



数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | x > 1\}$, $N = \{x | -1 < 3x - 1 < 8\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $(0, 1)$ B. $(1, 3)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$
2. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-\frac{1}{2})^n$, 则
 A. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列
 B. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列
 C. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列
 D. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列
3. 已知复数 $z = \frac{10+5i}{2-i}$, 则 $i\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
4. $(2x-y)^5$ 的展开式中, x^2y^3 的系数为
 A. -10 B. 10 C. -40 D. 40
5. 牛皮鼓, 又称堂鼓、喜庆鼓, 多用于江南祠堂内婚嫁迎娶和迎新年等. 牛皮鼓的制作工艺考究, 有数十道工序, 包括处理牛皮、刨制鼓腔、蒙皮、拉皮、钉钉, 每道工序都考验着手艺人的技艺和耐心. 如图所示的牛皮鼓的鼓面直径为 50 cm, 鼓身高度为 60 cm, 用平行于鼓面的平面截牛皮鼓, 所得截面圆的最大直径为 60 cm, 若将该牛皮鼓看成由两个相同的圆台拼接而成, 忽略鼓面与鼓身的厚度, 则该牛皮鼓的体积为
 A. $22750\pi \text{ cm}^3$
 B. $23750\pi \text{ cm}^3$
 C. $45500\pi \text{ cm}^3$
 D. $47500\pi \text{ cm}^3$



6. 若 $a = \log_3 6, b = 2, c = \log_{0.25} 0.125$, 则

A. $a > c > b$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $b > a > c$

7. 设曲线 $y = x^3 - 2x^2 + 1$ 在 $x = k$ 处的切线为 l , 若 l 的倾斜角小于 135° , 则 k 的取值范围是

A. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

B. $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{3}, 1) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$

C. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$

D. $(-\infty, 0] \cup (\frac{1}{3}, 1) \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在 C 上, 且 $PF_1 \perp F_1F_2$, 直线 PF_2 与 C 交于另一点 Q , 与 y 轴交于点 M , 若 $\overrightarrow{MF_2} = 2\overrightarrow{F_2Q}$, 则 C 的离心率为

A. $\frac{3\sqrt{3}}{7}$

B. $\frac{4}{7}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, 则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{4}$ 对称

C. $f(x) + f(-x) = \sqrt{2} \cos x$

D. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{5\pi}{4}, 0)$ 对称

10. 有一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_6 , 其中任何两个数都不相等, 现在删去其中一个数据, 得到一组新数据, 则下列判断正确的是

A. 新数据的极差可能等于原数据的极差

B. 新数据的中位数可能等于原数据的中位数 浙考神墙750

C. 若新数据的平均数等于原数据的平均数, 则新数据的方差大于原数据的方差

D. 若新数据的平均数等于原数据的平均数, 则新数据的 20% 分位数小于原数据的 20% 分位数

11. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = xf(y) + yf(x)$, 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $g(x)$ 满足 $g(x+1) = (x+1)(x^2+2x)$, 则

A. $f(x)$ 不是奇函数

B. $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数

C. $g(x)$ 是奇函数

D. $g(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数

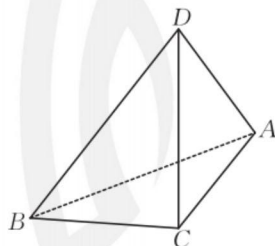
12. 如图, 在三棱锥 $D-ABC$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , $AB = AC = BC = BD = 3, AD = 2$, 则

A. 三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 $\sqrt{6}$

B. 点 C 到直线 AD 的距离为 $\frac{\sqrt{34}}{2}$

C. 二面角 $B-AD-C$ 的正切值为 $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

D. 三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心到平面 ABD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若双曲线的焦距为 6,实轴长为 2,则该双曲线的虚轴长为 $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

14. 在矩形 $ABCD$ 中, O 为对角线的交点, E 为 BC 上一点,且向量 \overrightarrow{AE} 在向量 \overrightarrow{AD} 上的投影向量为 $\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$,则 $\lambda-\mu=\underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

15. 已知圆 M 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 内切,且圆 M 与直线 $x=2$ 相切,则圆 M 的圆心的轨迹方程为 $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

16. 已知 $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$,则当 $\tan 2\theta-\tan \theta$ 取得最大值时, $\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta}=\underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

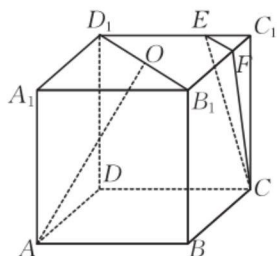
四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为 B_1D_1 的中点, $\overrightarrow{ED_1}=2\overrightarrow{C_1E}$, $\overrightarrow{FB_1}=2\overrightarrow{C_1F}$.

(1)证明: $B_1D_1\parallel$ 平面 CEF .

(2)求直线 AO 与平面 CEF 所成角的正弦值的平方.

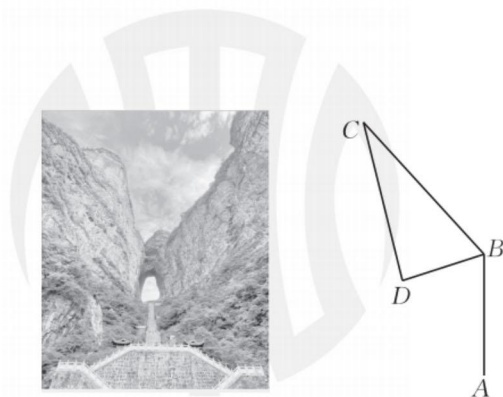


18. (12 分)

天门山,古称嵩梁山,位于湖南省张家界市永定区大庸中路 11 号,属武陵山脉向东进入洞庭湖平原的余脉.为了测量天门山的海拔,某人站在海拔 600 米的点 A 处,他让无人机从点 A 起飞,垂直向上飞行 400 米到达点 B 处,测得天门山的最高点 C 处的仰角为 45° ,他遥控无人机从点 B 处移动到点 D 处(BD 平行于地平面),已知 B 与 D 之间的距离为 518 米,从点 D 处测得天门山的最高点 C 处的仰角为 α ($\tan \alpha=2$).

(1)设平面 β 过 BD 且平行于地平面,点 C 到平面 β 的距离为 h 米,求 BC 与 CD 的长(用 h 表示);

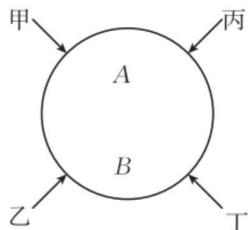
(2)已知 $\cos\angle BCD=\frac{9\sqrt{10}}{40}$,求天门山的海拔.



19. (12分)

艾伦·麦席森·图灵提出的图灵测试,指测试者与被测试者在隔开的情况下,通过一些装置(如键盘)向被测试者随意提问.已知在某一轮图灵测试中有甲、乙、丙、丁4名测试者,每名测试者向一台机器(记为A)和一个人(记为B)各提出一个问题,并根据机器A和人的作答来判断谁是机器,若机器A能让至少一半的测试者产生误判,则机器A通过本轮的图灵测试.假设每名测试者提问相互独立,且甲、乙、丙、丁四人之间的提问互不相同,而每名测试者有60%的可能性会向A和B问同一个题.当同一名测试者提出的两个问题相同时,机器A被误判的可能性为10%,当同一名测试者提的两个问题不不同时,机器A被误判的可能性为35%.

- (1)当回答一名测试者的问题时,求机器A被误判的概率;
 (2)按现有设置程序,求机器A通过本轮图灵测试的概率.



20. (12分)

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 1, S_{n+1} + S_n = (n+1)^2$.

- (1)证明: $a_{n+1} + a_n = 2n + 1$.
 (2)求 $\{a_n\}$ 的通项公式. 浙考神墙750
 (3)若 $b_n = \frac{1-a_n}{2^{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $(2, -2\sqrt{6})$, 直线 $l_1: y = kx + m (km \neq 0)$ 与 C 交于 A, B 两点(异于坐标原点 O).

- (1)若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 证明: 直线 l_1 过定点.
 (2)已知 $k = 2$, 直线 l_2 在直线 l_1 的右侧, $l_1 \parallel l_2$, l_1 与 l_2 之间的距离 $d = \sqrt{5}$, l_2 交 C 于 M, N 两点, 试问是否存在 m , 使得 $|MN| - |AB| = 10$? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \cos ax + \frac{1}{2}x^2 - 1$.

- (1)当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2)若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.

