2023—2024学年度上学期9月份开学考试

数学试卷

命题人：高三数学组

第I卷（选择题）

一、单选题

1. 集合$\left\{x\left|\frac{4-x}{x-1}\geq 0\right.\right\}$=（　　）

A. $(-\infty,1)\cup[4,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$

C. $(1,4]$　　D. $[1,4]$

2. 下述正确的是（　　）

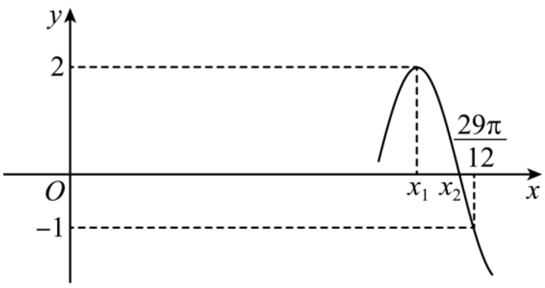
A. 若θ为第四象限角，则$\sin\theta>0$

B. 若$\cos\theta=0$，则$\theta=\frac{\pi}{2}$

C. 若θ的终边为第三象限平分线，则$\tan\theta=-1$

D. "$\theta=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$"是"$\sin\theta=\cos\theta$"的充要条件

3. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$的部分图象如图所示，且$x_2-x_1=\frac{\pi}{4}$，则$\omega,\varphi$的值为（　　）



A. $\omega=1,\varphi=\frac{3\pi}{4}$　　B. $\omega=1,\varphi=\frac{11\pi}{12}$

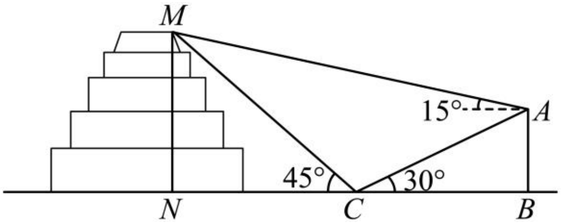
C. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$　　D. $\omega=2,\varphi=\frac{2\pi}{3}$

4. 已知$x>0$，$y>0$，$x+2y=1$，则$\frac{(x+1)(y+1)}{xy}$的最小值为（　　）

A. $4+4\sqrt{3}$　　B. 12　　C. $8+4\sqrt{3}$　　D. 16

5. 中国古代四大名楼鹳雀楼，位于山西省运城市永济市蒲州镇，因唐代诗人王之涣的诗作《登鹳雀楼》而流芳后世．如图，某同学为测量鹳雀楼的高度MN，在鹳雀楼的正东方向找到一座建筑物AB，高约为37m，在地面上点C处（B，C，N三点共线）测得建筑物顶部A，鹳雀楼顶部M的仰角分别为30°和45°，在A处测得楼顶部M的

仰角为15°，则鹳雀楼的高度约为（　　）



A. 74m　　B. 60m　　C. 52m　　D. 91m

6. 岭南古邑的番禺不仅拥有深厚的历史文化底蕴，还聚焦生态的发展．下图1是番禺区某风景优美的公园地图，其形状如一颗爱心．图2是由此抽象出来的一个“心形”图形，这个图形可看作由两个函数的图象构成，则“心形”在x轴上方的图象对应的函数解析式可能为（　　）


图1

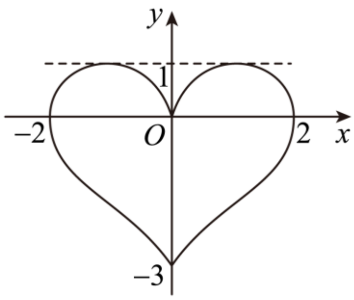


图2

A. $y=|x|\sqrt{4-x^2}$

B. $y=x\sqrt{4-x^2}$

C. $y=\sqrt{-x^2+2|x|}$

D. $y=\sqrt{-x^2+2x}$

7. 已知函数$f(x)$是定义在R上的可导函数，其导函数为$f'(x)$，若对任意$x\in\mathbf{R}$有$f'(x)>1$，$f(1+x)+f(1-x)=0$，且$f(0)=-2$，则不等式$f(x-1)>x-1$的解集为（　　）

A. $(4,+\infty)$

B. $(3,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$

D. $(0,+\infty)$

8. 记$a=\sqrt[2023]{2022}$，$b=\sqrt[2023]{2023}$，$c=\sqrt[2024]{2023}$，则a，b，c的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

二、多选题

9. 设函数$f(x)=\sin(x\sin x)$，则（　　）

A. $f(x)$是偶函数

B. 2π是$f(x)$的一个周期

C. 函数$g(x)=f(x)-1$存在无数个零点

D. 存在 $x_0\in(-\pi,\pi)$，使得 $f(x_0)<0$

10. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，则下列说法正确的是（　　）

A. $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$

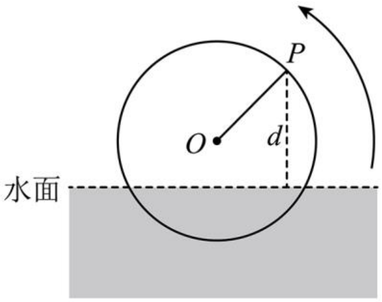
B. 若 $\triangle ABC$ 为斜三角形，则 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

C. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}>0$，则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形

D. 若 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，则 $\triangle ABC$ 一定是等边三角形

11. 如图（1），筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，因其经济又环保，至今在农业生产中仍得到使用.如图（2），一个筒车按照逆时针方向旋转，筒车上的某个盛水筒 P 到水面的距离为 d（单位：m）（P 在水下则 d 为负数）、d 与时间 t（单位：s）之间的关系是 $d=3\sin\left(\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3}{2}$，则下列说法正确的是（　　）


图(1)



图(2)

A. 筒车的半径为 3m，旋转一周用时 30s

B. 筒车的轴心 O 距离水面的高度为 $\dfrac{3}{2}$m

C. $t\in(40,50)$ 时，盛水筒 P 处于向上运动状态

D. 盛水筒 P 出水后至少经过 20s 才可以达到最高点

12. 已知当 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x}$，则（　　）

A. $\dfrac{10}{9}<e^{\frac{1}{9}}<\dfrac{9}{8}$

B. $\ln 9<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{9}<\ln 10$

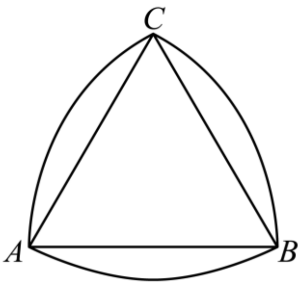
C. $(\dfrac{10}{e})^9<9!$

D. $(\dfrac{C_9^0}{9^0})^2+(\dfrac{C_9^1}{9^1})^2+\cdots+(\dfrac{C_9^9}{9^9})^2<e$

第 II 卷（非选择题）

三．填空题

13. 以等边三角形每个顶点为圆心，以边长为半径，在另两个顶点间作一段弧，三段弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形．如图，已知某勒洛三角形的一段弧 AB 的长度为 $\dfrac{\pi}{3}$，则该勒洛三角形的面积是________.



14. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin x+\frac{1}{\sin x}$， $x\in\left(0,\pi\right)$，当 $x=\alpha$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 取得最小值，则 $\cos 2\alpha=$__________.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $(\frac{7\pi}{6\omega},2\pi]$ 上有且只有 2 个零点，则 ω 的取值范围是_________.

16. 已知偶函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，函数 $g\left(x\right)=\sin\frac{\pi}{4}x-\cos\frac{\pi}{4}x+\left|\sin\frac{\pi}{4}x-\cos\frac{\pi}{4}x\right|$，且

$f\left(x\right)=\begin{cases}\log_2\left(4x+2\right),x\in\left[0,1\right)\\ g\left(x\right),x\in\left[1,9\right)\\ f\left(x-9\right),x\in\left[9,+\infty\right)\end{cases}$，若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-m,m\right]$ 上的图象与直线 $y=2$ 恰有 602 个公共点，则 m 的取值范围为__________.

四、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c， $\triangle ABC$ 的面积为 S，已知 $b^2+c^2-a^2=4\sqrt{3}S$

（1）求角 A；

（2）若 $a=2$，求 $\sqrt{3}b-c$ 的取值范围.

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 $a,b,c,a=3,b+6\cos B=2c$.

（1）求 A；

（2）M 为 $\triangle ABC$ 内一点， AM 的延长线交 BC 于点 D，___________，求 $\triangle ABC$ 的面积.

请在下列两个条件中选择一个作为已知条件补充在横线上，并解决问题.

① $\triangle ABC$ 的三个顶点都在以 M 为圆心的圆上，且 $MD=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

② $\triangle ABC$ 的三条边都与以 M 为圆心的圆相切，且 $AD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答记分.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2 x-\sqrt{3}-1$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

（2）方程 $f\left(x\right)=\frac{3}{2}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的两解分别为 $x_1、x_2$，求 $\cos\left(x_1-x_2\right)$ 的值.

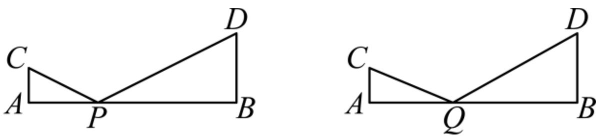
20. 已知 $f(x)=e^{x}-ax^{2}$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=bx+1$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值；

（3）当 $x\in R$ 时，判断 $y=f(x)$ 与 $y=bx+1$ 交点的个数.（只需写出结论，不要求证明）

21. 如图，C，D 是两个小区所在地，C，D 到一条公路 AB 的垂直距离分别为 CA＝1km，DB＝2km，AB 两端之间的距离为 6km.



（1）某移动公司将在 AB 之间找一点 P，在 P 处建造一个信号塔，使得 P 对 A，C 的张角与 P 对 B，D 的张角相等（即 $\angle CPA=\angle DPB$），试求 $PC+PD$ 的值；

（2）环保部门将在 AB 之间找一点 Q，在 Q 处建造一个垃圾处理厂，使得 Q 对 C，D 所张角最大，试求 QB 的长度.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=x\cos x$，$g\left(x\right)=a\sin x$.

（1）若 $a=1$，证明：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时 $x>g\left(x\right)>f\left(x\right)$；

（2）当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}<\dfrac{\sin x}{x}$，求 a 的取值范围.