绝密★启用前

高三数学考试(理科)

(考试时间:120 分钟　试卷满分:150 分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$,集合 $A=\{-1,1,2\}$,$B=\{-2,1\}$,则 $A\cap(\complement_U B)=$

A. $\{2\}$　B. $\{-2\}$　C. $\{-1,2\}$　D. $\{-1,0,2\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1-3i)z=7-i$,则 $z=$

A. $1+2i$　B. $1-2i$　C. $-1+2i$　D. $-1-2i$

3. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{10})$,则下列说法正确的是

A. $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{10}$对称

B. $f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{4},0)$对称

C. $f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$

D. 若将 $f(x)$图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,可得函数 $y=\sin(x+\frac{3\pi}{10})$的图象

4. 已知$\triangle ABC$ 的每条边长均为 2,D,E 分别是 BC,AC 的中点,则$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{3}{2}$　D. 3

5. 曲线 $y=\frac{x}{x-3}$在点$(2,-2)$处的切线方程为

A. $y=-3x+4$　B. $y=x-4$　C. $y=3x-8$　D. $y=3x-4$

6. 设椭圆 C_1:$\frac{x^2}{5}+y^2=1$,C_2:$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$的离心率分别为 e_1,e_2,若 $e_2=\frac{5}{6}e_1$,则 $b=$

A. 1　B. 2　C. $\sqrt{2}$　D. $\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x)=3^{x(2x-a)}$在区间$(-\infty,1)$上单调递减,则 a 的最小值为

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

8. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $b\cos C-c\cos B=a$,且 $A=2C$,则 $C=$

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{8}$　D. $\frac{\pi}{3}$

9. 已知某圆柱的轴截面是边长为 2 的正方形 $ABCD$,在该圆柱的底面内任取一点 E,则当四棱锥 $E-ABCD$ 的体积最大时,该四棱锥的侧面积为

A. $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$　B. $1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$　C. $1+\sqrt{2}+2\sqrt{5}$　D. $\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

10. 甲、乙两个家庭周末到附近景区游玩,其中甲家庭有 2 个大人和 2 个小孩,乙家庭有 2 个大人和 3 个小孩,他们 9 人在景区门口站成一排照相,要求每个家庭的成员要站在一起,且同一家庭的大人不能相邻,则所有不同站法的种数为

A. 144　B. 864　C. 1728　D. 2880

11. 第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在杭州举行,某网络直播平台调研"大学生是否喜欢观看体育比赛直播与性别有关",从某高校男、女生中各随机抽取 100 人进行问卷调查,得到如下数据($5\leqslant m\leqslant 15$,$m\in\mathbf{N}$).

	喜欢观看	不喜欢观看
男生	$80-m$	$20+m$
女生	$50+m$	$50-m$

通过计算,有 95%以上的把握认为大学生喜欢观看直播体育比赛与性别有关,则在被调查的 100 名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为

附:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.010	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	6.635	10.828

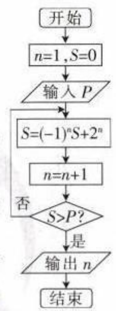
A. 55　B. 57　C. 58　D. 60

12. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 Γ:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点,过 F_1 的直线分别交双曲线左、右两支于 A,B 两点,点 C 在 x 轴上,$\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{F_2A}$,$BF_2$ 平分$\angle F_1BC$,则双曲线 Γ 的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$　B. $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$　C. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$　D. $y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}x$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若 x,y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant -1,\\ \frac{x}{3}-y\leqslant 1,\\ x+y\leqslant -1,\end{cases}$则 $z=2x-y$ 的最小值为____▲____.



14. 执行如图所示的程序框图,若输出的 $n=5$,则输入的正整数 P 的最小值为____▲____,最大值为____▲____.(本题第一空 3 分,第二空 2 分)

15. 黄金比又称黄金律,是指事物各部分间一定的数学比例关系,即将整体一分为二,较小部分与较大部分之比等于较大部分与整体之比,其比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$,上述比例又被称为黄金分割. 将底和腰之比等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的等腰三角形称为黄金三角形,若某黄金三角形的一个底角为 C,则 $\cos 2C=$____▲____.

16. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为 2 的球,则该正三棱柱体积的最大值为____▲____.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$na_{n+1}=3(n+1)a_n$．

（1）证明：$\{\frac{a_n}{n}\}$是等比数列．

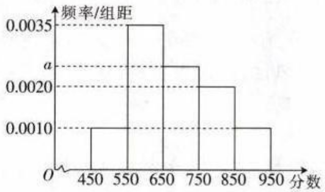
（2）设 $b_n=\frac{n^2}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

18．（12 分）

人工智能（AI）是当今科技领域最热门的话题之一，某学校组织学生参加以人工智能（AI）为主题的知识竞赛，为了解该校学生在该知识竞赛中的情况，现采用随机抽样的方法抽取了 600 名学生进行调查，分数分布在 450～950 分之间，根据调查的结果绘制的学生分数频率分布直方图如图所示．将分数不低于 850 分的学生称为“最佳选手”．

（1）求频率分布直方图中 a 的值，并估计该校学生分数的中位数；

（2）现采用分层抽样的方法从分数落在$[650,750)$，$[850,950]$内的两组学生中抽取 7 人，再从这 7 人中随机抽取 3 人，记被抽取的 3 名学生中属于“最佳选手”的学生人数为随机变量 X，求 X 的分布列及数学期望．

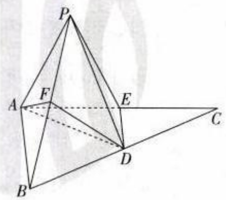


19．（12 分）

将$\triangle ABC$沿它的中位线 DE 折起，使顶点 C 到达点 P 的位置，使得 $PA=PE$，得到如图所示的四棱锥 $P-ABDE$，且 $AC=\sqrt{2}AB=2$，$AC\perp AB$，F 为 PB 的中点．

（1）证明：平面 $PAE\perp$平面 $ABDE$．

（2）求直线 PA 与平面 ADF 所成角的正弦值．



20．（12 分）

设函数 $f(x)=a^x+(1-a)x-1(a>0$ 且 $a\neq1)$．

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求 $f(x)$的单调区间；

（2）设 $a>1$，证明：当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$．

21．（12 分）

已知抛物线 C_1 的方程为 $y^2=8x$．

（1）若 M 是 C_1 上的一点，点 N 在 C_1 的准线 l 上，C_1 的焦点为 F，且 $FM\perp FN$，$|MF|=10$，求$|NF|$；

（2）设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq m\pm r,y_0\neq\pm m)$为圆 $C_2:(x-m)^2+y^2=r^2$ 外一点，过 P 作C_2 的两条切线，分别与 C_1 相交于点 A,B 和 C,D，证明：当 P 在定直线 $x=t$ 上运动时，A,B,C,D 四点的纵坐标乘积为定值的充要条件为 $m^2=t^2+r^2(r\neq0)$．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\y=-2+3\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），直线 C_2 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，以 O 为极点，以 x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系．

（1）求曲线 C_1 和直线 C_2 的极坐标方程；

（2）若直线 C_2 与曲线 C_1 交于 M,N 两点，求$|OM|\cdot|ON|$的值．

23．[选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+2|-|x-1|$．

（1）求不等式 $f(x)>|x-1|-3$ 的解集；

（2）若存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)\geqslant|1-m|$成立，求 m 的取值范围．