思南中学2023——2024学年度高三第一学期第二次月考

数学科试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合$A=\{x|-2\le x<1\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{-2,-1,0\}$

C. $\{-1,0\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. 已知$z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$，则$z=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　　B. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

C. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x+1, x<0\\ f(x-2), x\ge 0\end{cases}$，则$f(1)=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 已知向量$\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(3,2)$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $5\sqrt{2}$　　D. 50

5. 学校运动会需要从5名男生和2名女生中选取4名志愿者，则选出的志愿者中至少有一名女生的不同选法的种数是（　　）

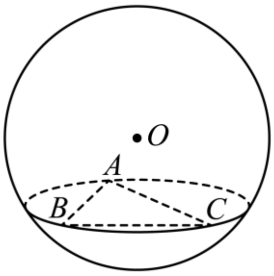
A. 20　　B. 30　　C. 35　　D. 40

6. 已知$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，且$\alpha$和$\beta$均为钝角，则$\alpha+\beta$的值为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{5\pi}{4}$　　C. $\dfrac{5\pi}{4}$或$\dfrac{7\pi}{4}$　　D. $\dfrac{7\pi}{4}$

7. 如图，球面上有A、B、C三点，$\angle ABC=90^\circ$，$BA=BC=3$，球心O到平面ABC的距离是$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，则球O

的体积是（　　）



A　72π　　B. 36π　　C. 18π　　D. 8π

8. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0,\\ \left|\lg x\right|, & x>0,\end{cases}$ 若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-b$ 有四个不同的零点，则实数 b 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,1\right]$　　B. $\left[0,1\right]$　　C. $\left(0,1\right)$　　D. $\left(1,+\infty\right)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$,则（　　）

A. $f\left(x\right)$是偶函数　　B. $f\left(x\right)$的最小正周期是π

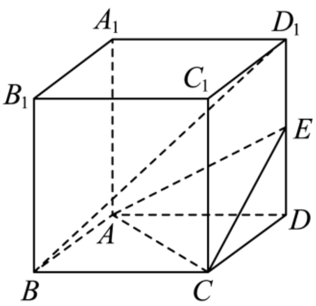
C. $f\left(x\right)$图象　一个对称中心是$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$　　D. $f\left(x\right)$上$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$单调递增

10. 已知方程$\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$表示的曲线为 C，则下列四个结论中正确的是（　　）

A. 当$1<t<4$时，曲线 C 是椭圆　　B. 当$t>4$或$t<1$时，曲线 C 是双曲线

C. 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，则$1<t<\dfrac{5}{2}$　　D. 若曲线 C 是焦点在 y 轴上的双曲线，则$t>4$

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 DD_1 的中点（　　）



A. $BD_1//$平面 ACE

B. $BD_1\perp AB_1$

C. 若正方体的棱长为1，则点 D 到平面 ACE 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

D. 若正方体的棱长为1，则直线 BD_1 与 CE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

12. 若 x，y 满足 $x^2+y^2+xy=1$，则（　　）.

A. $x+y\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $x+y\ge-1$

C. $x^2+y^2\le\frac{3}{2}$

D. $x^2+y^2\ge\frac{2}{3}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\lg 2-\lg\frac{1}{4}+3\lg 5-\log_3 2\times\log_4 9=$__________.

14. 曲线 $y=\frac{x}{x-1}$ 在点 $P\left(2,2\right)$ 处　切线方程为_________.

15. 在直线 $y=x+3$ 上任取一点 P 作圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的切线，切点为 Q，则切线段 $\left|\overline{PQ}\right|$ 的最小值为____________.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 $P(3c,0)$ 作直线 l 交椭圆 C 于 M,N 两点，若 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{NM}$，$\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=4\left|\overrightarrow{F_2N}\right|$ 则椭圆 C 的离心率为___________.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 在递增的等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_1\cdot a_2=8$，$a_1+a_2=6$，其中 $n\in\mathrm{N}^*$.

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=2a_n+3$，求数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C　对边分别为 a,b,c，设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

（1）求A；

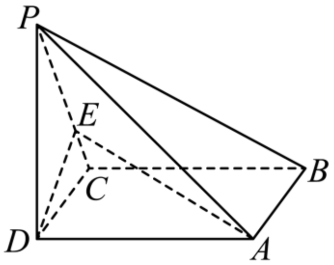
（2）若 $b+c=4,\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 a 的值.

19. 学校组织的亚运会知识竞赛，设初赛、复赛、决赛三轮比赛，经过前两轮比赛，甲、乙两人进入冠亚军决赛，获胜者获得冠军，失败者获得亚军．本轮比赛设置5道抢答题目，甲与乙抢到题目的机会均等，先抢到题目者回答问题，回答正确得10分，回答错误或者不回答得0分，对方得10分，先得30分者获胜，比赛结束．已知甲与乙每题回答正确的概率分别为 $0.8,0.6$.

（1）在第一题的抢答中，记甲的得分为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）求乙获得冠军的概率（精确到 0.001）.

20. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$AD=PD=2, CD=1, PC=\sqrt{5}$，点 E 为棱 PC 上的点，且 $BC\perp DE$.



（1）证明：$AD\perp PD$；

（2）若 $\dfrac{PE}{CE}=2$，求直线 DE 与平面 PBC 所成角的正弦值.

21. 已知抛物线 $C: y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 $F\left(1,0\right)$，点 M 在直线 $x=-2$ 上运动，直线 l_1，l_2 经过点 M，且与 C 分别相切于 A, B 两点.

（1）求 C 的方程；

（2）试问直线 AB 否过定点？若是，求出该定点坐标；若不是，请说明理由.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性.

（2）若有两个不相等的实数 a, b 满足 $f\left(a\right)=f\left(b\right)$，求证：$a+b<1$.