2023～2024 学年上学期高三年级 9 月联考卷·数学

参考答案、提示及评分细则

1. D　$A=\{x\mid x(x-1)(x-2)=0\}=\{0,1,2\}$，因为 $B\subseteq A$，所以满足条件的集合 B 的个数为 $2^3=8$. 故选 D.

2. C　因为 $\dfrac{3}{(2-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\dfrac{3}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{3(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{3-6\mathrm{i}}{5}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{6}{5}\mathrm{i}$，其共轭复数是 $\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}\mathrm{i}$. 故选 C.

3. A　若 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\alpha>0$ 成立，故充分性成立；若 $\cos\alpha>0$，则 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，不一定为 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，故必要性不成立. 所以“$\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$”是“$\cos\alpha>0$”的充分不必要条件. 故选 A.

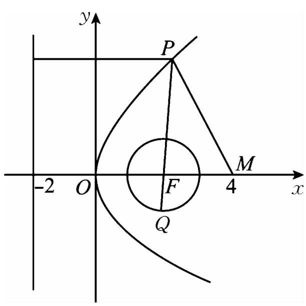
4. C　因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，$f(4)=-f(-4)=13$，所以 $f(0)+f(4)=13$. 故选 C.

5. A　因为 $(x-y)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r x^{6-r}(-y)^r=\mathrm{C}_6^r(-1)^r x^{6-r}y^r$，所以 $\left(1-\dfrac{2x}{y}\right)(x-y)^6=(x-y)^6-\dfrac{2x}{y}(x-y)^6$，展开式中 x^4y^2 的系数为 $\mathrm{C}_6^2(-1)^2-2\mathrm{C}_6^3(-1)^3=55$. 故选 A.

6. B　由题意得当 $x=9$ 时，$P=50\%$，则 $\dfrac{\mathrm{e}^{-0.9+9k}}{1+\mathrm{e}^{-0.9+9k}}=50\%$，得 $\mathrm{e}^{-0.9+9k}=1$，所以 $9k-0.9=0$，得 $k=0.1$，所以 $P(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-0.9+0.1x}}{1+\mathrm{e}^{-0.9+0.1x}}$. 当 $x=5$ 时，$P(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-0.9+0.1\times5}}{1+\mathrm{e}^{-0.9+0.1\times5}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-0.4}}{1+\mathrm{e}^{-0.4}}\approx\dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=40\%$. 故选 B.

7. C　函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 的导数为 $f'(x)=1-\dfrac{2}{3}\cos 2x+a\cos x$，由题意可得 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立，设 $t=\cos x(-1\leqslant t\leqslant1)$，即有 $5-4t^2+3at\geqslant0$，所以 $5-4+3a\geqslant0$，且 $5-4-3a\geqslant0$，解得 a 的取值范围是 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$. 故选 C.

8. B　如图，设圆心为 F，则 F 为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，该抛物线的准线方程为 $x=-2$，设 $P(x,y)$，由抛物线的定义得 $|PF|=x+2$，要使 $\dfrac{|PM|}{|PQ|}$ 最小，则 $|PQ|$ 需最大，如图，$|PQ|$ 最大时，经过圆心 F，且圆 F 的半径为 1，$|PQ|_{\max}=|PF|+1=x+3$，且 $|PM|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+8x}=\sqrt{x^2+16}$，所以 $\dfrac{|PM|}{|PQ|}=\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{x+3}$. 令 $x+3=t(t\geqslant3)$，则 $x=t-3$，所以 $\dfrac{|PM|}{|PQ|}=\dfrac{\sqrt{(t-3)^2+16}}{t}=\sqrt{\dfrac{25}{t^2}-\dfrac{6}{t}+1}=\sqrt{25\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{25}\right)^2+\dfrac{16}{25}}$，当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{25}$，即 $t=\dfrac{25}{3}$ 时，$\dfrac{|PM|}{|PQ|}$ 取得最小值 $\dfrac{4}{5}$. 故选 B.



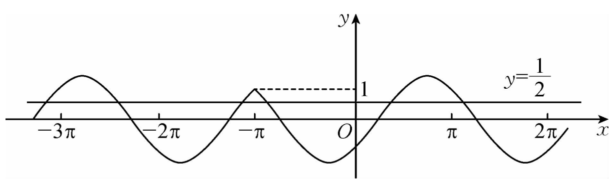
9. AC　由图象可知，$\dfrac{T}{2}=\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$，$T=\pi$，所以 $\omega=2$，当 $x=\dfrac{5\pi}{12}$ 时，$\dfrac{5\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，又 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=$

$2\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)=2\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$. 故选 AC.

10. ABD　对于 A, $(a^2-bc)-(b^2-ac)=(a^2-b^2)+(ac-bc)=(a-b)(a+b+c)>0$, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $a^3>a^2$, $a^2>b^2$, 所以 $a^3>b^2$, 故 B 正确; 对于 C, 当 $a=3,b=2,c=5$ 时, $|a-c|<|b-c|$, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $a+\frac{1}{a}-\left(b+\frac{1}{b}\right)=(a-b)\cdot\frac{ab-1}{ab}>0$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. BCD　对于 B, $f'(x)=3x^2-2$, 令 $f'(x)>0$, 得 $x>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $x<-\frac{\sqrt{6}}{3}$; 令 $f'(x)<0$, 得 $-\frac{\sqrt{6}}{3}<x<\frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 上单调递减, 所以 $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ 是极值点, 故 B 正确; 对于 A, 由 $f(x)$ 的单调性, 知极大值 $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{6}}{9}-2<0$, 又 $f(2)=2>0$, 所以函数 $f(x)$ 在定义域上有且仅有一个零点, 故 A 错误; 对于 C, 令 $h(x)=x^3-2x$, 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$, $h(-x)=(-x)^3-2(-x)=-x^3+2x=-h(x)$, 则 $h(x)$ 是奇函数, $(0,0)$ 是 $h(x)$ 的对称中心, 将 $h(x)$ 的图象向下平移 2 个单位得到 $f(x)$ 的图象, 所以点 $(0,-2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心, 故 C 正确; 对于 D, 设切点为 (x_0,y_0), $f'(x)=3x^2-2$, 则切线的斜率为 $3x_0^2-2$, 切线的方程为 $y-x_0^3+2x_0+2=(3x_0^2-2)(x-x_0)$, 代入 $(-1,0)$, 可得 $-x_0^3+2x_0+2=(3x_0^2-2)(-1-x_0)$, 整理并解得 $x_0=0$ 或 $x_0=-\frac{3}{2}$, 则过点 $(-1,0)$ 的切线有两条, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. CD　当 $x<-\pi$ 时, $x+\pi<0$, $\operatorname{sgn}(x+\pi)=-1$, $f(x)=-\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, 当 $x=-\pi$ 时, $x+\pi=0$, $\operatorname{sgn}(x+\pi)=0$, $f(x)=\cos 0=1$, 当 $x>-\pi$ 时, $x+\pi>0$, $\operatorname{sgn}(x+\pi)=1$, $f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, 即 $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), x<-\pi,\\ 1, x=-\pi,\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), x>-\pi,\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的部分图象, 如图所示.



由图可知, $f(x)$ 不是周期函数, 故 A 错误; 由图可知, $f(x)$ 在 $\left[-2\pi,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{2},1]$, 故 B 错误; 由图可知, $f(x)$ 在 $\left[-\pi,-\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减, 故 C 正确; 令 $g(x)=2f(x)-1=0$, 得 $f(x)=\frac{1}{2}$, 由图可知, 在 $[-3\pi,2\pi]$ 上, $f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}$ 只有 5 个交点, 所以 $g(x)=2f(x)-1$ 在 $[-3\pi,2\pi]$ 上有 5 个零点, 故 D 正确. 故选 CD.

13. 2　因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2=2$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{2\times\frac{1}{2}}=2$.

14. $\frac{13}{4}$　因为 $\tan\frac{\alpha}{2}=2$，则 $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$，则 $\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{3\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{3\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}{2\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{3\times2^2+1}{2\times2}=\frac{13}{4}$.

15. 8　$x^2+\frac{4}{y(x-y)}\geqslant x^2+\frac{4}{\left[\frac{y+(x-y)}{2}\right]^2}=x^2+\frac{16}{x^2}$，当且仅当 $y=x-y$，即 $x=2y$ 时，等号成立，又 $x^2+\frac{16}{x^2}\geqslant2\sqrt{x^2\times\frac{16}{x^2}}=8$，当且仅当 $x^2=\frac{16}{x^2}$，即 $x=2$ 时，等号成立. 综上所述，当 $x=2y=2$ 时，$x^2+\frac{4}{y(x-y)}$ 取得最小值 8.

16. $\frac{\sqrt{15}}{7}$　因为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $c=\frac{1}{2}a$，又因为 $AN\parallel MF_2$，即 $\triangle AF_1N\backsim\triangle F_2F_1M$，则 $\frac{|AN|}{|MF_2|}=\frac{|NF_1|}{|MF_1|}=\frac{|AF_1|}{|F_1F_2|}=\frac{a-c}{2c}=\frac{a-\frac{1}{2}a}{a}=\frac{1}{2}$，可得 $|AN|=\frac{1}{2}|MF_2|$，$|NF_1|=\frac{1}{2}|MF_1|$，所以 $|AN|+|NF_1|=\frac{1}{2}(|MF_1|+|MF_2|)=a$①，又因为 $|AN|+|NF_2|+a+c=\frac{19}{6}a$，可得 $|AN|+|NF_2|=\frac{5}{3}a$②，又因为 $|NF_1|+|NF_2|=2a$③，由①②③知 $|AN|=\frac{a}{3}$，$|NF_1|=\frac{2a}{3}$. 在 $\triangle AF_1N$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle AF_1N=\frac{\frac{1}{4}a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{1}{9}a^2}{2\times\frac{1}{2}a\times\frac{2}{3}a}=\frac{7}{8}>0$，可得 $\angle AF_1N$ 为锐角，则 $\sin\angle AF_1N=\sqrt{1-\cos^2\angle AF_1N}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，所以 $\tan\angle AF_1N=\frac{\sin\angle AF_1N}{\cos\angle AF_1N}=\frac{\sqrt{15}}{7}$，即直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{7}$.

17. 解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $S_4=S_5$，

所以 $a_5=0$，则 $a_1=-4d$. ① ………………………………………… 1分

又因为 $a_8-3a_3=18$，

所以 $a_1+7d-3(a_1+2d)=18$，得 $-2a_1+d=18$，② ………………………… 2分

联立①②，解得 $a_1=-8$，$d=2$，

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=-8+(n-1)\times2=2n-10$. ………………… 5分

(2)由(1)知 $S_n=-8n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-9n$, …………………………………………………………… 6 分

所以$\frac{S_n}{a_n}<1$,即为$\frac{n^2-9n}{2n-10}<1$,

当 $n<5$ 时,$n^2-9n>2n-10$,解得 $n>10$(舍)或 $n<1$(舍); …………………………………………… 8 分

当 $n>5$ 时,$n^2-9n<2n-10$,解得 $1<n<10$,所以 $5<n<10$,

所以满足条件的 n 的取值集合为$\{6,7,8,9\}$. …………………………………………………………………… 10 分

18. 解:(1)根据频率分布直方图中所有小矩形面积之和为 1,

可列等式为$(0.000\ 2+0.001\ 3+0.001\ 6+0.003\ 2+0.003\ 4+a)\times 100=1$,

所以 $a=0.000\ 3$. ……………………………………………………………………………………………… 3 分

(2)样本中停车时长在区间$(300,500]$内的频率为$(0.001\ 6+0.000\ 3)\times 100=0.19$,………………… 5 分

所以估计该天停车时长在区间$(300,500]$内的车辆数是 $500\times 0.19=95$. ……………………………… 7 分

(3)设免费停车时间长不超过 y 分钟,又因为$(0,100]$的频率为 $0.13<30\%$,并且$(0,200]$的频率为 $0.45>30\%$,所以 y 位于$(100,200]$之间, ……………………………………………………………………………… 9 分

则 $0.13+(y-100)\times 0.003\ 2=0.3$,所以 $y\approx 153$,

所以确定免费停车时长为 153 分钟. …………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)因为 $a(\sin A-\sqrt{2}\sin B)=c\sin C-b\sin B$,

所以由正弦定理得 $a^2-c^2+b^2=\sqrt{2}ab$,……………………………………………………………………… 2 分

所以由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, …………………………………………………… 4 分

又因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $AD=CD$,所以$\angle ACD=A$,$\angle BCD=\frac{\pi}{4}-A$,$B=\frac{3\pi}{4}-A$. …………………………………… 6 分

在$\triangle BCD$ 中,由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin B}$,即$\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}=\frac{2BD}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)}$, ……………………… 8 分

化简得$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin A$,即 $\tan A=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

所以 $\tan B=\tan\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)=\frac{\tan\frac{3\pi}{4}-\tan A}{1+\tan\frac{3\pi}{4}\tan A}=\frac{-1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=-2$. …………………………………………… 12 分

20. (1)证明:在正方形 $ABCD$ 中,$CD\perp AD$,

又侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$,侧面 $PAD\cap$底面 $ABCD=AD$,$CD\subset$平面 $ABCD$,

所以 $CD\perp$平面 PAD, ………………………………………………………………………………………… 2 分

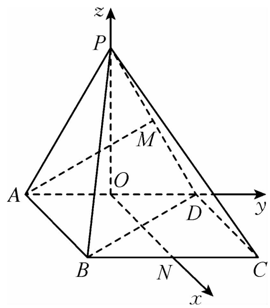
又 $AM\subset$平面 PAD,所以 $CD\perp AM$, ………………………………………………………………………… 3 分

因为$\triangle PAD$ 是正三角形,M 是 PD 的中点,所以 $AM\perp PD$, ………………………………………………… 4 分

又 $CD\cap PD=D$，$CD,PD\subset$平面 PCD，

所以 $AM\perp$平面 PCD. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)解：取 AD 中点为 O，BC 中点为 N，连接 OP，ON，建立如图所示的空间直角坐标系，不妨设 $AD=2$，



则 $A(0,-1,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$B(2,-1,0)$，$M\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{PD}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$. ……………………………… 7 分

设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则

由$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{m}=y-\sqrt{3}z=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{m}=-2x+2y=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}y=\sqrt{3}z,\\ y=x,\end{cases}$

取 $z=1$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$，………………………………………………………………… 9 分

由(1)知平面 PCD 的一个法向量为$\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，……………………………………………… 10 分

设平面 BPD 与平面 PCD 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{AM}|\,|\boldsymbol{m}|}=\frac{\left|\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(\sqrt{3},\sqrt{3},1)\right|}{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

所以平面 BPD 与平面 PCD 夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ……………………………………………… 12 分

21. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2m}{(x+1)^2}$，……………………………… 1 分

当 $m=0$ 时，$f(x)=0$ 无单调性；…………………………………………………………………… 2 分

当 $m>0$ 时，$f'(x)>0$ 对任意 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$，无单调递减区间；…………………………………………………… 3 分

当 $m<0$ 时，$f'(x)<0$ 对任意 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$，无单调递增区间. ………………………………………………… 4 分

(2)不等式 $f(x)>\ln x$，即$\frac{m(x-1)}{x+1}>\ln x$，则 $\ln x-\frac{m(x-1)}{x+1}<0$.

设 $h(x)=\ln x-\frac{m(x-1)}{x+1}$，$x\in(1,+\infty)$，依题意，存在 $x\in(1,+\infty)$，$h(x)<0$，……………… 5 分

而 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2m}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2(1-m)x+1}{x(x+1)^2}$，$h(1)=0$，

当 $m\leqslant 0$ 时，$h(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，不满足题意；…………………………………… 6 分

当 $0<m\leqslant 2$ 时，方程 $x^2+2(1-m)x+1=0$ 的判别式 $\Delta=4(1-m)^2-4=4m(m-2)\leqslant 0$，

即 $h'(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$h(x)>h(1)=0$，$h(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，不满足题意；………………………………… 8 分

当 $m>2$ 时，令 $h'(x)=0$，得 $x_1=m-1-\sqrt{(m-1)^2-1}$，$x_2=m-1+\sqrt{(m-1)^2-1}$，

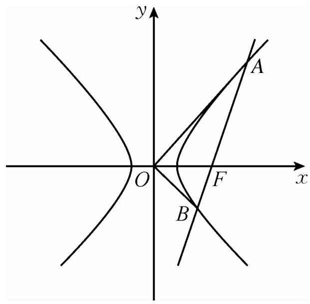
由 $x_2>1$ 和 $x_1x_2=1$，得 $0<x_1<1<x_2$，则当 $x\in(1,x_2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(1,x_2)$ 上单调递减，

此时 $h(x)<h(1)=0$，

因此，当 $m\in(2,+\infty)$ 时，存在 $x\in(1,+\infty)$，使得不等式 $h(x)<0$ 成立， ………………………………… 11 分

所以满足题意的 m 的取值范围为 $(2,+\infty)$． ……………………………………………………………………… 12 分

22．解：(1)若 $b<\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $a^2+b^2=1$，所以 $b^2<\frac{1}{2}$，



则 $a^2=1-b^2>\frac{1}{2}$，所以 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………………………………… 2 分

则 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{a}<\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$， ………………………………………… 3 分

又 $e>1$，所以 C 的离心率的取值范围是 $(1,\sqrt{2})$． ………………………………… 4 分

(2)因为 $F(1,0)$，直线 l 的斜率不为零，所以可设其方程为 $x=my+1$．

结合 $b^2=1-a^2\ (0<a<1)$，

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{1-a^2}=1,\end{cases}$ 得 $[a^2(m^2+1)-m^2]y^2+2m(a^2-1)y-(a^2-1)^2=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由韦达定理，得 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-2m(a^2-1)}{a^2(m^2+1)-m^2},\\ y_1y_2=\frac{-(a^2-1)^2}{a^2(m^2+1)-m^2},\end{cases}$ ………………………………… 6 分

由于 A，B 两点均在 C 的右支上，

故 $y_1y_2<0\Rightarrow a^2(m^2+1)-m^2>0$，即 $m^2<\frac{a^2}{1-a^2}$． …………………………………………………………… 7 分

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(my_1+1)(my_2+1)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+m(y_1+y_2)+1$

$=(m^2+1)\cdot\frac{-(a^2-1)^2}{a^2(m^2+1)-m^2}+m\cdot\frac{-2m(a^2-1)}{a^2(m^2+1)-m^2}+1$

$=\frac{m^2a^2(1-a^2)-a^4+3a^2-1}{a^2(m^2+1)-m^2}$． ………………………………………………………………………………… 9 分

由 $\angle AOB$ 恒为锐角，得对 $\forall m^2<\frac{a^2}{1-a^2}$，均有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，

即 $m^2a^2(1-a^2)-a^4+3a^2-1>0$ 恒成立． ……………………………………………………………… 10 分

由于 $a^2(1-a^2)>0$，因此不等号左边是关于 m^2 的增函数，

所以只需 $m^2=0$ 时，$-a^4+3a^2-1>0$ 成立即可，解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，

结合 $0<a<1$，可知 a 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$． ………………………………………………… 11 分

综上所述，C 的实轴长的取值范围是 $(\sqrt{5}-1,2)$． ………………………………………………………… 12 分