思南中学2023——2024学年度高三第一学期第二次月考

数学科试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合$A=\{x|-2\le x<1\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{-2,-1,0\}$

C. $\{-1,0\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

【答案】B

【详解】因为$A=\{x|-2\le x<1\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，

所以$A\cap B=\{-2,-1,0\}$，

故选：B

2. 已知$z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$，则$z=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　　B. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

C. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

【答案】B

【详解】由题意可得：$z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\mathrm{i}}{2}$.

故选：B.

3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x+1,x<0\\f(x-2),x\ge 0\end{cases}$，则$f(1)=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】A

【详解】因为$f(x)=\begin{cases}x+1,x<0\\f(x-2),x\ge 0\end{cases}$，

所以 $f(1)=f(1-2)=f(-1)=-1+1=0,$

故选：A.

4. 已知向量 $\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(3,2)$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $5\sqrt{2}$

D. 50

【答案】A

【详解】由已知，$\vec{a}-\vec{b}=(2,3)-(3,2)=(-1,1)$，

所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，

故选 A

5. 学校运动会需要从 5 名男生和 2 名女生中选取 4 名志愿者，则选出的志愿者中至少有一名女生的不同选法的种数是（　　）

A. 20　　B. 30　　C. 35　　D. 40

【答案】B

【详解】选出的志愿者中，1 个女生 3 个男生时，方法数有 $C_2^1C_5^3=20$ 种，

2 个女生 2 个男生时，方法数有 $C_2^2C_5^2=10$ 种，

所以不同选法有 $20+10=30$ 种.

故选：B

6. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，且 α 和 β 均为钝角，则 $\alpha+\beta$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{5\pi}{4}$　　C. $\dfrac{5\pi}{4}$ 或 $\dfrac{7\pi}{4}$　　D. $\dfrac{7\pi}{4}$

【答案】D

【详解】∵ α 和 β 均为钝角，

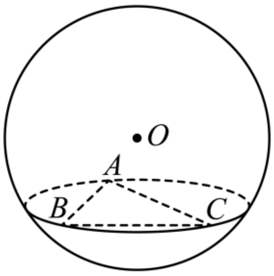
$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由 α 和 β 均为钝角，得 $\pi<\alpha+\beta<2\pi$，$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{7\pi}{4}$.

故选：D

7. 如图，球面上有 A 、B 、C 三点，$\angle ABC=90^{\circ}$，$BA=BC=3$，球心 O 到平面 ABC 的距离是 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，则球 O 的体积是（　　）



A. 72π　　　　B. 36π　　　　C. 18π　　　　D. 8π

【答案】B

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$BA=BC=3$，

则 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $2r=AC=\sqrt{BA^2+BC^2}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$，所以，$r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

因此，球心 O 到平面 ABC　距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以，球 O 的半径为 $R=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3$，

因此，球 O 的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times 3^3=36\pi$.

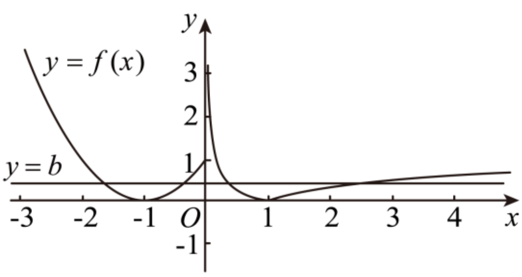
故选：B.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0,\\ |\lg x|, & x>0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-b$ 有四个不同的零点，则实数 b 的取值范围为（　　）

A. $(0,1]$　　　　B. $[0,1]$　　　　C. $(0,1)$　　　　D. $(1,+\infty)$

【答案】A

【详解】



依题意，函数 $g(x)=f(x)-b$ 有四个不同的零点，即 $f(x)=b$ 有四个解，

转化为函数 $y=f(x)$ 与 $y=b$ 图象由四个交点，

由函数函数 $y=f\left(x\right)$ 可知，

当 $x\in\left(-\infty,-1\right)$ 时，函数为单调递减函数， $y\in\left[0,+\infty\right)$；

当 $x\in\left(-1,0\right]$ 时，函数为单调递增函数， $y\in\left(0,1\right]$；

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，函数为单调递减函数， $y\in\left(0,+\infty\right)$；

当 $x\in\left[1,+\infty\right)$ 时，函数为单调递增函数， $y\in\left[0,+\infty\right)$；

结合图象，可知实数 b 的取值范围为 $\left(0,1\right]$.

故选：A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x$,则（　　）

A. $f\left(x\right)$ 是偶函数

B. $f\left(x\right)$ 的最小正周期是 π

C. $f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$

D. $f\left(x\right)$ 上 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 单调递增

【答案】ABC

【详解】因为 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$,定义域为 R ,

$f\left(-x\right)=\cos\left(-2x\right)=\cos 2x=f\left(x\right)$,所以 $f\left(x\right)$ 是偶函数,故 A 正确;

$f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$,故 B 正确;

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$,所以 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心,故 C 正确;

令 $-\pi+2k\pi\le 2x\le 2k\pi,k\in\mathrm{Z}$,

解得 $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\le x\le k\pi,k\in\mathrm{Z}$,

即 $f\left(x\right)$　单调递增区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right],k\in\mathrm{Z}$,故 D 错误.

故选:ABC.

10. 已知方程 $\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$ 表示的曲线为 C，则下列四个结论中正确的是（　　）

A. 当 $1<t<4$ 时，曲线 C 是椭圆

B. 当 $t>4$ 或 $t<1$ 时，曲线 C 是双曲线

C. 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，则 $1<t<\dfrac{5}{2}$

D. 若曲线 C 是焦点在 y 轴上的双曲线，则 $t>4$

【答案】BCD

【详解】对于 A，当$t=\frac{5}{2}$时，$4-t=\frac{3}{2}=t-1$，则曲线C是圆，A 错误；

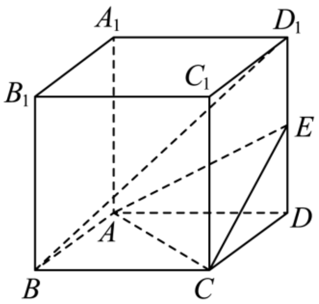
对于 B，当$t>4$或$t<1$时，$(4-t)(t-1)<0$，曲线C是双曲线，B 正确；

对于 C，若曲线C是焦点在x轴上的椭圆，则$4-t>t-1>0$，解得$1<t<\frac{5}{2}$，C 正确；

对于 D，若曲线C是焦点在y轴上的双曲线，则$4-t<0<t-1$，解得$t>4$，D 正确.

故选：BCD

11. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为DD_1的中点（　　）



A. BD_1 // 平面ACE

B. $BD_1 \perp AB_1$

C. 若正方体的棱长为 1，则点D到平面ACE的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}$

D. 若正方体的棱长为 1，则直线BD_1与CE所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】ABC

【详解】对于 A 项，连接BD交AC于O点，连接OE，

易知OE为$\triangle BDD_1$的中位线，

即$OE \parallel BD_1$，$\because OE \subset$面ACE，$BD_1 \not\subset$面ACE，

$\therefore BD_1 \parallel$平面$ACE$，故 A 正确；

对于 B 项，连接AB_1、A_1B，由正方体的性质易知$\begin{cases} A_1D_1 \perp AB_1 \\ A_1B \perp AB_1 \end{cases}$，

又$A_1B \cap A_1D_1 = A_1, A_1B$、$A_1D_1 \subset$面$BA_1D_1$，$\therefore AB_1 \perp$面$BA_1D_1$，

而$BD_1 \subset$面BA_1D_1，则$BD_1 \perp AB_1$，故 B 正确；

对于 C 项，由正方体的性质知：

点B到平面ACE的距离等于点D到平面ACE的距离，

设该距离为d，若正方体棱长为 1，

则 $AC=\sqrt{2}$，$AE=EC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow S_{\triangle ACE}=\dfrac{1}{2}\times AC\times\sqrt{AE^2-\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

$$V_{D-ACE}=V_{E-ADC}\Rightarrow\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle ACE}=\frac{1}{3}DE\cdot S_{\triangle ACD}\Rightarrow d=\frac{\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{6},$$

故 C 正确；

对于 D 项，取 AA_1 中点 P，连接 PE,BP,PD_1，

又 E 为 DD_1 的中点，由正方体的性质知：$PE//BC,PE=BC$，

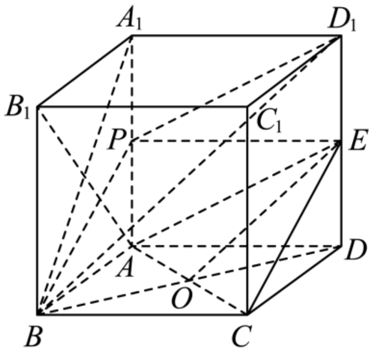
则四边形 $PECB$ 为平行四边形，则 $BP//CE$，

则直线 BD_1 与 CE 所成角为 $\angle PBD_1$ 或其补角.

$\triangle PBD_1$ 中，$PB=PD_1=\dfrac{\sqrt{5}}{2},BD_1=\sqrt{3}$，

则 $\cos\angle PBD_1=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

则直线 BD_1 与 CE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，故 D 错误.



故选：ABC

12. 若 x，y 满足 $x^2+y^2+xy=1$，则（　　）.

A. $x+y\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　B. $x+y\ge-1$

C. $x^2+y^2\le\dfrac{3}{2}$　　　　D. $x^2+y^2\ge\dfrac{2}{3}$

【答案】AD

【详解】因为 $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$（$a,b\in\mathbf{R}$），由 $x^2+y^2+xy=1$ 可变形为，

$(x+y)^2-1=xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\le x+y\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $x=y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$x+y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $x=y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$x+y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 A 正确，B 错误；

由 $x^2+y^2+xy=1$ 可变形为 $(x^2+y^2)-1=-xy\ge-\frac{x^2+y^2}{2}$，解得 $x^2+y^2\ge\frac{2}{3}$，

当且仅当 $x=y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，故 D 正确；

因为 $x^2+y^2+xy=1$ 变形可得 $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=1$，

设 $x+\frac{y}{2}=\cos\theta,\frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta$，所以 $x=\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta,y=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$，

因此 $x^2+y^2=\cos^2\theta+\frac{5}{3}\sin^2\theta-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin2\theta-\frac{1}{3}\cos2\theta+\frac{1}{3}$

$=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{2}{3},2\right]$，所以当 $2\theta+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$ 时，即 $\theta=-\frac{\pi}{3}$ 时，

此时 $x=1,y=-1$，x^2+y^2 取到最大值 2，故 C 错误.

故选：AD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\lg2-\lg\frac{1}{4}+3\lg5-\log_3 2\times\log_4 9=$__________.

【答案】2

【详解】原式 $=\lg2+2\lg2+3\lg5-2\times\frac{1}{2}\times\log_3 2\times\log_2 3=3(\lg2+\lg5)-1=3\lg10-1=2$.

故答案为：2

14. 曲线 $y=\frac{x}{x-1}$ 在点 $P(2,2)$ 处的切线方程为_________.

【答案】$x+y-4=0$

【详解】$y=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$，则 $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$，所以 $y'|_{x=2}=-1$，所以点 $P(2,2)$ 处的切线方程为

$y-2=-1(x-2)$，即 $x+y-4=0$，

故答案为：$x+y-4=0$

15. 在直线 $y=x+3$ 上任取一点 P 作圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的切线，切点为 Q，则切线段 $|\overline{PQ}|$ 的最小值为

____________.

【答案】1

【详解】设 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的圆心为A，半径为 r，即 $A(2,3), r=1$，

因为点 P 在直线 $y=x+3$ 上，所以设 $P(x, x+3)$，

因为 PQ 是该圆的切线，且切点为 Q，

所以有 $PQ\perp AQ$，

因此有 $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{|PA|^2-|AQ|^2}=\sqrt{(x-2)^2+x^2-1}=\sqrt{2(x-1)^2+1}$，

当 $x=1$ 时，切线段 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的最小值为 1，

故答案为：1

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2，过点 $P(3c,0)$ 作直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点，若 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{NM}$，$|\overrightarrow{F_2M}|=4|\overrightarrow{F_2N}|$ 则椭圆 C 的离心率为____________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$##$\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$

【详解】因为 $|PM|=2|MN|$，$|PF_1|=2|PF_2|$，

所以 $F_2N /\!/ F_1M$，且 $|F_2N|=\dfrac{1}{2}|F_1M|$，

延长 MF_1 并延长交椭圆于点 Q，

则由对称性可设 $|F_1Q|=|F_2N|=t$，$|F_1M|=2t$，$|F_2M|=4t$，$|F_2Q|=2a-t$，

因为 $|F_1M|+|F_2M|=2a$，所以 $t=\dfrac{a}{3}$，

则 $|QM|=a$，$|F_2M|=\dfrac{4a}{3}$，$|F_2Q|=\dfrac{5a}{3}$，

得 $|QM|^2+|F_2M|^2=|F_2Q|^2$

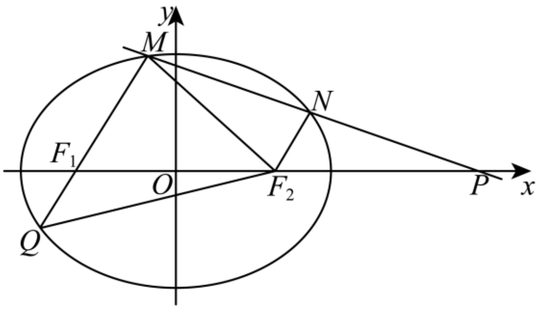
所以 $\angle QMF_2=90^\circ$，

在 $\triangle F_1MF_2$ 中，由 $|F_1M|^2+|F_2M|^2=|F_2F_1|^2$，得

$\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4a}{3}\right)^2=(2c)^2$，化简得 $5a^2=9c^2$，所以 $\sqrt{5}a=3c$，

所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17. 在递增的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1\cdot a_2=8$，$a_1+a_2=6$，其中$n\in \mathrm{N}^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=2a_n+3$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

【答案】（1）$a_n=2^n$；

（2）$T_n=2^{n+2}+3n-4$.

【小问 1 详解】

由$a_1\cdot a_2=8, a_1+a_2=6$，等比数列$\{a_n\}$　递增数列，得$a_1=2, a_2=4$，

因此数列$\{a_n\}$的公比$q=\dfrac{a_2}{a_1}=2$，则$a_n=a_1q^{n-1}=2^n$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2^n$.

【小问 2 详解】

由（1）得，$b_n=2a_n+3=2^{n+1}+3$，

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{4(1-2^n)}{1-2}+3n=2^{n+2}+3n-4.$$

18. 已知$\triangle ABC$内角A,B,C的对边分别为a,b,c，设$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

（1）求 A；

（2）若$b+c=4, \triangle ABC$的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求a的值.

【答案】（1）$A=\dfrac{\pi}{3}$

（2）$a=\sqrt{10}$

【小问 1 详解】

原式化简可得：$\sin^2 B-2\sin B\sin C+\sin^2 C=\sin^2 A-\sin B\sin C$，

整理得：$\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，

由正弦定理可得：$b^2+c^2-a^2=bc$，

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，因此三角形的内角 $A=\dfrac{\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore bc=2$，

$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc=16-6=10$，

$\therefore a=\sqrt{10}$.

19. 学校组织的亚运会知识竞赛，设初赛、复赛、决赛三轮比赛，经过前两轮比赛，甲、乙两人进入冠亚军决赛，获胜者获得冠军，失败者获得亚军．本轮比赛设置 5 道抢答题目，甲与乙抢到题目的机会均等，先抢到题目者回答问题，回答正确得 10 分，回答错误或者不回答得 0 分，对方得 10 分，先得 30 分者获胜，比赛结束．已知甲与乙每题回答正确的概率分别为 $0.8, 0.6$.

（1）在第一题的抢答中，记甲的得分为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）求乙获得冠军的概率（精确到 0.001）.

【答案】（1）分布列见解析；期望为 6

（2）0.317

【小问 1 详解】

设在第一题的抢答中，甲得分为 X，则 X 的可能取值为 0，10.

$P\left(X=0\right)=0.5\times\left(1-0.8\right)+0.5\times0.6=0.4$，

$P\left(X=10\right)=1-P\left(X=0\right)=1-0.4=0.6$，

所以 X 的分布列为

X	0	10
P	0.4	0.6

所以 $E\left(X\right)=0\times0.4+10\times0.6=6$.

【小问 2 详解】

由（1）可知，乙在一题的抢答中得 10 分的概率为 0.40.

设乙得 30 分甲得 0 分，乙得 30 分甲得 10 分，乙得 30 分甲得 20 分的概率分别为P_1, P_2, P_3.

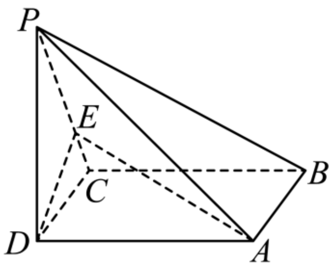
由（1）可知，$P_1 = 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.064$；

$P_2 = C_3^2 0.4^2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.1152$；

$P_3 = C_4^2 0.4^2 \times 0.6^2 \times 0.4 \approx 0.1382$，

所以乙获得冠军的概率为$P = P_1 + P_2 + P_3 \approx 0.317$.

20. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$AD = PD = 2, CD = 1, PC = \sqrt{5}$，点$E$为棱$PC$上的点，且$BC \perp DE$.



（1）证明：$AD \perp PD$；

（2）若$\dfrac{PE}{CE} = 2$，求直线DE与平面PBC所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

【小问 1 详解】

由$ABCD$为矩形可知：$BC \perp CD$，

又因为$BC \perp DE$，$DE \cap CD = D$，$CD, DE \subset$平面PCD，所以$BC \perp$面PCD，

又$AD \parallel BC$，所以$AD \perp$面PCD，

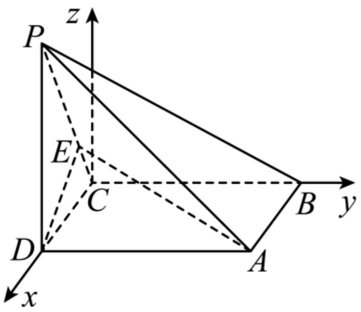
又$PD \subset$面PCD，故$AD \perp PD$.

【小问 2 详解】

在$\triangle PCD$中，$PC^2 = PD^2 + CD^2$，所以$PD \perp CD$；

又$PD \perp AD$，$CD \cap AD = D, CD, AD \subset$面$ABCD$，所以$PD \perp$面$ABCD$；

故如图以点C为坐标原点，建立空间直角坐标系.



则 $C(0,0,0), B(0,2,0), A(1,2,0), D(1,0,0)$， $P(1,0,2)$，

又在 $\triangle PCD$ 中，$\dfrac{PE}{CE}=2$，则 $E(\dfrac{1}{3},0,\dfrac{2}{3})$.

$\overrightarrow{DE}=(-\dfrac{2}{3},0,\dfrac{2}{3})$，$\overrightarrow{CP}=(1,0,2),\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$，

设面 PBC 法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y=0\\ x+2z=0\end{cases}$，故 $\vec{n}=(-2,0,1)$，

设直线 DE 与面 PBC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{DE},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

21. 已知抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 $F\left(1,0\right)$，点 M 在直线 $x=-2$ 上运动，直线 l_1，l_2 经过点 M，且与 C 分别相切于 A,B 两点.

（1）求 C 的方程;

（2）试问直线 AB 是否过定点？若是，求出该定点坐标；若不是，请说明理由.

【答案】（1） $y^2=4x$

（2）直线 AB 恒过定点，定点坐标为 $(2,0)$，

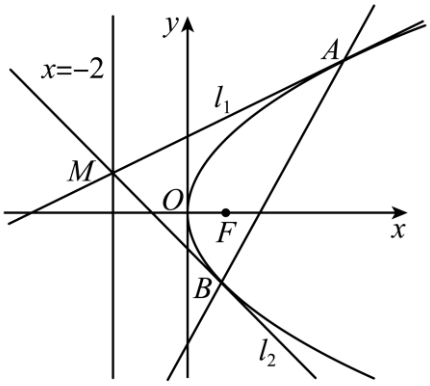
【小问 1 详解】

由题意得 $\dfrac{p}{2}=1$，解得 $p=2$，

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

【小问 2 详解】

直线 AB 恒过定点，定点坐标为 $(2,0)$，



由题意可知直线 AB 斜率不为 0，设直线 $AB: x=ty+m, A\left(x_1, y_1\right), B\left(x_2, y_2\right), M(-2, a)$，

联立 $\begin{cases}x=ty+m\\ y^2=4x\end{cases}$，得 $y^2-4ty-4m=0$，

则 $\Delta=16t^2+16m>0, y_1+y_2=4t, y_1y_2=-4m$，

由题意可知直线 l_1, l_2 斜率均存在，且不为 0，$y_1\neq 0, y_2\neq 0$，

设直线 $l_1: y=k\left(x-x_1\right)+y_1$，与 $y^2=4x$ 联立得 $ky^2-4y+4\left(y_1-kx_1\right)=0$，

则 $\Delta=16-16k\left(y_1-kx_1\right)=0$，又 $y_1^2=4x_1$，则 $k^2y_1^2-4ky_1+4=0$，解得 $k=\dfrac{2}{y_1}$，

所以直线 $l_1: y=\dfrac{2}{y_1}\left(x-x_1\right)+y_1$，即 $yy_1=2\left(x+x_1\right)$，

同理直线 $l_2: yy_2=2\left(x+x_2\right)$，

又点 $M(-2, a)$ 在 l_1, l_2 上，所以 $\begin{cases}ay_1=2\left(-2+x_1\right)\\ ay_2=2\left(-2+x_2\right)\end{cases}$，

消去 a 得 $y_1\left(-2+x_2\right)=y_2\left(-2+x_1\right)$，即 $y_1\left(-2+\dfrac{y_2^2}{4}\right)=y_2\left(-2+\dfrac{y_1^2}{4}\right)$，

所以 $\left(y_2-y_1\right)\left(y_1y_2+8\right)=0$，

又 $y_1\neq y_2$，所以 $y_1y_2=-8$，所以 $-4m=-8$，解得 $m=2$，

所以直线 $AB: x=ty+2$，故直线 AB 恒过定点 $(2,0)$

22. 已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性.

（2）若有两个不相等的实数 a, b 满足 $f\left(a\right)=f\left(b\right)$，求证：$a+b<1$.

【答案】(1) $f\left(x\right)$在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上递增，在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$上递减，

(2) 证明见解析

【小问 1 详解】

$f\left(x\right)$的定义域为$(0,+\infty)$，

由$f\left(x\right)=x\ln x$，得$f'\left(x\right)=\ln x+1$，

由$f'\left(x\right)=\ln x+1>0$，得$x>\frac{1}{\mathrm{e}}$，

由$f'\left(x\right)=\ln x+1<0$，得$0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上递增，在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$上递减，

【小问 2 详解】

证明：由（1）得$f\left(x\right)$在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$上的值域为$\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$，在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上的值域为$\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$，

因为$f(1)=0, f(a)=f(b)$，

所以不妨设$0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}<b<1$，则要证$a+b<1$，只要证$b<1-a$，

由$\frac{1}{\mathrm{e}}<b<1-a$，由（1）得$f(x)$在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上递增，

所以只需证$f(b)<f(1-a)$，

因为$f(a)=f(b)$，所以只要证$f(a)<f(1-a)$，

则$a\ln a<(1-a)\ln(1-a)$，

所以$\frac{\ln a}{1-a}<\frac{\ln(1-a)}{a}=\frac{\ln(1-a)}{1-(1-a)}$，

令$F(x)=\frac{\ln x}{1-x}(0<x<1)$，则只需证$F(a)<F(1-a)$，

由于$0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}<\frac{1}{2}$，从而得$0<a<1-a<1$，

所以要证$F(a)<F(1-a)$成立，只需$F(x)=\frac{\ln x}{1-x}$在$(0,1)$单调递增成立即可，

$$F'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-x)+\ln x}{(1-x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-1}{(1-x)^2},$$

令 $G(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1(0<x<1)$，则 $G'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}<0$，

所以 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $G\left(x\right)>G\left(1\right)=0$，

所以 $F'(x)=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-1}{(1-x)^2}>0$，

所以 $F(x)=\frac{\ln x}{1-x}$ 在 $(0,1)$ 单调递增成立，

所以原命题成立.