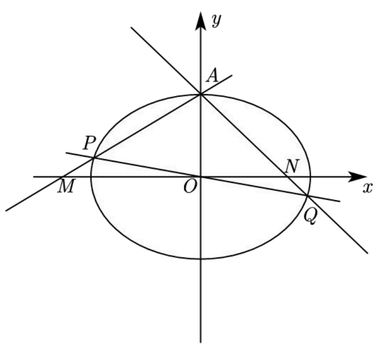
因为点 D 在圆 $x^2+y^2=2$ 上，所以 $x^2+2y^2=2$，故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

（2）由题意，$A(0,1)$，设 $M(a,0), N(b,0)$，则 $\overline{OM}\cdot\overline{ON}=ab=-2$，易得 AP,AQ 斜率必然存在，所以

$k_{AP}\cdot k_{AQ}=k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{-1}{a}\cdot\frac{-1}{b}=-\frac{1}{2}$，

设 $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$，由图象易知，直线 PQ 斜率不存在时不符合题意，设直线 PQ 的方程为 $y=kx+n$，

联立曲线 C 的方程 $\begin{cases}y=kx+n\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得 $\left(2k^2+1\right)x^2+4knx+2n^2-2=0$，



$\Delta=(4kn)^2-4(2k^2+1)\left(2n^2-2\right)=16k^2-8n^2+8>0$ 得 $n^2<2k^2+1$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-4kn}{2k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{2n^2-2}{2k^2+1}$，由题意知，直线 AP,AQ 均不过原点，所以 $x_1x_2\neq 0$，从而 $n\neq\pm1$，

所

$$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{kx_1+n-1}{x_1}\cdot\frac{kx_2+n-1}{x_2}=\frac{k^2x_1x_2+k(n-1)(x_1+x_2)+(n-1)^2}{x_1x_2}$$

$$=k^2+\frac{k(n-1)\cdot\dfrac{-4kn}{2k^2+1}+(n-1)^2}{\dfrac{2n^2-2}{2k^2+1}}=\frac{n-1}{2(n+1)}=-\frac{1}{2},$$

解得 $n=0$，满足 $\Delta>0$，所以直线 PQ 的方程为 $y=kx$，恒过定点 $(0,0)$.

22．解：（1）由直线 l 的参数方程，得直线 l 的普通方程为 $2x+3y-8=0$.

将 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\sin\theta=y$ 代入曲线 C 的极坐标方程，

化简得曲线 C 的直角坐标方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）由（1），设点 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$，

由题知 $|PQ|$ 的最小值为点 P 到直线 l 的距离的最小值.

又点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|4\cos\alpha+3\sin\alpha-8|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{|5\sin(\alpha+\varphi)-8|}{\sqrt{13}}$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{4}{3}$.

当 $\alpha+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，d 的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore |PQ|$ 的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

23．解：（1）当 $x\le 2$ 时，$f(x)=-(x-3)-(x-2)=-2x+5<3$，解得 $x>1$，所以 $2\ge x>1$，成立.

当 $2<x<3$ 时，$f(x)=-(x-3)+(x-2)=1<3$，恒成立，所以 $2<x<3$ 成立.

当 $x\ge 3$ 时，$f(x)=(x-3)+(x-2)=2x-5<3$，解得 $x<4$，所以 $3\le x<4$，成立

综上，原不等式的解集为 $M=\{x|1<x<4\}$

（2）$(a+b)^2-(1+ab)^2=(a^2-1)(1-b^2)$

$\because a,b\in(1,4)$，$\therefore 1-b^2\langle 0,a^2-1\rangle 0$　$\therefore (a+b)^2<(1+ab)^2$　，

$\therefore |a+b|<|1+ab|$.