数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分，考试用时 120 分钟.

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x|y=\ln(1-x)\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x-1}{x}\leqslant 0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0\leqslant x<1\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

2. 若 $x\in\mathbf{R}$，则“$x>0$”是“$\frac{x^2+1}{x}\geqslant 2$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

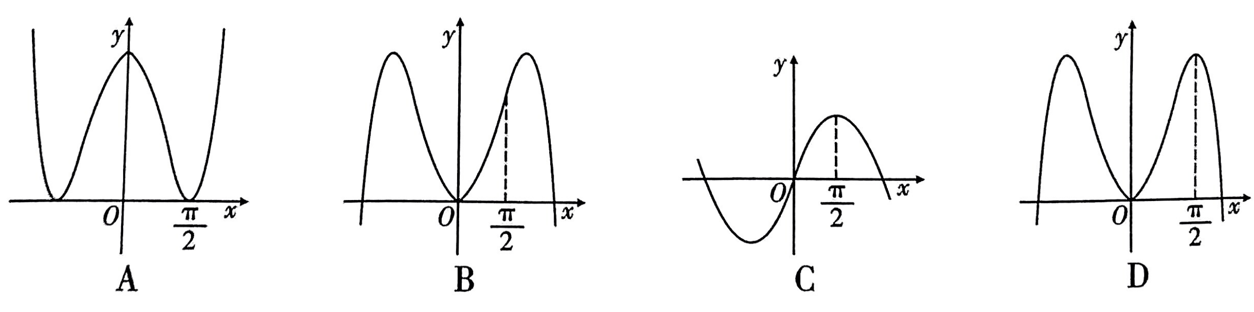
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 若随机变量 $X\sim N(10, 2^2)$，则下列选项错误的是

A. $P(X\geqslant 10)=0.5$　　B. $P(X\leqslant 8)+P(X\leqslant 12)=1$

C. $P(8\leqslant X\leqslant 12)=2P(8\leqslant X\leqslant 10)$　　D. $D(2X+1)=8$

4. 函数 $f(x)=\frac{(x^2+1)\sin|x|}{e^2}$ 的图象大致为



5. 若函数 $f(x)=ax^2+2(a-1)x+2$ 在 $(-\infty, 4)$ 上为减函数，则 a 的取值范围为

A. $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$　　B. $\left(0, \frac{1}{5}\right]$　　C. $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right]$　　D. $\left[0, \frac{1}{5}\right]$

6. 若过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点作双曲线的一条渐近线的垂线，垂线交$y$轴于点$(0,3c)$（$c$为双曲线的半焦距），则此双曲线的离心率是

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　D. $\sqrt{10}$

7. 若$2^a+\log_2 a<2^{2b}+\log_2 b+1$，则

A. $\ln(2b-a+1)>0$　　B. $\ln(2b-a+1)<0$

C. $\ln|a-2b|>0$　　D. $\ln|a-2b|<0$

8. 已知可导函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，若对任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$f'(x)-f(x)<1$，且$f(0)=2022$，则不等式$f(x)+1>2023e^x$的解集为

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　D. $(-\infty,1)$

二、**多项选择题**（本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多个选项是符合题目要求的，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分）

9. 甲罐中有5个红球，2个白球和3个黑球，乙罐中有4个红球，3个白球和3个黑球. 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别以A_1，A_2和A_3表示从甲罐取出的球是红球、白球、黑球，再从乙罐中随机取出一球，以B表示从乙罐取出的球是红球. 则下列结论中正确的是

A. $P(B)=\frac{2}{5}$　　B. $P(B|A_2)=\frac{4}{11}$

C. 事件B与事件A_1相互独立　　D. A_1，A_2，A_3两两互斥

10. 提丢斯·波得定律是关于太阳系中行星轨道的一个简单的几何学规则，它是在1766年由德国的一位中学老师戴维斯·提丢斯发现的，后来被柏林天文台的台长波得归纳成一条定律，即数列$\{a_n\}$：0.4，0.7，1，1.6，2.8，5.2，10，19.6…表示的是太阳系第n颗行星与太阳的平均距离（以天文单位AU为单位）. 现将数列$\{a_n\}$的各项乘以10后再减4，得到数列$\{b_n\}$，可以发现数列$\{b_n\}$从第3项起，每项是前一项的2倍，则下列说法正确的是

A. 数列$\{b_n\}$的第2023项为3×2^{2023}

B. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=0.3\times2^{n-2}+0.4$

C. 数列$\{a_n\}$的前10项和为157.3

D. 数列$\{nb_n\}$的前n项和$T_n=3(n-1)\cdot2^{n-1}$

11. 定义在$(-1,\ 1)$上的函数$f(x)$满足$f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)$，且当$x\in(-1,\ 0)$时，$f(x)<0$，则下列说法正确的有

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$为奇函数

C. $f(x)$为增函数

D. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{2}{3}\right)<f\left(\dfrac{7}{9}\right)$

12. 双曲线具有如下光学性质：如图1，F_1，F_2是双曲线的左、右焦点，从F_2发出的光线m射在双曲线右支上一点P，经点P反射后，反射光线的反向延长线过F_1；当P异于双曲线顶点时，双曲线在点P处的切线平分$\angle F_1PF_2$. 若双曲线C的方程为$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$，则下列结论正确的是

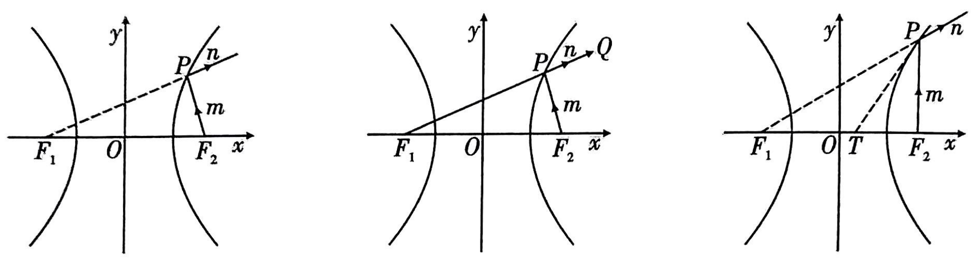


图1

A. 射线n所在直线的斜率为k，则$|k|\in\left[0,\ \dfrac{3}{4}\right)$

B. 当$m\perp n$时，$|PF_1|\cdot|PF_2|=36$

C. 当n过点$Q(7,\ 5)$时，光线由F_2到P再到Q所经过的路程为5

D. 若点T坐标为$(1,\ 0)$，直线PT与C相切，则$|PF_2|=16$

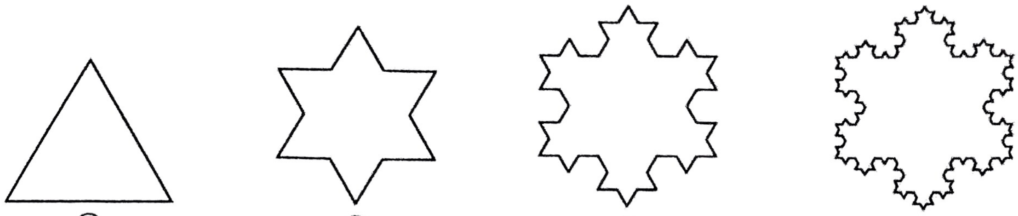
三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. $(x-2y+1)^6$展开式中含x^2y^3项的系数为________.

14. 已知函数$y=\log_a(4x-1)+2(a>0$且$a\neq1)$过定点P，且定点P在直线l：$ax+by-3=0(b>0)$上，则$\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{4b}$的最小值为________.

15. 已知函数$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{4}(m-1)x^2-x+1$有两个极值点，则实数$m$的取值范围为________.

16. “雪花曲线”是瑞典数学家科赫在 1904 年研究的一种分形曲线. 如图 2 是“雪花曲线”的一种形成过程：从一个正三角形开始，把每条边分成三等份，然后以各边的中间一段为底边分别向外作正三角形，再去掉底边，重复进行这一过程.



①　②　③　④

图 2

如图，若第 1 个图中三角形的边长为 1，则第 3 个图形的周长为________；第 n 个图形的面积为________.

四、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=\dfrac{1}{3}$，且满足 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2-a_n}$.

（1）求证：数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$ 为等比数列；

（2）若 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2024$，求满足条件的最大整数 n.

18.（本小题满分 12 分）

某网红冰淇淋公司计划在贵阳市某区开设分店，为了确定在该区开设分店的个数，该公司对该市已开设分店的 5 个区域的数据作了初步处理后得到下列表格，记 x 表示在 5 个区域开设分店的个数，y 表示这 x 个分店的年收入之和.

x(个)	1	2	3	4	5
y(千万元)	1	1.6	2	2.4	3

（1）该公司经过初步判断，可用经验回归模型拟合 y 与 x 的关系，求 y 关于 x 的经验回归方程；

（2）如果该公司最终决定在该区选择两个合适的地段各开设一个分店，根据市场调查得到如下统计数据：第一分店每天的顾客平均为 300 人，其中 180 人会购买该品牌冰淇淋，第二分店每天的顾客平均为 200 人，其中 150 人会购买该品牌冰淇淋. 依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析两个店的顾客购买率有无差异.

附：

α	0.010	0.005	0.001
x_α	6.635	7.879	10.828

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

19. （本小题满分 12 分）

如图 3，已知圆柱的轴截面 $ABCD$ 为正方形，E，F 为圆弧 AB 上的两个三等分点，EH，FG 为母线，P，Q 分别为线段 AD，FG 上的动点（与端点不重合），经过 C，P，Q 的平面 α 与线段 EH 交于点 M.

（1）证明：$CP/\!/MQ$；

（2）当 $AP=GQ$ 时，求平面 α 与圆柱底面 O 所成夹角的正弦值的最小值.

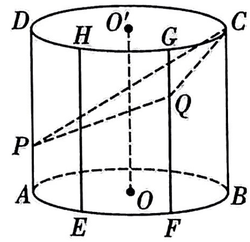


图 3

20. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2x^3-3x$.

（1）求函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

（2）若过点 $P(-1,\ t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，求 t 的取值范围；

（3）请问过点 $A(0,\ 0)$，$B(-1,\ -1)$，$C(-1,\ 3)$，$D(1,\ -1)$，$E(1,\ -2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切？（请直接写出结论，不需要证明）

21.（本小题满分 12 分）

马尔科夫链是概率统计中的一个重要模型，因俄国数学家安德烈·马尔科夫得名，其过程具备“无记忆”的性质，即第 $n+1$ 次状态的概率分布只跟第 n 次的状态有关，与第 $n-1$，$n-2$，$n-3$，…次状态无关，即 $P(X_{n+1}|\cdots，X_{n-2}，X_{n-1}，X_n)=P(X_{n+1}|X_n)$．已知甲盒子中装有 2 个黑球和 1 个白球，乙盒子中装有 2 个白球，现从甲、乙两个盒子中各任取一个球交换放入另一个盒子中，重复 n 次这样的操作．记甲盒子中黑球个数为 X_n，恰有 2 个黑球的概率为 a_n，恰有 1 个黑球的概率为 b_n．

（1）求 a_1，b_1 和 a_2，b_2；

（2）证明：$\left\{2a_n+b_n-\dfrac{6}{5}\right\}$为等比数列（$n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$）；

（3）求 X_n 的期望（用 n 表示，$n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$）．

22.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$，过焦点的直线 l 与抛物线 C 交于两点 A，B，当直线 l 的倾斜角为$\dfrac{\pi}{6}$时，$|AB|=16$．

（1）求抛物线 C 的标准方程和准线方程；

（2）记 O 为坐标原点，直线 $x=-2$ 分别与直线 OA，OB 交于点 M，N，求证：以 MN 为直径的圆过定点，并求出定点坐标．