唐山市 2023－2024 学年度高三年级摸底演练

数学参考答案

一．选择题（单选）：

1~4．CBDA　　5~8．CABC

二．选择题（多选）：

9．BD　　10．AC　　11．AC　　12．ABD

三．填空题：

13．2000　　14．$\sqrt{2}\pi$　　15．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}\pi$　　16．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

四．解答题：

17．解：

（1）由已知得$\begin{cases}a_1b_1=2S_1,\\a_2b_2=2S_2\end{cases}$即$\begin{cases}a_1b_1=2a_1,\\(a_1+d)(b_1+d)=2(2a_1+d)\end{cases}$　…2 分

解得 $b_1=2$，$d=1$，　…4 分

故 $a_n=n$，$b_n=n+1$．　…5 分

（2）由（1）得 $c_n=\dfrac{1}{2n^2+2n+1}$．　…6 分

$\dfrac{1}{2n^2+2n+1}<\dfrac{1}{2n(n+1)}$　…7 分

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，　…8 分

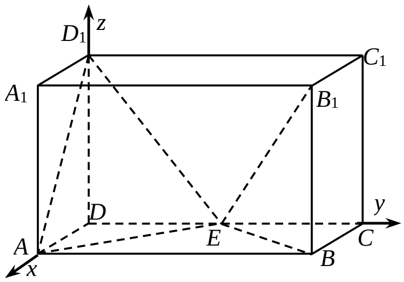
则 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n<\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$　…9 分

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\dfrac{n}{2(n+1)}=\dfrac{a_n}{2b_n}$．　…10 分

18．解：

以 D 为原点，以 DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示空间直角坐标系，设 $D_1(0，0，h)(h>0)$．



（1）依题意得 $A(1，0，0)$，$E(0，1，0)$，

$B(1，2，0)$，$B_1(1，2，h)$，$\overrightarrow{AE}=(-1，1，0)$，

$\overrightarrow{EB}=(1，1，0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0，0，h)$．

因为 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=0$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$，

则 $AE\perp EB$，$AE\perp BB_1$，

EB，BB_1 在平面 AED_1 内，又 $BE\cap BB_1=B$，

则 $AE\perp$平面 BEB_1，

又 $AE\subset$平面 AED_1，则平面 $AED_1\perp$平面 BEB_1．　…5 分

（2）依题意得 $C_1(0，2，h)$，$\overrightarrow{EB_1}=(1，1，h)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0，2，h)$．则

$|\cos\langle\overrightarrow{EB_1}，\overrightarrow{DC_1}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}|}{|\overrightarrow{EB_1}||\overrightarrow{DC_1}|}=\dfrac{2+h^2}{\sqrt{2+h^2}\sqrt{4+h^2}}=\cos 30°$， …7 分

解得 $h=2$． …8 分

依题意得 $\overrightarrow{AD_1}=(-1，0，2)$

设平面 AED_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x，y，z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-x+2z=0，\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=-x+y=0，\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(2，2，1)$； …10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m}，\overrightarrow{EB_1}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EB_1}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{EB_1}|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， …11 分

所以，EB_1 与平面 AED_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． …12 分

19．解：

（1）因为 AD 平分 $\angle BAC$，所以 $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{2}$． …2 分

又因为 D 在 BC 上，所以 $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{BD}{CD}$，

因此，$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{3}{2}$，又 $BC=3$，所以 $CD=\dfrac{6}{5}$． …3 分

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC=3$，$AC=2$，可得 $\cos C=\dfrac{1}{3}$． …4 分

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理可得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\times CD\times\cos C=\dfrac{96}{25}$， …5 分

故 $AD=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$． …6 分

（2）$\angle DAC=\angle BAD=\theta$，又 $\angle ADC=60°$，

所以 $B=60°-\theta$，$C=120°-\theta$， …8 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得，$\dfrac{AB}{\sin(120°-\theta)}=\dfrac{AC}{\sin(60°-\theta)}$， …10 分

解得 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$． …12 分

20．解：

（1）函数 $f(x)$ 定义域为 R，$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$． …2 分

当 $x<0$ 或 $x>\dfrac{4}{3}$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\dfrac{4}{3}$ 时，$f'(x)<0$， …4 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty，0)$，$\left(\dfrac{4}{3}，+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0，\dfrac{4}{3}\right)$ 上单调递减． …5 分

（2） 由 $f(t)=g(s)$得，$t^3-2t^2=32e^s$，

所以 $32e^{s-t}=(t^3-2t^2)e^{-t}$，

因为 $32e^{s-t}>0$，所以 $t^3-2t^2>0$，即 $t>2$．　　　　…7 分

令 $h(t)=(t^3-2t^2)e^{-t}$，$t>2$，则 $h'(t)=t(t-1)(4-t)e^{-t}$.

所以当 $2<t<4$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$单调递增，

当 $t>4$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$单调递减，

因此，当 $t=4$ 时 $h(t)$取得最大值 $h(4)=32e^{-4}$，　　　　…10 分

即 e^{s-t}取得最大值 e^{-4}，

故 $t-s$ 的最小值为 4．　　　　…12 分

21．解：

（1）设 A_n：$X_n=1$，B_n：$X_n=0$，则 $P(A_n)+P(B_n)=1$.

由于第一次取球之前，两个袋子中的两球颜色各不相同，要使取球交换之后同一个袋子内的两球颜色仍然保持不同，需要取出的两球颜色相同，则

$$P(B_1)=\frac{2\times 1}{2\times 2}=\frac{1}{2}.$$　　　　…4 分

（2）当 $n\geqslant 2$ 时，由（1）得 $P(B_n|B_{n-1})=\dfrac{1}{2}$，则 $P(A_n|B_{n-1})=\dfrac{1}{2}$.

很明显，$P(A_n|A_{n-1})=0$，依据全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(A_n)&=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(B_{n-1})P(A_n|B_{n-1})\\&=P(B_{n-1})P(A_n|B_{n-1})=\frac{1}{2}P(B_{n-1})=\frac{1}{2}[1-P(A_{n-1})],\end{aligned}$$

则 $P(A_n)-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}[P(A_{n-1})-\dfrac{1}{3}]$，

由（1）得 $P(A_1)=1-P(B_1)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(A_n)-\dfrac{1}{3}=[P(A_1)-\dfrac{1}{3}](-\dfrac{1}{2})^{n-1}$，

则 $P(A_n)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}(-\dfrac{1}{2})^{n-1}$.　　　　…8 分

（3）由（1）（2）得 X_n 的分布列，如下表所示：

X_n	1	0
P	$P(A_n)$	$P(B_n)$

则 $E(X_n)=1\times P(A_n)+0\times P(B_n)=P(A_n)$，

由 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 得 $E(Y)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

$$=\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1\times[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{n}{3}+\frac{1}{9}[1-(-\frac{1}{2})^n].$$　　　　…12 分

22．解：

（1）由题意得，$\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1$，$a=b$ …2 分

解得 $a^2=b^2=8$，

所以双曲线方程$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$． …4 分

（2）设 $P(x_0，y_0)$，则$\dfrac{x_0^2}{8}-\dfrac{y_0^2}{8}=1\Leftrightarrow y_0^2=x_0^2-8$，

所以，$k_{PA}\times k_{PB}=\dfrac{y_0-1}{x_0-3}\times\dfrac{y_0+1}{x_0+3}=\dfrac{y_0^2-1}{x_0^2-9}=\dfrac{x_0^2-9}{x_0^2-9}=1$， …6 分

设 PA：$y-1=k(x-3)\Leftrightarrow y=kx+1-3k$，$|AM|=\sqrt{1+k^2}\left|3-\dfrac{7}{3}\right|=\dfrac{2}{3}\sqrt{1+k^2}$；

设 PB：$y+1=\dfrac{1}{k}(x+3)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{k}x-1+\dfrac{3}{k}$，$|BN|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{7}{3}+3\right|=\dfrac{16}{3}\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}$；

…8 分

令 $k^2=t>0$，$s=|AM|+|BN|=\dfrac{2}{3}\sqrt{1+t}+\dfrac{16}{3}\sqrt{1+\dfrac{1}{t}}$，

$s'=\dfrac{\sqrt{t}(t\sqrt{t}-8)}{3t^2\sqrt{1+t}}$，则 …10 分

$s'>0\Leftrightarrow t>4$；$s'<0\Leftrightarrow 0<t<4$；

所以 $t=4$，即 $k=\pm2$ 时，$|AM|+|BN|$取最小值为$\dfrac{10\sqrt{5}}{3}$. …12 分