2023—2024 学年度上学期 9 月份开学考试

数学试卷

命题人：高三数学组

第I卷（选择题）

一、单选题

1. 集合 $\left\{x\left|\frac{4-x}{x-1}\geq 0\right.\right\}=$（　　）

A. $(-\infty,1)\cup[4,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$

C. $(1,4]$　　D. $[1,4]$

【答案】C

【详解】由 $\frac{4-x}{x-1}\geq 0$，得 $\begin{cases}(x-4)(x-1)\leq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解得 $1<x\leq 4$，

则集合 $\left\{x\left|\frac{4-x}{x-1}\geq 0\right.\right\}=(1,4]$.

故选：C.

2. 下述正确的是（　　）

A. 若 θ 为第四象限角，则 $\sin\theta>0$

B. 若 $\cos\theta=0$，则 $\theta=\frac{\pi}{2}$

C. 若 θ 的终边为第三象限平分线，则 $\tan\theta=-1$

D. “$\theta=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$”是“$\sin\theta=\cos\theta$”的充要条件

【答案】D

【详解】对于 A，若 θ 为第四象限角，根据三角函数定义可得 $\sin\theta<0$，故不正确；

对于 B，若 $\cos\theta=0$，则 $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，故不正确；

对于 C，若 θ 的终边为第三象限平分线，则 $\theta=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$，

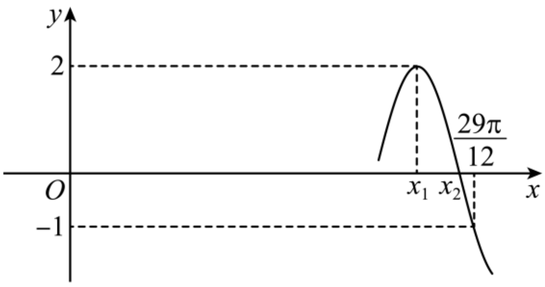
此时 $\tan\theta=1$，故不正确；

对于 D，由 $\theta=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$ 可得 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=1$，即 $\sin\theta=\cos\theta$，满足充分性；

由 $\sin\theta=\cos\theta$ 可得 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1$，所以 $\theta=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$，满足必要性，故正确

故选：D

3. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的部分图象如图所示，且 $x_2-x_1=\frac{\pi}{4}$，则 ω,φ 的值为（　　）



A. $\omega=1,\varphi=\frac{3\pi}{4}$　　B. $\omega=1,\varphi=\frac{11\pi}{12}$

C. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$　　D. $\omega=2,\varphi=\frac{2\pi}{3}$

【答案】C

【详解】由题意可得$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，得$T=\pi$，所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得$\omega=2$，

所以$f(x)=2\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\pi)$，

因为$f(x)$的图象过点$\left(\frac{29\pi}{12},-1\right)$，

所以$2\sin\left(\frac{29\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，得$\sin\left(5\pi-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=-\frac{1}{2}$，

所以$\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

所以$\varphi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，或$\varphi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，

所以$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，或$\varphi=\pi+2k\pi,k\in Z$，

因为$|\varphi|<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

故选：C

4. 已知$x>0$，$y>0$，$x+2y=1$，则$\frac{(x+1)(y+1)}{xy}$的最小值为（　　）

A. $4+4\sqrt{3}$　　B. 12　　C. $8+4\sqrt{3}$　　D. 16

【答案】C

【详解】因为$x>0$，$y>0$，$x+2y=1$，

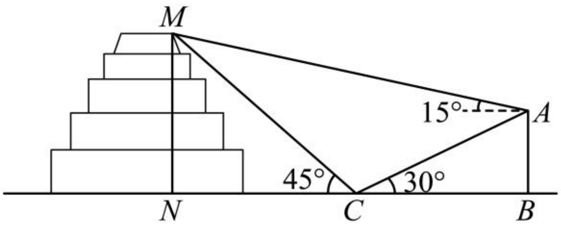
所以$\frac{(x+1)(y+1)}{xy}=\frac{(x+x+2y(y+x+2y)}{xy}=\frac{(2x+2y)(x+3y)}{xy}$

$=\frac{2x^2+6y^2+8xy}{xy}\geq\frac{2\sqrt{2x^2\cdot6y^2}+8xy}{xy}=8+4\sqrt{3}$，

当且仅当$2x^2=6y^2$，即$x=2\sqrt{3}-3, y=2-\sqrt{3}$时，等号成立．

故选：C．

5．中国古代四大名楼鹳雀楼，位于山西省运城市永济市蒲州镇，因唐代诗人王之涣的诗作《登鹳雀楼》而流芳后世．如图，某同学为测量鹳雀楼的高度MN，在鹳雀楼的正东方向找到一座建筑物AB，高约为37m，在地面上点C处（B，C，N三点共线）测得建筑物顶部A，鹳雀楼顶部M的仰角分别为30°和45°，在A处测得楼顶部M的仰角为15°，则鹳雀楼的高度约为（　　）



A. 74m　　B. 60m　　C. 52m　　D. 91m

【答案】A

【详解】在Rt$\triangle ABC$中，$AC=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{37}{\sin 30^\circ}$，

$\angle ACM=180^\circ-\angle ACB-\angle MCN=105^\circ$，$\angle CAM=15^\circ+30^\circ=45^\circ$，

在$\triangle ACM$中，$\angle CMA=180^\circ-\angle MAC-\angle ACM=30^\circ$，

由$\dfrac{AC}{\sin 30^\circ}=\dfrac{MC}{\sin 45^\circ}$，$MC=\dfrac{AC}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 45^\circ=\dfrac{37}{\sin^2 30^\circ}\cdot\sin 45^\circ=74\sqrt{2}$，

在Rt$\triangle MNC$中，$MN=MC\cdot\sin 45^\circ=74$．

故选：A

6．岭南古邑的番禺不仅拥有深厚的历史文化底蕴，还聚焦生态的发展．下图1是番禺区某风景优美的公园地图，其形状如一颗爱心．图2是由此抽象出来的一个“心形”图形，这个图形可看作由两个函数的图象构成，则“心形”在x轴上方的图象对应的函数解析式可能为（　　）

图1

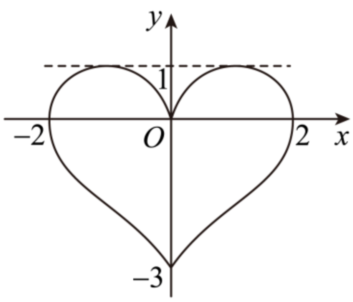


图2

A. $y=|x|\sqrt{4-x^2}$　　B. $y=x\sqrt{4-x^2}$

C. $y=\sqrt{-x^2+2|x|}$　　D. $y=\sqrt{-x^2+2x}$

【答案】C

【详解】对于 A，$\because y=|x|\sqrt{4-x^2}=\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}\le\sqrt{\left(\frac{x^2+4-x^2}{2}\right)^2}=2$（当且仅当 $x^2=4-x^2$，即 $x=\pm\sqrt{2}$ 时取等号），

$\therefore y=|x|\sqrt{4-x^2}$ 在 $(-2,2)$ 上的最大值为 2，与图象不符，A 错误；

对于 B，当 $x\in(-2,0)$ 时，$y=x\sqrt{4-x^2}<0$，与图象不符，B 错误；

对于 C，$\because y=\sqrt{-x^2+2|x|}=\sqrt{-(|x|-1)^2+1}$，$\therefore$ 当 $x=\pm1$ 时，$y_{\max}=1$；

又 $y=\sqrt{-x^2+2|x|}$ 过点 $(-2,0),(2,0),(0,0)$；

由 $-x^2+2|x|\ge0$ 得：$|x|(|x|-2)\le0$，解得：$-2\le x\le2$，即函数定义域为 $[-2,2]$；

又 $\sqrt{-(-x)^2+2|-x|}=\sqrt{-x^2+2|x|}$，

$\therefore y=\sqrt{-x^2+2|x|}$ 为定义在 $[-2,2]$ 上的偶函数，图象关于 y 轴对称；

当 $x\in[0,2]$ 时，$y=\sqrt{-x^2+2x}=\sqrt{-(x-1)^2+1}$，则函数在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减；

综上所述：$y=\sqrt{-x^2+2|x|}$ 与图象相符，C 正确；

对于 D，由 $-x^2+2x\ge0$ 得：$0\le x\le2$，$\therefore y=\sqrt{-x^2+2x}$ 不存在 $x\in(-2,0)$ 部分的图象，D 错误.

故选：C.

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f'(x)>1$，$f(1+x)+f(1-x)=0$，且 $f(0)=-2$，则不等式 $f(x-1)>x-1$ 的解集为（　　）

A. $(4,+\infty)$

B. $(3,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$

D. $(0,+\infty)$

【答案】B

【详解】设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g'(x)=f'(x)-1>0$ 恒成立，故函数 $g(x)$ 在 R 上单调递增.

$f(1+x)+f(1-x)=0$，则 $f(2)+f(0)=0$，即 $f(2)=2$，故 $g(2)=f(2)-2=0$.

$f(x-1)>x-1$，即 $g(x-1)>0$，即 $g(x-1)>g(2)$，故 $x-1>2$，解得 $x>3$.

故选：B.

8. 记 $a=\sqrt[2023]{2022}$，$b=\sqrt[2023]{2023}$，$c=\sqrt[2024]{2023}$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$

B. $a>c>b$

C. $b>c>a$

D. $b>a>c$

【答案】D

【详解】设 $f(x)=x^{\frac{1}{2023}}$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

故 $f(2022)<f\left(2023\right)$，即 $a<b$；

由于 $\ln a=\dfrac{1}{2023}\ln 2022,\ln c=\dfrac{1}{2024}\ln 2023$，

设 $g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x+1}$， $x>\mathrm{e}^2$，

则 $g'(x)=\dfrac{\frac{1+x}{x}-\ln x}{(x+1)^2}=\dfrac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}<\dfrac{2-\ln x}{\left(x+1\right)^2}<0$，$\left(x>\mathrm{e}^2\right)$，

则 $g\left(x\right)$ 在 $\left(\mathrm{e}^2,+\infty\right)$ 单调递减，故 $g\left(2023\right)<g\left(2022\right)$，

即 $\ln c<\ln a$，则 $c<a$；

综上得，$b>a>c$， D 正确.

故选：D

二、多选题

9. 设函数 $f\left(x\right)=\sin\left(x\sin x\right)$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$ 是偶函数

B. 2π 是 $f\left(x\right)$ 的一个周期

C. 函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-1$ 存在无数个零点

D. 存在 $x_0\in\left(-\pi,\pi\right)$，使得 $f\left(x_0\right)<0$

【答案】AC

【详解】对于 A 项， $f\left(x\right)$ 定义域为 $\mathbf{R}$. 又 $f\left(-x\right)=\sin\left(-x\sin\left(-x\right)\right)=\sin\left(x\sin x\right)=f\left(x\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 是偶函数，故 A 项正确；

对于 B 项， $f\left(x+2\pi\right)=\sin\left(\left(x+2\pi\right)\sin\left(x+2\pi\right)\right)=\sin\left(x\sin x+2\pi\sin x\right)\neq f\left(x\right)$，所以 2π 不是 $f\left(x\right)$ 的一个周期，故 B 项错误；

对于 C 项，因为 $k\in\mathbf{Z}$ 时，有 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$，又 $\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，所以 $f\left(x\right)=1$ 有无数多个解，所以函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-1$ 存在无数个零点，故 C 项正确；

对于 D 项，当 $0<x<\pi$ 时，有 $0<\sin x\le 1$，所以 $0<x\sin x<x<\pi$.

所以有 $f\left(x\right)>0$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上恒成立.

又 $f\left(0\right)=0$， $f\left(x\right)$ 是偶函数，

所以，当$-\pi<x<\pi$时，有$f(x)\geq 0$恒成立，故D项错误.

故选：AC.

10. 已知$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，则下列说法正确的是（　　）

A. $\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$

B. 若$\triangle ABC$为斜三角形，则$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

C. 若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}>0$，则$\triangle ABC$是锐角三角形

D. 若$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，则$\triangle ABC$一定是等边三角形

【答案】AB

【详解】对于A，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

得$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R=\frac{a}{\sin A}$，A正确；

对于B，斜$\triangle ABC$中，$\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$，

则$\tan A+\tan B=\tan C(\tan A\tan B-1)$，即$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，B正确；

对于C，由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}>0$，得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\left(\pi-C\right)=-ab\cos C>0$，则$\cos C<0$，

因此C为钝角，$\triangle ABC$是钝角三角形，C错误；

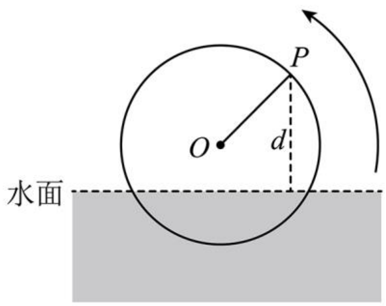
对于D，由正弦定理及$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，得$\frac{\sin A}{\sin A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C}$，

即$\tan B=\tan C=1$，而$B,C\in(0,\pi)$，则$B=C=\frac{\pi}{4}$，$\triangle ABC$为等腰直角三角形，D错误.

故选：AB

11. 如图（1），筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，因其经济又环保，至今在农业生产中仍得到使用.如图（2），一个筒车按照逆时针方向旋转，筒车上的某个盛水筒P到水面的距离为d（单位：m）（P在水下则d为负数）、d与时间t（单位：s）之间的关系是$d=3\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$，则下列说法正确的是（　　）

图(1)



图(2)

A. 筒车的半径为3m，旋转一周用时30s

B. 筒车的轴心O距离水面的高度为$\frac{3}{2}$m

C. $t\in(40,50)$时，盛水筒 P 处于向上运动状态

D. 盛水筒 P 出水后至少经过 20s 才可以达到最高点

【答案】BD

【详解】对于 A，$\because d=3\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$ 的振幅为筒车的半径，$\therefore$筒车的半径为$3\mathrm{m}$；

$\because d=3\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$ 的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}}=60$，$\therefore$旋转一周用时$60\mathrm{s}$，A 错误；

对于 B，$\because d_{\max}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，筒车的半径$r=3$，$\therefore$筒车的轴心$O$距离水面的高度为$d_{\max}-r=\frac{3}{2}(\mathrm{m})$，B 正确；

对于 C，当$t\in(40,50)$时，$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$，此时$d$ 单调递减，

$\therefore$盛水筒 P 处于处于向下运动的状态，C 错误；

对于 D，令$3\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}=3+\frac{3}{2}$，$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

$\therefore\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，解得：$t=20+60k\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

又$t\geq0$，$\therefore$当$k=0$时，$t_{\min}=20\mathrm{s}$，即盛水筒 P 出水后至少经过$20\mathrm{s}$才可以达到最高点，D 正确.

故选：BD.

12. 已知当$x>0$时，$\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$，则（　　）

A. $\frac{10}{9}<\mathrm{e}^{\frac{1}{9}}<\frac{9}{8}$

B. $\ln9<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}<\ln10$

C. $(\frac{10}{\mathrm{e}})^{9}<9!$

D. $(\frac{C_9^0}{9^0})^2+(\frac{C_9^1}{9^1})^2+\cdots+(\frac{C_9^9}{9^9})^2<\mathrm{e}$

【答案】ACD

【详解】因为$\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$，令$x=8$，$\frac{1}{1+8}=\frac{1}{9}<\ln(1+\frac{1}{8})=\ln\frac{9}{8}$，则$\mathrm{e}^{\frac{1}{9}}<\frac{9}{8}$，

令$x=9$，$\ln(1+\frac{1}{9})=\ln\frac{10}{9}<\frac{1}{9}$，则$\frac{10}{9}<\mathrm{e}^{\frac{1}{9}}$，A 正确；

因为$\ln(1+\frac{1}{x})=\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$，则$\ln\frac{2}{1}<1$，$\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$，…，$\ln\frac{10}{9}<\frac{1}{9}$，以上各式相加有$\ln10<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}$，B 错误；

由$\ln(1+\frac{1}{x})=\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$得，$x\ln(x+1)-x\ln x-1<0$，即$x\ln(x+1)-(x-1)\ln x-1<\ln x$，

于是$\ln2-1<\ln1$，$2\ln3-\ln2-1<\ln2$，$3\ln4-2\ln3-1<\ln3$，…，$9\ln10-8\ln9-1<\ln9$，

以上各式相加有$9\ln 10-9<\ln 9!$，即$e^{\ln 10^9-9}=\frac{10^9}{e^9}=(\frac{10}{e})^9<9!$，C 正确；

由$\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$得，$(1+\frac{1}{x})^x<e$，因此$\frac{C_9^0}{9^0}+\frac{C_9^1}{9^1}+\cdots+\frac{C_9^9}{9^9}=(1+\frac{1}{9})^9<e$，

设$k,n\in N^*,k\le n$，$\frac{C_n^k}{n^k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k\cdot k!}\le 1$，

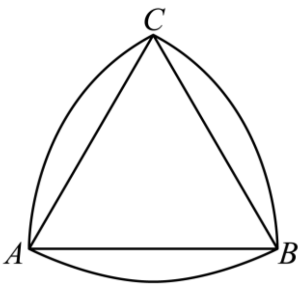
则$(\frac{C_n^k}{n^k})^2\le\frac{C_n^k}{n^k}$，所以$(\frac{C_9^0}{9^0})^2+(\frac{C_9^1}{9^1})^2+\cdots+(\frac{C_9^9}{9^9})^2<\frac{C_9^0}{9^0}+\frac{C_9^1}{9^1}+\cdots+\frac{C_9^9}{9^9}<e$，D 正确.

故选：ACD

第 II 卷（非选择题）

三．填空题

13. 以等边三角形每个顶点为圆心，以边长为半径，在另两个顶点间作一段弧，三段弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形．如图，已知某勒洛三角形的一段弧AB的长度为$\frac{\pi}{3}$，则该勒洛三角形的面积是________.



【答案】$\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

【详解】因为AB的长度为$\frac{\pi}{3}$，所以$AB=1$，$S_{扇ABC}=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，

所以勒洛三角形的面积是$3S_{扇ABC}-2S_{! ABC}=3\times\frac{\pi}{6}-2\times\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$.

14. 已知函数$f\left(x\right)=2\sin x+\frac{1}{\sin x}$，$x\in\left(0,\pi\right)$，当$x=\alpha$时，函数$f\left(x\right)$取得最小值，则$\cos 2\alpha=$__________.

【答案】0

【详解】当$x\in\left(0,\pi\right)$时，$\sin x\in\left(0,1\right]$，

$\therefore f\left(x\right)=2\sin x+\frac{1}{\sin x}\ge 2\sqrt{2\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}=2\sqrt{2}$（当且仅当$2\sin x=\frac{1}{\sin x}$，即$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号），

$\therefore \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\frac{1}{2}=0$.

故答案为：0.

15. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $(\frac{7\pi}{6\omega},2\pi]$ 上有且只有 2 个零点，则 ω 的取值范围是________.

【答案】$[\frac{4}{3},\frac{11}{6})$

【详解】由 $x\in(\frac{7\pi}{6\omega},2\pi]$，可得 $\omega x-\frac{\pi}{6}\in(\pi,2\omega\pi-\frac{\pi}{6}]$，其中 $\omega>0$，

因为函数 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})$ 在区间 $(\frac{7\pi}{6},2\pi]$ 上有且仅有 2 个零点，

则满足 $\begin{cases}2\omega\pi-\frac{\pi}{6}\geq\frac{5\pi}{2}\\2\omega\pi-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{4}{3}\leq\omega<\frac{11}{6}$，即实数 ω 的取值范围是 $[\frac{4}{3},\frac{11}{6})$.

故答案为：$[\frac{4}{3},\frac{11}{6})$.

16. 已知偶函数 $f(x)$ 的定义域为 R，函数 $g(x)=\sin\frac{\pi}{4}x-\cos\frac{\pi}{4}x+\left|\sin\frac{\pi}{4}x-\cos\frac{\pi}{4}x\right|$，且

$f(x)=\begin{cases}\log_2(4x+2),x\in[0,1)\\g(x),x\in[1,9)\\f(x-9),x\in[9,+\infty)\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $[-m,m]$ 上的图象与直线 $y=2$ 恰有 602 个公共点，则 m 的取值范围为________.

【答案】$\left[\frac{1801}{2},902\right)$

【详解】由题意得 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，

当 $x\in[0,1)$ 时，$1\leq\log_2(4x+2)<\log_2 6$，

当 $x\in[1,5]$ 时，$\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}x\leq\frac{5\pi}{4}$，$\sin\frac{\pi}{4}x\geq\cos\frac{\pi}{4}x$，

$f(x)=2\sin\frac{\pi}{4}x-2\cos\frac{\pi}{4}x=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$，

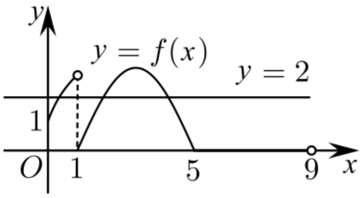
当 $x\in[5,9)$ 时，$\frac{5\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}x<\frac{9\pi}{4}$，$\sin\frac{\pi}{4}x\leq\cos\frac{\pi}{4}x$，$f(x)=0$，

当 $x\in[9,+\infty)$ 时，$f(x)$ 是周期为 9 的周期函数.

因为 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且 $f(0)=1$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,m]$ 上的图象与直线 $y=2$ 恰有 301 个公共点.

$f\left(x\right)$在$\left[0,9\right)$上的图象如图所示，



$f\left(x\right)$在$\left[0,9\right)$上的图象与直线$y=2$有 3 个公共点，

令$\log_2\left(4x+2\right)=2$，得$x=\dfrac{1}{2}$，

令$2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{4}\right)=2$，得$x=2$或$4$.

所以这3个公共点的横坐标依次为$\frac{1}{2}$，2，4.

因为$301=3\times100+1$，

所以$\dfrac{1}{2}+100\times9\le m<2+100\times9$，即$\dfrac{1801}{2}\le m<902$.

故答案为：$\left[\dfrac{1801}{2},902\right)$

四、解答题

17. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$\triangle ABC$的面积为S，已知$b^2+c^2-a^2=4\sqrt{3}S$

（1）求角A；

（2）若$a=2$，求$\sqrt{3}b-c$的取值范围.

【答案】（1）$A=\dfrac{\pi}{6}$

（2）$\left(-2,4\right]$

【小问 1 详解】

已知$b^2+c^2-a^2=4\sqrt{3}S$，由余弦定理和三角形的面积公式，

得$2bc\cos A=4\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}bc\sin A$，即$\cos A=\sqrt{3}\sin A$，

若$\cos A=0$，则$\sin A=0$，不符合题意，故$\cos A\ne0$，

所以$\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，由$A\in\left(0,\pi\right)$，得$A=\dfrac{\pi}{6}$.

【小问 2 详解】

$a=2$，$A=\dfrac{\pi}{6}$，$B+C=\pi-A=\dfrac{5\pi}{6}$，

由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=4$，

$\sqrt{3}b-c=4\sqrt{3}\sin B-4\sin C=4\left(\sqrt{3}\sin B-\sin C\right)=4\left[\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-C\right)-\sin C\right]$

$=4\left[\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)-\sin C\right]=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C\right)=4\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

由 $C\in\left(0,\dfrac{5\pi}{6}\right)$，则 $C+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{6}\right)$，得 $\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(-\dfrac{1}{2},1\right]$，

所以 $4\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(-2,4\right]$，即 $\sqrt{3}b-c$ 的取值范围 $\left(-2,4\right]$.

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 $a,b,c,a=3,b+6\cos B=2c$.

（1）求 A；

（2）M 为 $\triangle ABC$ 内一点，AM 的延长线交 BC 于点 D，____________，求 $\triangle ABC$ 的面积.

请在下列两个条件中选择一个作为已知条件补充在横线上，并解决问题.

① $\triangle ABC$ 的三个顶点都在以 M 为圆心的圆上，且 $MD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

② $\triangle ABC$ 的三条边都与以 M 为圆心的圆相切，且 $AD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答记分.

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

【小问 1 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a=6$，所以 $b+2a\cos B=2c$，

由正弦定理，得 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin C$，

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin\left(A+B\right)$，

化简，得 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，因为 $A\in\left(0,\pi\right)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

选条件①：

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，

则在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $2R=\dfrac{BC}{\sin A}=2\sqrt{3}$，即 $R=\sqrt{3}$，

由题意知：$BM=CM=\sqrt{3},BC=3$，

由余弦定理知：$\cos\angle BMC=\dfrac{3+3-9}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\angle BMC=\dfrac{2\pi}{3},\angle MBD=\dfrac{\pi}{6}$.

在$\triangle BDM$中，由正弦定理知：$\sin\angle BDM=\dfrac{BM}{MD}\sin\angle MBD=1$，

所以$\angle BDM=\dfrac{\pi}{2}$，

从而$MD\perp BC$，所以$\triangle ABC$为等边三角形，

$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

选条件②：

由条件知：$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$，

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，得$\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}c\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}b\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}$，

因为$AD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}(b+c)$，即$b+c=\dfrac{2bc}{3}$，

由（1）可得$b^2+c^2-9=bc$，即$(b+c)^2-3bc=9$，

所以$\left(\dfrac{2bc}{3}\right)^2-3bc-9=0,4(bc)^2-27bc-81=0$，即$(4bc+9)(bc-9)=0$，

又因为$bc>0$，所以$bc=9$，

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times9\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

19. 已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin^2x-\sqrt{3}-1$.

（1）求$f(x)$的单调递增区间；

（2）方程$f(x)=\dfrac{3}{2}$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的两解分别为$x_1、x_2$，求$\cos(x_1-x_2)$的值.

【答案】（1）$\left[-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right](k\in Z)$

（2）$\dfrac{3}{4}$

【小问1详解】

$f\left(x\right)=2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2x-\sqrt{3}-1$

$=\sqrt{3}\left[2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]-\cos2x=-\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos2x$

$=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得$-\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in Z\right)$，

所以 $f\left(x\right)$的单调递增区间为：$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right]\left(k\in Z\right)$.

【小问 2 详解】

设$x_1<x_2,\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，

由于正弦函数$y=\sin x$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$上单调递减，

由 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$，得$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$，

因为方程 $f\left(x\right)=\frac{3}{2}$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的两解分别为$x_1$、$x_2$，

则$\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x_2-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$，必有$0<2x_1-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}<2x_2-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

所以，$\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，同理$\cos\left(2x_2-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{7}}{4}$，

$\therefore\cos\left(2x_1-2x_2\right)=\cos\left[\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)-\left(2x_2-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x_2-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(2x_2-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$，

由于$0\le x_1\le\frac{\pi}{2},0\le x_2\le\frac{\pi}{2}$且$x_1<x_2,\therefore-\frac{\pi}{2}\le x_1-x_2<0$，则$\cos\left(x_1-x_2\right)\ge0$，

由$\cos\left(2x_1-2x_2\right)=2\cos^2\left(x_1-x_2\right)-1$，可得$\cos\left(x_1-x_2\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(2x_1-2x_2\right)}{2}}=\frac{3}{4}$.

20. 已知 $f(x)=e^x-ax^2$，曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=bx+1$.

（1）求a,b的值；

（2）求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值；

（3）当 $x\in R$ 时，判断 $y=f(x)$ 与 $y=bx+1$ 交点的个数.（只需写出结论，不要求证明）

【答案】（1） $a=1,b=e-2$；（2） $f(x)_{\max}=f(1)=e-1$；（3）见解析

【详解】试题分析：（1）求出 $f\left(x\right)$ 的导数，计算 $f'\left(1\right)$， $f\left(1\right)$，求出 a， b 的值即可；（2）求出 $f\left(x\right)$ 的导数，得到导函数的单调性，得到 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 递增，从而求出 $f\left(x\right)$ 的最大值；（3）根据函数图象的大致形状可得 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=bx+1$ 有两个交点.

试题解析：（1） $f'\left(x\right)=e^{x}-2ax$，由已知可得 $f'\left(1\right)=e-2a=b$， $f\left(1\right)=e-a=b+1$，解之得 $a=1,b=e-2$.

（2）令 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)=e^{x}-2x$. 则 $g'\left(x\right)=e^{x}-2$，

故当 $0\le x<\ln2$ 时， $g'\left(x\right)<0$， $g\left(x\right)$ 在 $\left[0,\ln2\right)$ 单调递减；

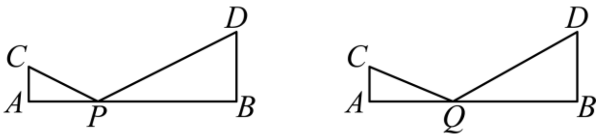
当 $\ln2<x\le1$ 时， $g'\left(x\right)>0$， $g\left(x\right)$ 在 $\left(\ln2,1\right]$ 单调递增；

所以 $g\left(x\right)_{\min}=g\left(\ln2\right)=2-2\ln2>0$，

故 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 单调递增，所以 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(1\right)=e-1$.

（3）当 $x\in R$ 时， $y=f\left(x\right)$ 与 $y=bx+1$ 有两个交点.

21. 如图，C，D 是两个小区所在地，C，D 到一条公路 AB 的垂直距离分别为 CA＝1km，DB＝2km，AB 两端之间的距离为 6km.



（1）某移动公司将在 AB 之间找一点 P，在 P 处建造一个信号塔，使得 P 对 A，C 的张角与 P 对 B，D 的张角相等（即 $\angle CPA=\angle DPB$），试求 $PC+PD$ 的值；

（2）环保部门将在 AB 之间找一点 Q，在 Q 处建造一个垃圾处理厂，使得 Q 对 C，D 所张角最大，试求 QB 的长度.

【答案】（1） $PC+PD=3\sqrt{5}$

（2） QB 的长度为 $12-\sqrt{74}\text{km}$

【小问 1 详解】

设 $PA=x$， $\angle CPA=\alpha$， $\angle DPB=\beta$，

依题意有 $\tan\alpha=\frac{1}{x}$， $\tan\beta=\frac{2}{6-x}$ ，

由 $\tan\alpha=\tan\beta$，得 $\frac{1}{x}=\frac{2}{6-x}$，解得 $x=2$，

从而 $PC=\sqrt{AC^2+AP^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$， $PD=\sqrt{PB^2+BD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

故 $PC+PD=\sqrt{5}+2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

【小问 2 详解】

设 $AQ=x$， $\angle CQA=\alpha$， $\angle DQB=\beta$，

依题意有 $\tan\alpha=\frac{1}{x}$， $\tan\beta=\frac{2}{6-x}$ ，

所以 $\tan\angle CQD=\tan[\pi-(\alpha+\beta)]$

$=-\tan(\alpha+\beta)$

$=-\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{6-x}}{1-\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{6-x}}$

$=\frac{x+6}{x^2-6x+2}$，

令 $t=x+6$，由 $0<x<6$，得 $6<t<12$，

所以 $\tan\angle CQD=\frac{x+6}{x^2-6x+2}$

$=\frac{t}{t^2-18t+74}$

$=\frac{1}{t+\frac{74}{t}-18}$，

所以 $2\sqrt{74}\le t+\frac{74}{t}<6+\frac{74}{6}=\frac{55}{3}$，

所以 $2\sqrt{74}-18\le t+\frac{74}{t}-18<\frac{1}{3}$，且 $t+\frac{74}{t}-18\ne 0$，

当 $2\sqrt{74}-18\le t+\frac{74}{t}-18<0$，所张的角为钝角，

所以当 $t=\sqrt{74}$，即 $x=\sqrt{74}-6$ 时取得最大角，

故 $QB=6-(\sqrt{74}-6)=12-\sqrt{74}$，从而 QB 的长度为 $12-\sqrt{74}\left(\text{km}\right)$.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=x\cos x$， $g\left(x\right)=a\sin x$.

（1）若 $a=1$，证明：当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $x>g\left(x\right)>f\left(x\right)$；

（2）当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{\sin x}{x}$，求 a 的取值范围．

【答案】（1）证明见解析

（2）$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$．

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$g(x)=\sin x$，所以即证：$x>\sin x>x\cos x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

先证左边：$x>\sin x$，令 $h(x)=x-\sin x$，$h'(x)=1-\cos x>0$，

$h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，$\therefore h(x)>h(0)=0$，即 $x>\sin x$．

再证右边：$\sin x>x\cos x$，令 $k(x)=\sin x-x\cos x$，

$k'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x>0$，

$\therefore k(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

$\therefore k(x)>k(0)=0$，即 $\sin x>x\cos x$，

$\therefore x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x>g(x)>f(x)$．

【小问 2 详解】

$\frac{\sin x}{x}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sin x}{x}-\frac{x\cos x}{a\sin x}$，

令 $F(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{x\cos x}{a\sin x}$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

因为 $F(-x)=F(x)$，所以题设等价于 $F(x)>0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，

由（1）知，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x>\sin x>\cos x$，于是：

①当 $a<0$ 时，$F(x)>0$ 恒成立；

②当 $a>0$ 时，$F(x)>0$ 等价于 $a\sin^2 x-x^2\cos x>0$，

（i）当 $0<a<1$ 时，$a\sin^2 x-x^2\cos x<ax^2-x^2\cos x=x^2(a-\cos x)$，

令 $p(x)=a-\cos x$，因为 $p(x)=a-\cos x$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上递增，

且 $p(0)=a-1\left\langle 0, p\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\right\rangle 0$，所以存在 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使 $p(\beta)=0$，

所以当 $0<x<\beta$，$p(x)<0$，即 $x^2(a-\cos x)<0$，不合题意；

(ii)当 $a\geq 1$ 时，$a\sin^2 x-x^2\cos x\geq \sin^2 x-x^2\cos x$

令 $r(x)=\sin^2 x-x^2\cos x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $r'(x)=2\sin x\cos x-2x\cos x+x^2\sin x>2\sin x\cos x-2\sin x+x^2\sin x$，

$=\left[x^2-2(1-\cos x)\right]\sin x=\left(x^2-4\sin^2\frac{x}{2}\right)\sin x=4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\sin^2\frac{x}{2}\right]\sin x>0$，

所以 $r(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $r(x)>r(0)=0$，所以 $a\sin^2 x-x^2\cos x>0$，所以 $F(x)>0$.

综上：a 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.