高三数学考试参考答案(理科)

1. C　因为$\complement_U B=\{-1,0,2\}$,$A=\{-1,1,2\}$,所以$A\cap(\complement_U B)=\{-1,2\}$.

2. A　$z=\frac{7-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}=\frac{(7-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{10}=\frac{10+20\mathrm{i}}{10}=1+2\mathrm{i}$.

3. D　因为$f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{10})$,所以$f(\frac{3\pi}{10})=\sin(2\times\frac{3\pi}{10}+\frac{3\pi}{10})\neq\pm1$,$f(\frac{\pi}{4})=\sin(2\times\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{10})\neq0$,A错误,B错误.显然$f(x)$的最小正周期为$\pi$,C错误.将$f(x)$图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍,纵坐标不变,可得函数$y=\sin(x+\frac{3\pi}{10})$的图象,D正确.

4. C　因为DE是$\triangle ABC$的中位线,所以$DE/\!/AB$,$DE=\frac{1}{2}AB=1$,$\angle ADE=\angle BAD=\frac{\pi}{6}$.又$AD=\sqrt{3}$,所以$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$.

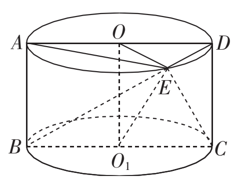
5. A　因为$y'=-\frac{3}{(x-3)^2}$,所以所求切线的斜率$k=-\frac{3}{(2-3)^2}=-3$,故该切线的方程为$y=-3x+4$.

6. B　因为$e_2=\frac{5}{6}e_1$,所以$\sqrt{1-\frac{b^2}{9}}=\frac{5}{6}\times\sqrt{1-\frac{1}{5}}$,解得$b=2$.

7. D　令$u=x(2x-a)$,因为$y=3^u$是增函数,所以$u=x(2x-a)$在区间$(-\infty,1)$上单调递减,所以$\frac{a}{4}\geqslant1$,解得$a\geqslant4$.

8. A　因为$b\cos C-c\cos B=a$,所以$\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin A$,整理得$\sin B\cos C-\cos B\cdot\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,所以$\cos B\sin C=0$.因为$\sin C>0$,所以$\cos B=0$.又$B\in(0,\pi)$,所以$B=\frac{\pi}{2}$,从而$A+C=\frac{\pi}{2}$.又$A=2C$,所以$C=\frac{\pi}{6}$.

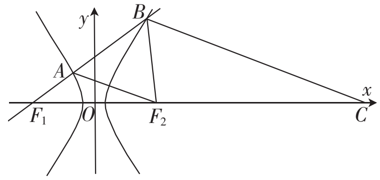
9. B　四棱锥体积$V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot d$,其中$d$为$E$到$AD$的距离,因为正方形$ABCD$的面积为定值,所以当$E$为$\overparen{AD}$的中点时,四棱锥的体积最大,连接$OE$,$O_1E$,此时其侧面积$S=\frac{1}{2}AD\cdot OE+\frac{1}{2}AB\cdot AE+\frac{1}{2}CD\cdot DE+\frac{1}{2}BC\cdot O_1E=1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.



10. C　甲家庭的站法有$\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^2=12$种,乙家庭的站法有$\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_4^2=72$种,最后将两个家庭的整体全排列,有$\mathrm{A}_2^2=2$种站法,则所有不同站法的种数为$12\times72\times2=1728$.

11. C　因为$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200[(80-m)(50-m)-(20+m)(50+m)]^2}{100\times100\times130\times70}=\frac{8(15-m)^2}{91}\geqslant3.841$,所以$(15-m)^2\geqslant43.7$,又$5\leqslant m\leqslant15$,所以$15-m\geqslant7$,解得$m\leqslant8$,故在被调查的100名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为58.

12. D　因为$\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{F_2A}$,所以$\triangle F_1AF_2\backsim\triangle F_1BC$.设$|F_1F_2|=2c$,则$|F_2C|=6c$,设$|AF_1|=t$,则$|BF_1|=4t$,$|AB|=3t$.因为$BF_2$平分$\angle F_1BC$,由角平分线定理可知,$\frac{|BF_1|}{|BC|}=\frac{|F_1F_2|}{|F_2C|}=\frac{2c}{6c}=\frac{1}{3}$,所以$|BC|=3|BF_1|=12t$,所以$|AF_2|=\frac{1}{4}|BC|=3t$.由双曲线定义知$|AF_2|-|AF_1|=2a$,即$3t-t=2a$,解得$t=a$.又由$|BF_1|-|BF_2|=2a$,得$|BF_2|=4t-2a=2t=2a$,所以$|AB|=|AF_2|=3a$,即$\triangle ABF_2$是等腰三角形.由余弦定理知$\cos\angle F_1BF_2=\frac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1||BF_2|}=\frac{|BA|^2+|BF_2|^2-|AF_2|^2}{2|AB||BF_2|}$,即$\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}=\frac{1}{3}$,化简得$11a^2=3c^2$,所以$8a^2=3b^2$,则双曲线$\Gamma$的渐近线方程为$y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}x$.



13. -4　画出可行域(图略)知,当直线$z=2x-y$过点$(-3,-2)$时,z取得最小值-4.

14. 6;17　执行程序框图,

$n=1,S=0,S=-S+2^1=2,n=2$,满足$2\leqslant P$;

$S=(-1)^2S+2^2=6,n=3$,满足$6\leqslant P$;

$S=(-1)^3S+2^3=2,n=4$,满足$2\leqslant P$;

$S=(-1)^4S+2^4=18,n=5$,满足$18>P$.

所以$6\leqslant P\leqslant 17,P\in\mathbf{N}^*$,所以正整数$P$的最小值和最大值分别为6和17.

15. $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　设这个黄金三角形的另一个底角为B,顶角为A,因为$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以$\cos C=\frac{BC}{2AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,则$\cos 2C=2\cos^2C-1=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

16. 8　设$\triangle ABC$的外接圆半径为r,边长为a,正三棱柱的高为$2h$,则$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,$(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2=2^2-h^2$,即$a^2=12-3h^2$,所以正三棱柱的体积$V=S_{\triangle ABC}\times 2h=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3(4-h^2)h=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-h^3+4h)$.又$V'=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-3h^2+4)$,当$h\in(0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$时,$V'>0$,此时函数单调递增,当$h\in(\frac{2\sqrt{3}}{3},2)$时,$V'<0$,此时函数单调递减,所以当$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时,函数$V=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-h^3+4h)$取得最大值$\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times(4-\frac{4}{3})=8$.

17. (1)证明:由$na_{n+1}=3(n+1)a_n$,得$a_{n+1}=\frac{3(n+1)a_n}{n}$, …………………………………… 1分

所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{3a_n}{n}$, ………………………………………………………………………… 3分

故$\{\frac{a_n}{n}\}$是公比为 3 的等比数列. ······ 4 分

(2)解:由(1)得$\frac{a_n}{n}=\frac{3}{1}\times 3^{n-1}=3^n$,则 $a_n=n\times 3^n$,$b_n=\frac{n}{3^n}$. ······ 6 分

所以 $T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}$,

所以$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}$. ······ 7 分

两式相减,得$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$, ······ 9 分

所以$\frac{2}{3}T_n=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$, ······ 11 分

解得 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times 3^n}$. ······ 12 分

18. 解:(1)由题意知 $100\times(0.0010\times 2+0.0035+a+0.0020)=1$,

解得 $a=0.0025$, ······ 1 分

分数段[450,550)对应的频率为 0.1,[550,650)对应的频率为 0.35,[650,750)对应的频率为 0.25,设中位数为 x,则 $x\in[650,750)$. ······ 3 分

由 $0.1+0.35+(x-650)\times 0.0025=0.5$,解得 $x=670$. ······ 5 分

(2)由题意知从分数段[650,750)对应的学生中抽取 5 人,从[850,950]对应的学生中抽取 2 人,随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2. ······ 7 分

则 $P(X=0)=\frac{C_2^0C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$, ······ 8 分

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$, ······ 9 分

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{1}{7}$, ······ 10 分

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

······ 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$. ······ 12 分

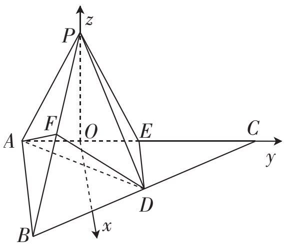
19. (1)证明:因为 DE 为$\triangle ABC$ 的中位线,

所以 $DE/\!/AB$. ······ 1 分

因为 $AC\perp AB$,所以 $DE\perp AE$,$DE\perp PE$, ······ 3 分

又 $AE\cap PE=E$,所以 $DE\perp$平面 PAE, ······ 4 分

因为 $DE\subset$ 平面 $ABDE$,所以平面 $PAE\perp$ 平面 $ABDE$. …… 5分



(2)解:取 AE 的中点 O,连接 PO,因为 $PA=PE=AE$,所以 $PO\perp AE$.

因为平面 $PAE\perp$ 平面 $ABDE$,所以 $PO\perp$ 平面 $ABDE$,且 $PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
…………………………………………………………… 6分

分别以$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OP}$的方向为 y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$,$B(\sqrt{2},-\frac{1}{2},0)$,$D(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},0)$,$A(0,-\frac{1}{2},0)$,$F(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$,

所以$\overrightarrow{AP}=(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,$\overrightarrow{AD}=(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$,$\overrightarrow{AF}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$. ………………………… 8分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 ADF 的法向量,可得$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x+y=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{2}$,得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},$
$-1,-\sqrt{3})$, …………………………………………………………………………… 10分

则 $\cos\langle\overrightarrow{AP},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AP}|}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\sqrt{6}\times 1}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 PA 与平面 ADF 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………… 12分

20.(1)解:当 $a=\mathrm{e}$ 时,因为 $f(x)=\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{e})x-1$,所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}$, …………… 1分

令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln(\mathrm{e}-1)$, ……………………………………………………… 2分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(\mathrm{e}-1))$ 上单调递减,在 $(\ln(\mathrm{e}-1),+\infty)$ 上单调递增. ………… 4分

(2)证明:(法一)易知当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$\ln x<x-1$,$\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1$,所以 $1<\frac{x-1}{\ln x}<x$. …
……………………………………………………………………………… 6分

由题设知 $a>1$,$f'(x)=a^x\ln a+1-a$. ……………………………………………… 7分

令 $f'(x)=0$,得 $x_0=\frac{\ln\frac{a-1}{\ln a}}{\ln a}$, ……………………………………………………… 8分

由上可知 $1<\frac{a-1}{\ln a}<a$,$0<\ln\frac{a-1}{\ln a}<\ln a$,故 $0<x_0<1$. ………………………… 10分

当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增. …… 11分

又 $f(0)=f(1)=0$,所以当 $0<x<1$ 时,$f(x)<0$. ………………………………… 12分

(法二)因为 $f'(x)=a^x\ln a+1-a$,且 $a>1$,所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增. ………… 5分

又 $f'(0)=\ln a+1-a$,设 $g(a)=\ln a+1-a$,则 $g'(a)=\frac{1}{a}-1<0$,可知 $g(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(a)<g(1)=0$,即 $f'(0)<0$. ……………………………………… 7分

又 $f'(1)=a\ln a+1-a$，设 $h(a)=a\ln a+1-a$，则 $h'(a)=\ln a>0$，可知 $h(a)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $h(a)>h(1)=0$，即 $f'(1)>0$. ………………………………………… 9 分

所以存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，且 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,1)$上单调递增. ………………………………………………………………………… 11 分

因为 $f(0)=f(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$. ………………………… 12 分

21.(1)解：由题意可得，抛物线 $C_1:y^2=8x$ 的焦点为$F(2,0)$，准线 $l:x=-2$. ………… 1 分

不妨设点 $M(a,b)(a>0,b>0)$，则$|MF|=a+2=10$，即 $a=8$，可得 $b^2=64$，即 $b=8$，

所以 $M(8,8)$，则直线 MF 的斜率 $k_{MF}=\frac{8-0}{8-2}=\frac{4}{3}$. ………………………………… 3 分

因为 $FM\perp FN$，所以直线 NF 的斜率 $k_{NF}=-\frac{3}{4}$，所以直线 NF 的方程为 $y=-\frac{3}{4}(x-2)$，

令 $x=-2$，解得 $y=3$，即 $N(-2,3)$，故$|NF|=\sqrt{(-2-2)^2+(3-0)^2}=5$. ………… 5 分

(2)证明：设 $P(t,y_0)$，由 $t\neq m\pm r$，$y_0\neq\pm m$，知过 P 所作圆C_2 的切线的斜率 k 存在且非零，每条切线都与 C_1 有两个交点，设切线方程为 $y-y_0=k(x-t)$，即 $kx-y+(y_0-kt)=0$，故 $\frac{|km+y_0-kt|}{\sqrt{1+k^2}}=r$，整理得$[(m-t)^2-r^2]k^2+2y_0(m-t)k+(y_0^2-r^2)=0$，① ………… 7 分

则过 P 所作的两条切线 PA，PC 的斜率 k_1，k_2 分别是方程①的两个实根，

故有 $k_1+k_2=\frac{2y_0(t-m)}{(m-t)^2-r^2}$，$k_1k_2=\frac{y_0^2-r^2}{(m-t)^2-r^2}$. ② …………………………………… 8 分

联立$\begin{cases}y-y_0=k(x-t),\\y^2=8x,\end{cases}$消去 x 得 $ky^2-8y+8(y_0-kt)=0$，③

设点 A,B,C,D 的纵坐标分别为 y_1,y_2,y_3,y_4，由③得 $y_1y_2=8(\frac{y_0}{k_1}-t)$，

同理可得 $y_3y_4=8(\frac{y_0}{k_2}-t)$. ……………………………………………………………… 9 分

于是得 $y_1y_2y_3y_4=64(\frac{y_0}{k_1}-t)(\frac{y_0}{k_2}-t)=64[\frac{y_0^2-ty_0(k_1+k_2)}{k_1k_2}+t^2]$.

设 $y_0^2-ty_0(k_1+k_2)=\lambda k_1k_2$(其中 λ 为常数)，

把②式代入整理得 $y_0^2(m^2-t^2-r^2-\lambda)+\lambda r^2=0$， ……………………………… 10 分

欲使上式与 y_0 的取值无关，则当且仅当常数 $\lambda=0$ 且 $m^2=t^2+r^2(r\neq0)$时，A,B,C,D 四点的纵坐标乘积为定值 $64t^2$. ……………………………………………………………… 12 分

22.解：(1)曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\y=-2+3\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)，其普通方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=9$，即 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$， ………………………………………………………… 2 分

则 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$. ………………………………… 3 分

直线 C_2 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，

所以直线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………………………… 5 分

(2)设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta)$，

将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$，…………………………… 7 分

得 $\rho^2+(2\sqrt{3}-1)\rho-4=0$，…………………………………………………………… 8 分

所以 $\rho_1\rho_2=-4$，……………………………………………………………………………… 9 分

所以 $|OM|\cdot|ON|=|\rho_1\rho_2|=4$. ………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)化简得 $|x+2|-2|x-1|>-3$. ……………………………………………………… 1 分

当 $x\geqslant1$ 时，解得 $x<7$，所以 $1\leqslant x<7$；…………………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant-2$ 时，解得 $x>1$，此时无解；………………………………………………………… 3 分

当 $-2<x<1$ 时，解得 $x>-1$，所以 $-1<x<1$. ……………………………………………… 4 分

综上所述，原不等式的解集为 $(-1,7)$. ……………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=\begin{cases}-3, x\leqslant-2,\\ 2x+1, -2<x<1,\\ 3, x\geqslant1,\end{cases}$ ……………………………………………………… 7 分

所以 $f(x)_{\max}=3$. …………………………………………………………………………… 8 分

由题意知 $|1-m|\leqslant3$，解得 $-2\leqslant m\leqslant4$，

所以 m 的取值范围是 $[-2,4]$. ………………………………………………………………… 10 分