# 西北狼教育联盟 2023 年秋期开学学业调研

# 高三数学试题卷

**一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合 $A=\{x|x-2,,\ 0\}$，集合 $B=\{0,1,2,3\}$，集合 $C=\{x|-1<x<1\}$，则 $(AI\ \ B)UC=$（　　）

A. $(-1,1]$　　　　B. $(-1,1]\cup\{2\}$　　　　C. $(-1,2]$　　　　D. $\{0\}$

【答案】B

【详解】$A=\{x|\ x,,\ 2\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$，所以 $(A\cap B)\cup C=(-1,1]\cup\{2\}$ .

故选：B．

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对任意两个不相等的实数 $a,b$ 都有 $(a-b)[f(b)-f(a)]>0$，则不等式 $f(3x-1)<f(x+5)$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty,3)$　　　　B. $(3,+\infty)$　　　　C. $(-\infty,2)$　　　　D. $(2,+\infty)$

【答案】B

【详解】任意两个不相等的实数 $a\neq b$

因为 $(a-b)[f(b)-f(a)]>0$，

所以 $a-b$ 与 $f(a)-f(b)$ 异号，

故 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，

原不等式 $f(3x-1)<f(x+5)$ 等价于 $3x-1>x+5$，

解得 $x>3$，

故选：B.

3. 已知随机变量 $X\sim B(2,p)$，随机变量 $Y\sim N(2,\sigma^2)$，若 $P(X\leq 1)=0.36$， $P(Y<4)=p$，则 $P(0<Y<2)=$（　　）

A. 0.1　　　　B. 0.2　　　　C. 0.3　　　　D. 0.4

【答案】C

【详解】因为 $X\sim B(2,p)$， $Y\sim N(2,\sigma^2)$， $P(X\leq 1)=0.36$，

所以 $P(X\leq 1)=(1-p)^2+2p(1-p)=0.36$，

解得 $p=0.8$ 或 $p=-0.8$（舍），

由 $P\left(Y<4\right)=p=0.8$，则 $P(Y\geq 4)=1-0.8=0.2$，

所以 $P\left(0<Y<2\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-0.2\times 2\right)=0.3$.

故选：C.

4. 如图，“天宫空间站”是我国自主建设的大型空间站，其基本结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱三个部分. 假设有 6 名航天员(4 男 2 女) 在天宫空间站开展实验，其中天和核心舱安排 4 人，问天实验舱与梦天实验舱各安排 1 人， 且两名女航天员不在一个舱内，则不同的安排方案种数为（　　）


A. 14　　　　B. 18　　　　C. 30　　　　D. 36

【答案】B

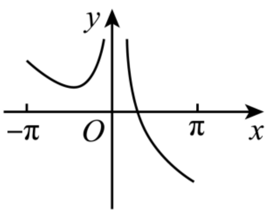
【详解】将 6 名航天员安排在 3 个实验舱的方案数为 $C_6^4C_2^1C_1^1=30$

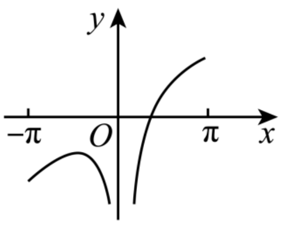
其中两名女航天员在一个舱内的方案数为 $C_4^2C_2^1C_1^2=12$

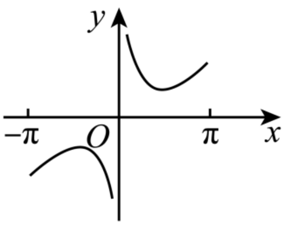
所以满足条件的方案数为 $30-12=18$ 种.

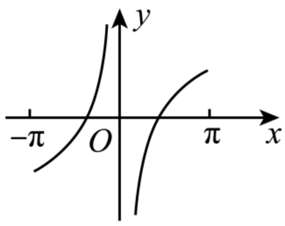
故选:B.

5. 函数 $f\left(x\right)=x^3-\dfrac{\sin x}{x^5}$ 在 $x\in\left[-\pi,0\right)\cup\left(0,\pi\right]$ 上的图象大致为（　　）

A. 


B. 


C. 


D. 


【答案】B

【详解】 $f\left(\pi\right)=\pi^3-\dfrac{\sin\pi}{\pi^5}=\pi^3>0$,此时可排除 A,

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\pi}{6}\right)^3-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}=\left(\frac{\pi}{6}\right)^3-\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^8-\frac{1}{2}\right]<\frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}\left[\left(\frac{4}{6}\right)^8-\frac{1}{2}\right]<0$,此时可排除 C,

$f\left(-\frac{1}{100}\right)=-10^{-6}-10^{10}\sin\left(\frac{1}{100}\right)$,由于$\sin\left(\frac{1}{100}\right)>0$，所以 $f\left(-\frac{1}{100}\right)=-10^{-6}-10^{10}\sin\left(\frac{1}{100}\right)<0$，故排除 D，

故选：B

6. 定义在$(0,+\infty)$上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且$(x^3-x^2+x)f'(x)<(3x^2-2x+1)f(x)$恒成立，则必有（　　）

A. $f(1)<\frac{f(2)}{2}<\frac{f(3)}{7}$　　B. $3f(1)<\frac{f(2)}{2}<\frac{f(3)}{7}$

C. $f(1)>\frac{f(2)}{2}>\frac{f(3)}{7}$　　D. $3f(1)>\frac{f(2)}{2}>\frac{f(3)}{7}$

【答案】D

【详解】由$(x^3-x^2+x)f'(x)<(3x^2-2x+1)f(x)$，得$(x^3-x^2+x)f'(x)<(x^3-x^2+x)'f(x)$.

设函数$g(x)=\frac{f(x)}{x^3-x^2+x},x>0$，则$g'(x)=\frac{(x^3-x^2+x)f'(x)-(x^3-x^2+x)'f(x)}{(x^3-x^2+x)^2}<0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，从而$g(1)>g(2)>g(3)$，

即$\frac{f(1)}{1}>\frac{f(2)}{6}>\frac{f(3)}{21}$，即$3f(1)>\frac{f(2)}{2}>\frac{f(3)}{7}$.

故选：D

7. 若$x>0$，$y>0$，$x+3y=1$，则$\frac{xy}{3x+y}$的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{1}{20}$

【答案】C

【详解】因为$x>0$，$y>0$，$x+3y=1$，

则$\frac{3x+y}{xy}=\frac{3}{y}+\frac{1}{x}=\left(\frac{3}{y}+\frac{1}{x}\right)(x+3y)=\frac{3x}{y}+\frac{3y}{x}+10\geq 2\sqrt{\frac{3x}{y}\times\frac{3y}{x}}+10=16$，

当且仅当$\dfrac{3x}{y}=\dfrac{3y}{x}$时，即$x=y=\dfrac{1}{4}$时，等号成立；

所以$0<\dfrac{xy}{3x+y}\le\dfrac{1}{16}$，即$\dfrac{xy}{3x+y}$的最大值为$\dfrac{1}{16}$，

故选：C.

8. 已知函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，若函数$f\left(2x+1\right)$为奇函数，且$f\left(4-x\right)=f\left(x\right)$，$\sum_{k=1}^{2023}f(k)=1$，则$f\left(0\right)=$（　　）

A. $-1$　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】A

【详解】因为函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，且函数$f\left(2x+1\right)$为奇函数，

则$f\left(2x+1\right)=-f\left(1-2x\right)$，即函数$f\left(x\right)$关于点$\left(1,0\right)$对称，

所以有$f\left(x\right)=-f\left(2-x\right)$①，

又$f\left(4-x\right)=f\left(x\right)$②，所以函数$f\left(x\right)$关于直线$x=2$对称，

则由②得：$f\left(3\right)=f\left(4-1\right)=f\left(1\right)=0$，$f\left(0\right)=f\left(4-0\right)=f\left(4\right)$，

所以$f\left(0\right)+f\left(2\right)=f\left(2\right)+f\left(4\right)=0$，则$f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)=0$

又由①和②得：$f\left(4-x\right)=-f\left(2-x\right)$，得$f\left(x\right)=-f\left(x-2\right)$，

所以$f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)=f\left(x-2\right)$，即$f\left(x\right)=f\left(x+4\right)$，

所以函数$f\left(x\right)$的周期为4，

则$\sum_{k=1}^{2023}f(k)=505\left[f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)\right]+f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)=f\left(2\right)=1$，

所以$f\left(0\right)=-f\left(2\right)=-1$，

故选：A.

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9. 下列命题中，真命题是（　　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得$e^{x_0}\le 0$

B. $\sin^2 x+\dfrac{2}{\sin x}\ge 3\left(x\ne k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$

C. 幂函数$f\left(x\right)=\left(m^2-2m-2\right)x^{2m-1}$在$\left(0,+\infty\right)$上为减函数，则$m$的值为$-1$

D. $a>1$，$b>1$是$ab>1$的充分不必要条件

【答案】CD

【详解】对于 A，由指数函数值域可知，对于$\forall x\in\mathrm{R},\mathrm{e}^x>0$恒成立，所以 A 是假命题；

对于 B，取特殊值$x=-\frac{\pi}{6}$，则$\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{2}{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{4}-4=-\frac{15}{4}$，所以 B 是假命题；

对于 C，由幂函数性质可得$m^2-2m-2=1$，解得$m=3$或$m=-1$；

又$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上为减函数，所以$2m-1<0$，即可得$m=-1$，即 C 为真命题；

对于 D，显然$a>1$，$b>1$能推出$ab>1$；而$ab>1$时，可使$a=-2,b=-3$，此时推不出$a>1$，$b>1$，

所以$a>1$，$b>1$是$ab>1$的充分不必要条件，即 D 是真命题；

故选：CD

10. 甲、乙两盒中各放有除颜色外其余均相同的若干个球，其中甲盒中有 4 个红球和 2 个白球，乙盒中有 2 个红球和 3 个白球，现从甲盒中随机取出 1 球放入乙盒，再从乙盒中随机取出 1 球.记“从甲盒中取出的球是红球”为事件$A$，“从甲盒中取出的球是白球”为事件$B$，“从乙盒中取出的球是红球”为事件$C$，则（　　）

A. $A$与$B$互斥　　B. $A$与$C$独立　　C. $P\left(C|A\right)=\frac{1}{2}$　　D. $P\left(C\right)=\frac{4}{9}$

【答案】ACD

【详解】对选项 A：$A$与$B$是互斥事件，正确；

对选项 B：$P\left(A\right)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P\left(AC\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，$P\left(C\right)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{9}$，

$P\left(A\right)\cdot P\left(C\right)\neq P\left(AC\right)$，错误；

对选项 C：$P\left(C|A\right)=\frac{P\left(AC\right)}{P\left(A\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$，正确；

对选项 D：$P\left(C\right)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{9}$，正确.

故选：ACD

11. 已知$\left(1-2x\right)^{2024}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2023}x^{2023}+a_{2024}x^{2024}$，则（　　）

A. 展开式中二项式系数最大项为第 1012 项

B. 展开式中所有项的系数和为 1

C. $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2023}}{2^{2023}}+\frac{a_{2024}}{2^{2024}}=-1$

D. $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2023a_{2023}+2024a_{2024}=4048$

【答案】BCD

【详解】对于 A，由二项展开式中的二项式系数性质可知二项式系数最大为$C_{2024}^{1012}$，易知应为第 1013 项，即 A 错误；

对于 B，令$x=1$，可得$(1-2)^{2024}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2023}+a_{2024}=1$，即展开式中所有项的系数和为 1，可得 B 正确；

对于 C，令$x=0$，可得$a_0=1$，令$x=\frac{1}{2}$，可得$\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)^{2024}=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2023}}{2^{2023}}+\frac{a_{2024}}{2^{2024}}=0$，

所以$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2023}}{2^{2023}}+\frac{a_{2024}}{2^{2024}}=-1$，即 C 正确；

对于 D，将等式$(1-2x)^{2024}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2023}x^{2023}+a_{2024}x^{2024}$两边同时求导可得，

$2024\times(-2)(1-2x)^{2023}=a_1+2a_2x^1+\cdots+2023a_{2023}x^{2022}+2024a_{2024}x^{2023}$，

再令$x=1$，可得$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2023a_{2023}+2024a_{2024}=4048$，即 D 正确.

故选：BCD

12. 德国著名数学家狄利克雷（*Dirichlet*，1805~1859）在数学领域成就显著.19 世纪，狄利克雷定义了一个“奇怪的函数”$y=f(x)=\begin{cases}1,x\in Q\\0,x\in \complement_R Q\end{cases}$其中$R$为实数集，$Q$为有理数集．则关于函数$f(x)$有如下四个命题，正确的为（　　）

A. 对任意$x\in R$，都有$f(-x)+f(x)=0$

B. 对任意$x_1\in \mathrm{R}$，都存在$x_2\in \mathbf{Q}$，$f(x_1+x_2)=f(x_1)$

C. 若$a<0$，$b>1$，则有$\{x|f(x)>a\}=\{x|f(x)<b\}$

D. 存在三个点$A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，$C(x_3,f(x_3))$，使$\triangle ABC$为等腰直角三角形

【答案】BC

【详解】解：对于 A 选项，当$x\in\mathbf{Q}$，则$-x\in\mathbf{Q}$，此时$f(x)+f(-x)=1+1=2\neq 0$，故 A 选项错误；

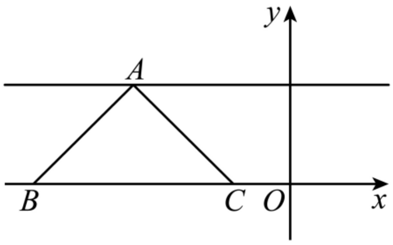
对于 B 选项，当任意$x_1\in\mathbf{Q}$时，存在$x_2\in\mathbf{Q}$，则$x_1+x_2\in\mathbf{Q}$，故$f(x_1+x_2)=f(x_1)=1$；当任意$x_1\in\complement_R Q$时，存在$x_2\in\mathbf{Q}$，则$x_1+x_2\in\complement_{\mathrm{R}}\mathbf{Q}$，故$f(x_1+x_2)=f(x_1)=0$，故对任意$x_1\in\mathrm{R}$，都存在$x_2\in\mathbf{Q}$，$f(x_1+x_2)=f(x_1)$成立，故 B 选项正确；

对于 C 选项，根据题意得函数$f(x)$的值域为$\{0,1\}$，当$a<0$，$b>1$时，$\{x|f(x)>a\}=R,\{x|f(x)<b\}=R$，故 C 选项正确；

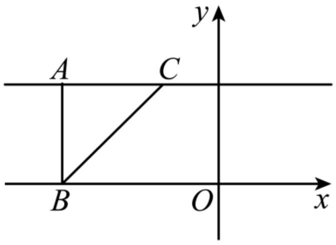
对于 D 选项，要为等腰直角三角形，只可能为如下四种情况：

①直角顶点 A 在$y=1$上，斜边在$x$轴上，此时点$B$，点$C$的横坐标为无理数，则$BC$中点的横坐标仍然为无理

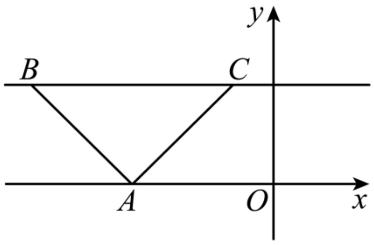
数，那么点A的横坐标也为无理数，这与点A的纵坐标为1矛盾，故不成立；



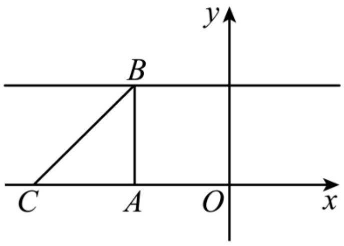

②直角顶点A在$y=1$上，斜边不在$x$轴上，此时点$B$的横坐标为无理数，则点A的横坐标也应为无理数，这与点A的纵坐标为1矛盾，故不成立；




③直角顶点A在$x$轴上，斜边在$y=1$上，此时点$B$，点$C$的横坐标为有理数，则$BC$中点的横坐标仍然为有理数，那么点A的横坐标也应为有理数，这与点A的纵坐标为0矛盾，故不成立；




④直角顶点A在$x$轴上，斜边不在$y=1$上，此时点A的横坐标为无理数，则点$B$的横坐标也应为无理数，这与点$B$的纵坐标为1矛盾，故不成立.




综上，不存在三个点$A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$，$B\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$，$C\left(x_3,\ f\left(x_3\right)\right)$，使得$\triangle ABC$为等腰直角三角形，故选项D错误.

故选：BC.

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases} f\left(x+3\right), x\le 0 \\ x^2-3x-4, x>0 \end{cases}$，则$f\left(-4\right)=$__________.

【答案】$-6$

【详解】由函数解析式可得$f\left(-4\right)=f\left(-4+3\right)=f\left(-1\right)=f\left(-1+3\right)=f\left(2\right)$，

易知 $f(2)=2^2-3\times2-4=-6$，

所以 $f(-4)=-6$.

故答案为：$-6$

14. 计算：$0.125^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{64}{27}\right)^0-\log_2 25\times\log_3 4\times\log_5 9=$__________.

【答案】$-7$

【详解】易知原式$=\left(0.5^3\right)^{-\frac{1}{3}}-1-\frac{\lg 25}{\lg 2}\times\frac{\lg 4}{\lg 3}\times\frac{\lg 9}{\lg 5}=0.5^{-1}-1-\frac{2\lg 5}{\lg 2}\times\frac{2\lg 2}{\lg 3}\times\frac{2\lg 3}{\lg 5}$

$=2-1-8=-7$

故答案为：$-7$

15. 若函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+ax\right)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，则 $a$ 的取值范围__________.

【答案】$[-1,+\infty)$

【详解】利用复合函数单调性可知，函数 $y=x^2+ax$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

所以可得对称轴 $x=-\frac{a}{2}$ 在区间 $(1,2)$ 的左侧，即 $-\frac{a}{2}\le1$，得 $a\ge-2$；

由对数函数定义域可得 $1^2+a\ge0$，即 $a\ge-1$

所以 $a\ge-1$，即 $a$ 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

故答案为：$[-1,+\infty)$

16. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2\,(a\in\mathrm{R})$ 有两个极值点 $x_1$，$x_2$，且 $x_1>2x_2$，则 $a$ 的取值范围为___________.

【答案】$\left(\frac{1}{\ln 2},+\infty\right)$

【详解】$\because$ $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2\,(a\in\mathrm{R})$，$\therefore$ $f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，

$\because$ 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2\,(a\in\mathrm{R})$ 有两个极值点 $x_1$，$x_2$，

$\therefore$ $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，又 $\because$ $f'(0)=\mathrm{e}^0-0=1\ne0$，$\therefore$ $x_1$，$x_2\ne0$，

$\therefore$ $x_1$，$x_2$ 是 $\mathrm{e}^x-2ax=0$，即 $2a=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的两个不相等的实数根.

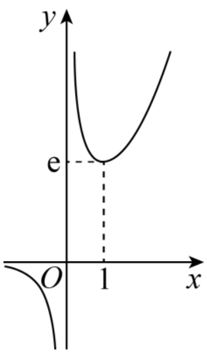
令 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$.

①当 $x<0$ 时，$g'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}<0$，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}<0$，

②当 $0<x<1$ 时，$g'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}<0$，$g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，且 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}>0$，

③当 $x>1$ 时，$g'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}>0$，$g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增，且 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $g(1)=\mathrm{e}$，$g(x)$ 的图象大致如下，




$\therefore$ 若 $2a=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ 有两个不相等的实数根 $x_1$，$x_2$，则 $2a>e$，即 $a>\frac{e}{2}$，且 $x_1$，$x_2>0$，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $x_1=tx_2$，且 $\because x_1>2x_2$，$\therefore t=\frac{x_1}{x_2}>2$，

又 $\because 2a=\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1}=\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}$，$\therefore \frac{\mathrm{e}^{tx_2}}{tx_2}=\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}$，$\therefore \mathrm{e}^{tx_2}=t\mathrm{e}^{x_2}$，

两边同时取对数，得 $tx_2=\ln\left(t\mathrm{e}^{x_2}\right)=\ln t+x_2$，$\therefore x_2=\frac{\ln t}{t-1}$，

下面求 $x_2=\frac{\ln t}{t-1}$ 的取值范围，设 $h(t)=\frac{\ln t}{t-1}$，则 $h'(t)=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}$，

令 $H(t)=1-\frac{1}{t}-\ln t$，则 $H'(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\frac{1-t}{t^2}$，

当 $t>2$ 时，$H'(t)=\frac{1-t}{t^2}<0$，$\therefore H(t)=1-\frac{1}{t}-\ln t$ 在 $t\in(2,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $t>2$ 时，$H(t)<H(2)=1-\frac{1}{2}-\ln 2=\frac{1}{2}-\ln 2<0$，

$\therefore$ 当 $t>2$ 时，$h'(t)=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}<0$，$h(t)=\frac{\ln t}{t-1}$ 在 $t\in(2,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore x_2=\frac{\ln t}{t-1}=h(t)<h(2)=\ln 2$，即 $x_2<\ln 2$．

又$\because g\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}$在区间$\left(0,1\right)$上单调递减，$2a=\dfrac{e^{x_2}}{x_2}=g\left(x_2\right)$，$0<x_2<\ln 2<1$，

$\therefore 2a=\dfrac{e^{x_2}}{x_2}=g\left(x_2\right)>g\left(\ln 2\right)=\dfrac{e^{\ln 2}}{\ln 2}=\dfrac{2}{\ln 2}$，即$a>\dfrac{1}{\ln 2}$.

$\therefore$实数$a$的取值范围为$\left(\dfrac{1}{\ln 2},+\infty\right)$.

## 四、解答题（本题共 6 个小题，共 70 分）

17. 2022 年 6 月 5 日神舟十四号搭载陈冬、刘洋、蔡旭哲 3 名航天员在酒泉卫星发射中心发射成功，表明中国航天技术进一步走向成熟，中国空间站即将完成“$T$”字基本结构的搭建，为了解民众对我国航天事业的关注度，随机抽取 1000 人，其中大学及以上学历 480 人，高中及以下学历 520 人，得到如下 2×2 列联表：

| | 不了解 | 了解 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 大学及以上 | 38 | 442 | 480 |
| 高中及以下 | 6 | 514 | 520 |
| 总计 | 44 | 956 | 1000 |

（1）若高中及以下学历不了解的 6 人中，高中学历 2 人，高中以下学历 4 人，从中任意抽取 2 人，求 2 人都不是高中以下学历的概率；

（2）若认为不了解与否与学历有关，则出错的概率是多少?

附表：

| $P\left(K^2>k\right)$ | 0.50 | 0.40 | 0.25 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | 0.455 | 0.708 | 1.323 | 2.072 | 2.706 | 3.84 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.83 |

参考公式：$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，$n=a+b+c+d$.

【答案】（1）$\dfrac{1}{15}$

（2）低于 0.001

【小问 1 详解】

记“2 人都不是高中以下学历”为事件 A；

则$P\left(A\right)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$，

故 2 人都不是高中以下学历的概率为$\dfrac{1}{15}$

【小问 2 详解】

由表中数据可得$K^2=\dfrac{1000(38\times514-6\times442)^2}{480\times520\times956\times44}\approx27.14$，

显然$27.14>10.83$，

参考附表中的数据可知出错的概率是低于$0.001$.

18. 已知函数$f(x)=xe^{x+1}$.

（1）求$f(x)$的极值；

（2）若关于$x$的方程$f(x)=m$只有一个实数解，求实数$m$的取值范围.

【答案】（1）极小值为$-1$，无极大值

（2）$\{-1\}\cup[0,+\infty)$

【小问 1 详解】

$\because f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f'(x)=(x+1)e^{x+1}$，

$\therefore$当$x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(-1,+\infty)$时，$f'(x)>0$；

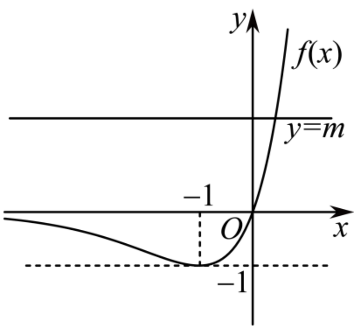
$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore f(x)$的极小值为$f(-1)=-e^0=-1$，无极大值.

【小问 2 详解】

当$x<0$时，$f(x)<0$恒成立，$f(0)=0$，

由（1）可得$f(x)$图象如下图所示，




$f(x)=m$只有一个实数解等价于$f(x)$与$y=m$有且仅有一个交点，

由图象可知：当$m=1$或$m\geq0$时，$f(x)$与$y=m$有且仅有一个交点，

$\therefore$实数$m$的取值范围为$\{-1\}\cup[0,+\infty)$.

19. 已知函数 $y=ax^2-x-a-b$.

（1）若 $ax^2-x-a-b<0$ 的解集为 $(-1,2)$，求 $a$，$b$ 的值.

（2）若 $a>0$，求解不等式 $ax^2-x-a+1<0$.

【答案】（1） $a=b=1$

（2）

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$ax^2-x-a+1<0$ 的解集为 $(1,-1+\frac{1}{a})$；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$ax^2-x-a+1<0$ 的解集为 $\phi$；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$ax^2-x-a+1<0$ 的解集为 $(-1+\frac{1}{a},1)$.

【小问 1 详解】

$\because ax^2-x-a-b<0$ 的解集为 $(-1,2)$，

$\therefore$ 方程 $ax^2-x-a-b=0$ 的两个实根分别为 $-1$，2，且 $a>0$，

则 $\begin{cases}a+1-a-b=0\\4a-2-a-b=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$.

【小问 2 详解】

$ax^2-x-a+1<0$ 中，

当 $a>0$ 时，则 $\Delta=1-4a(-a+1)=(2a-1)^2\geq0$，

$ax^2-x-a+1<0$ 化为 $(ax+a-1)(x-1)<0$，

若 $-\frac{a-1}{a}>1$ 时，即 $0<a<\frac{1}{2}$，解得 $1<x<-1+\frac{1}{a}$，

若 $-\frac{a-1}{a}=1$ 时，即 $a=\frac{1}{2}$，无解，

若 $-\frac{a-1}{a}<1$ 时，即 $a>\frac{1}{2}$，解得 $-1+\frac{1}{a}<x<1$；

综上，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$ax^2-x-a+1<0$ 的解集为 $(1,-1+\frac{1}{a})$；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$ax^2-x-a+1<0$ 的解集为 $\phi$；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$ax^2-x-a+1<0$ 的解集为 $(-1+\frac{1}{a},1)$ .

20. 我国承诺 2030 年前达到“碳达峰”，2060 年实现“碳中和”，“碳达峰”就是我们国家承诺在 2030 年前，二氧化碳的排放不再增长，达到峰值之后再慢慢减下去；而到 2060 年，针对排放的二氧化碳要采取植树、节能减排等各种方式全部抵消掉，这就是“碳中和”，做好垃圾分类和回收工作可以有效地减少处理废物造成的二氧化碳的排放，助力“碳中和”. 某校为加强学生对垃圾分类意义的认识以及养成良好的垃圾分类的习惯，团委组织了垃圾分类知识竞赛活动，竞赛分为初赛、复赛和决赛，只有通过初赛和复赛，才能进入决赛，甲、乙、丙三队参加竞赛，已知甲队通过初赛、复赛的概率均为 $\frac{2}{3}$，乙队通过初赛、复赛的概率均为 $\frac{2}{3}$，丙队通过初赛、复赛的概率分别为 $p$，$\frac{4}{3}-p$，其中 $0<p\le\frac{3}{4}$，三支队伍是否通过初赛和复赛互不影响.

（1）求 $p$ 取何值时，丙队进入决赛的概率最大；

（2）在（1）的条件下，求进入决赛的队伍数 $X$ 的分布列及均值.

【答案】（1）$\frac{2}{3}$；

（2）分布列答案见解析，数学期望：$\frac{4}{3}$.

【小问 1 详解】

由题知：丙队通过初赛和复赛的概率 $p_0=p\left(\frac{4}{3}-p\right)=-p^2+\frac{4}{3}p=-(p-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{9}$，

又因为 $\begin{cases}0<p\le\frac{3}{4}\\0\le\frac{4}{3}-p\le1\end{cases}$，所以 $\frac{1}{3}\le p\le\frac{3}{4}$.

所以，当 $p=\frac{2}{3}$ 时，丙队进入决赛的概率最大为 $\frac{4}{9}$.

【小问 2 详解】

由（1）知：

甲、乙、丙三队进入决赛的概率均为 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，

因为进入决赛的队伍数 $X\sim B\left(3,\frac{4}{9}\right)$，

所以 $P\left(X=0\right)=C_3^0\times\left(1-\frac{4}{9}\right)^3=\frac{125}{729}$；

$P\left(X=1\right)=C_3^1\times\frac{4}{9}\times\left(1-\frac{4}{9}\right)^2=\frac{300}{729}=\frac{100}{243}$；

$$P(X=2)=\mathrm{C}_3^2\times\left(\frac{4}{9}\right)^2\times\left(1-\frac{4}{9}\right)=\frac{240}{729}=\frac{80}{243};$$

$$P(X=3)=\mathrm{C}_3^3\times\left(\frac{4}{9}\right)^3=\frac{64}{729}.$$

所以，随机变量 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{125}{729}$ | $\frac{100}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{64}{729}$ |

所以，$E(X)=3\times\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$.

21. 某公司为了解年研发资金投入量 $x$（单位:亿元）对年销售额 $y$（单位:亿元）的影响.对公司近 12 年的年研发资金投入量 $x_i$ 和年销售额 $y_i$ 的数据，进行了对比分析，建立了两个模型:① $y=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x^2$，② $\hat{y}=\mathrm{e}^{\hat{\lambda}x+\hat{t}}$，其中 $\alpha$，$\beta$，$\lambda$，$t$ 均为常数，e 为自然对数的底数，并得到一些统计量的值.令 $u_i=x_i^2, v_i=\ln y_i, (i=1,2,3,\cdots,12)$，经计算得如下数据:

| $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | $\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})^2$ | $\sum_{i=1}^{12}(y_i-\bar{y})^2$ | $\bar{u}$ | $\bar{v}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 66 | 77 | 2 | 460 | 4.20 |

| $\sum_{i=1}^{12}(u_i-\bar{u})^2$ | $\sum_{i=1}^{12}(u_i-\bar{u})(y_i-\bar{y})$ | $\sum_{i=1}^{12}(v_i-\bar{v})^2$ | $\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})$ |
|---|---|---|---|
| 31250 | 215 | 3.08 | 14 |

（1）请从相关系数的角度，分析哪一个模型拟合程度更好?

（2）(i）根据分析及表中数据，建立 $y$ 关于 $x$ 的回归方程;

(ii）若下一年销售额 $y$ 需达到 90 亿元，预测下一年的研发资金投入量 $x$ 是多少亿元?

附:①相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，回归直 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中公式分别为

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}，\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x};$$

②参考数据：$308=4\times77,\sqrt{90}\approx9.4868,e^{4.4998}\approx90$.

【答案】（1）模型②的拟合程度更好

（2）（i）$\hat{y}=e^{0.18x+0.60}$；（ii）21.67 亿元.

【小问 1 详解】

设模型①和②的相关系数分别为 $r_1$，$r_2$.

由题意可得：$r_1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{12}\left(u_i-\bar{u}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{12}\left(u_i-\bar{u}\right)^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{12}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}=\dfrac{215}{\sqrt{31250\times2}}=\dfrac{215}{250}=\dfrac{43}{50}=0.86$,

$$r_2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{12}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(v_i-\bar{v}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{12}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{12}\left(v_i-\bar{v}\right)^2}}=\frac{14}{\sqrt{77\times3.08}}=\frac{14}{77\times0.2}=\frac{10}{11}\approx0.91,$$

所以$|r_1|<|r_2|$，由相关系数的相关性质可得，模型②的拟合程度更好.

【小问 2 详解】

（i）由（1）知，选择模型②.

先建立 $v$ 关于 $x$ 的线性回归方程，

因为$\hat{y}=e^{\hat{\lambda}x+\hat{t}}$，可得$ln\,\hat{y}=\hat{\lambda}x+\hat{t}$，即$\hat{v}=\hat{\lambda}x+\hat{t}$，

可得 $\hat{\lambda}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{12}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(v_i-\bar{v}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{12}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\dfrac{14}{77}\approx0.18,\hat{t}=\bar{v}-\hat{\lambda}\bar{x}\approx4.2-0.18\times20=0.60$,

所以 $v$ 关于 $x$ 的线性回归方程为$\hat{v}=0.18x+0.60$，即$\hat{y}=e^{0.18x+0.60}$；

（ii）下一年销售额需达到 90 亿元，即 $y=90$,

代入$\hat{y}=e^{0.18x+0.60}$，得 $e^{0.18x+0.60}=90$,

因为 $e^{4.4998}\approx90$，则 $0.18x+0.60\approx4.4998$,

所以 $x\approx\dfrac{4.4998\text{-}0.60}{0.18}\approx21.67$,

故预测下一年的研发资金投入量约是 21.67 亿元.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=xe^x-a\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=\left(2e+1\right)x-b\left(a,b\in\mathrm{R}\right)$

（1）求实数 $a$，$b$ 的值；

（2）设函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2e^x-x+3$，当 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$时，$g\left(x\right)<m$ $\left(m\in\mathrm{Z}\right)$ 恒成立，求 $m$ 的最小值.

【答案】（1）$a=-1$，$b=e+1$　　（2）0

【小问 1 详解】

定义域为$\left(0,+\infty\right)$， $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)e^x-\frac{a}{x}$，

由题意知$\begin{cases}f'(1)=2e-a=2e+1\\ f(1)=2e+1-b=e\end{cases}$，

解得$a=-1$，$b=e+1$；

【小问 2 详解】

$g\left(x\right)=f\left(x\right)-2e^x-x+3=\left(x-2\right)e^x+\ln x-x+3$，

则$g'\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x+\frac{1}{x}-1=\left(x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$，

令$h\left(x\right)=e^x-\frac{1}{x}$，其中$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，则$h'\left(x\right)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，

所以函数$h\left(x\right)=e^x-\frac{1}{x}$在$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递增，

因为$h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$h\left(1\right)=e-1>0$，所以存在唯一$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

使得$h\left(x_0\right)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，可得$x_0=-\ln x_0$，

当$\frac{1}{2}<x<x_0$时，$g'\left(x\right)>0$，此时函数$g\left(x\right)$单调递增，

当$x_0<x<1$时，$g'\left(x\right)<0$，此时函数$g\left(x\right)$单调递减.

所以当$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时，$g\left(x\right)_{\max}=g\left(x_0\right)=\left(x_0-2\right)e^{x_0}+\ln x_0-x_0+3$，

因为$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$x_0=-\ln x_0$，所以$g\left(x\right)_{\max}=4-2\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)\le 4-4\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}=0$，

当且仅当$x_0=\frac{1}{x_0}$，即$x_0=1$时，取等号，

又因$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以$g\left(x\right)_{\max}=4-2\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)<0$，

即$g\left(x\right)<0$，因为$g\left(1\right)=2-e>-1$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}-\ln 2-\frac{3}{2}\sqrt{e}>\frac{5}{2}-\ln 2-\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}=-\ln 2>-1$，

所以当$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时，$-1<g\left(x\right)<0$，

因为当$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时，$g\left(x\right)<m\ \ \left(m\in Z\right)$恒成立，

所有$m_{\min}=0$.