

2023-2024 学年第一学期高三期初学情调研测试

数学试题

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap B$ ()

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{2\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 3\}$

2. 已知命题 $p: -1 < x < 4$, $q: |x-1| < 2$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

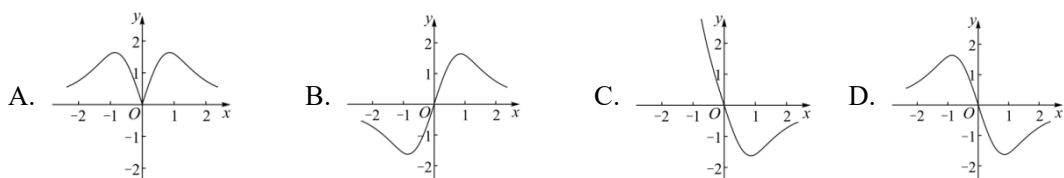
3. 设函数 $f(x) = 2^{x-a}$ 在区间 $(0, 2)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $[4, +\infty)$ B. $[-4, 0)$ C. $(0, 4]$ D. $(-\infty, -4]$

4. 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则一定有 ()

- A. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ B. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ C. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ D. $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

5. 函数 $f(x) = \frac{3^{-x} - 3^x}{x^4 + 1}$ 的部分图象大致为 ()



6. 在成都大学生世界运动会中, 甲、乙、丙参加了游泳、体操、足球三个项目, 每人参加的比赛项目不同. 已知①乙没有参加游泳; ②若甲参加体操, 则丙参加足球; ③若丙没有参加体操, 则甲参加体操. 下列说法正确的为 ()

- A. 丙参加了体操 B. 乙参加了体操
C. 丙参加了足球 D. 甲参加了足球

7. 设函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1$, 若对于任意的 $x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}$, $f(x) < -m + 4$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $m \leq 0$ B. $0 \leq m < \frac{5}{3}$ C. $m < \frac{5}{3}$ D. $0 < m < \frac{5}{3}$

8. 若实数 a, b, c 满足 $6^a = 18^{ac} = 2, b = \frac{2}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

二、多选题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知全集 U ，集合 A, B 是 U 的子集，且 $A \cap B = B$ ，则下列结论中正确的是 ()

- A. $A \cup B = A$ B. $C_U B \subseteq C_U A$ C. $B \cap (C_U A) = \emptyset$ D. $(C_U A) \cup (C_U B) = U$

10. 下列说法正确的是 ()

- A. 函数 $f(x) = x+1$ 与 $g(x) = (\sqrt{x+1})^2$ 是同一个函数
B. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 3]$ ，则函数 $f(3x)$ 的定义域为 $[0, 1]$
C. 已知命题 $p: \forall x > 0, x^2 \geq 0$ ，则命题 p 的否定为 $\exists x > 0, x^2 < 0$
D. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - f(2-x) = 0$ ，则 4 为函数 $f(x)$ 的一个周期

11. 已知 $a > 0, b > 0$ 且 $a + b = \sqrt{2}$ ，则下列式子中正确的是 ()

- A. $a^2 + b^2 \geq 1$ B. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$
C. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{2}$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R ， $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$ ，则 ()

- A. $f(0) = 0$ B. $f(-1) = -1$
C. $f(x)$ 为偶函数 D. 若 $f(2) = \frac{1}{2}$ ，则 $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{32}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13. 已知集合 $A = \{a+1, a^2-1\}$ ，若 $3 \in A$ ，则实数 a 的值是_____。

14. 若关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax - 8a^2 < 0$ ($a > 0$) 的解集为 $\{x | x_1 < x < x_2\}$ ，且 $x_2 - x_1 = 15$ ，则 a 的值是_____。

15. 满足 $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$ 的一个函数解析式是 $f(x) =$ _____。

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x, & x < 0 \\ 2^{-x} - 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $4f^2(x) - 4a \cdot f(x) + a + 3 = 0$ 有 5 个不同的实根，则实数 a 的取值范围是_____。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-3}{x-5} \leq 0 \right\}$ ， $B = \{x | x^2 - 7x + 6 < 0\}$ ， $C = \{x | x > a\}$ ，全集为实数集 R 。

(1) 求 $A \cup B$ ， $(C_R A) \cap B$ ；

(2) 如果 $A \cap C = \emptyset$ ，求实数 a 的取值范围。

18. (12分)

已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + t^2 \neq 0$, 命题 p 为假命题时实数 t 的取值集合为 A .

(1) 求集合 A ;

(2) 设集合 $B = \{t \mid 2m - 3 < t < m + 1\}$, 若 $x \in B$ 是 $x \in A$ 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

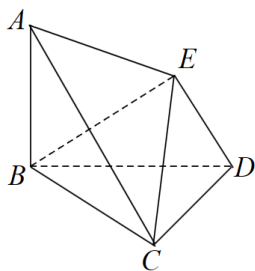
19. (12分)

(1) 当 $x > 1$ 时, 求 $x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值;

(2) 已知 $a > 0, b > 0$ 且 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = 1$, 求 $2a + b$ 的最小值.

20. (12分)

如图, 在多面体 $ABCDE$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , 平面 $ECD \perp$ 平面 BCD , 其中 $\triangle ECD$ 是边长为 2 的正三角形, $\triangle BCD$ 是以 $\angle BDC$ 为直角的等腰三角形.



(1) 证明: $AB \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 若平面 ACE 与平面 BDE 夹角的余弦值为 $\frac{2}{19}\sqrt{19}$, 求线段 AB 的长度.

21. (12分)

一项试验旨在研究臭氧效应, 试验方案如下: 选 20 只小白鼠, 随机地将其中 10 只分配到试验组, 另外 10 只分配到对照组, 试验组的小白鼠饲养在高浓度臭氧环境, 对照组的小白鼠饲养在正常环境, 一段时间后统计每只小白鼠体重的增加量 (单位: g).

(1) 设 X 表示指定的两只小白鼠中分配到对照组的只数, 求 X 的分布列和数学期望;

(2) 试验结果如下:

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

22.5 23.2 25.8 26.5 27.5 30.1 32.6 34.3 34.8 35.6

试验组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

16.5 18.0 18.8 19.2 19.8 20.2 21.6 22.8 23.6 23.9

(i) 求 20 只小白鼠体重的增加量的中位数 m ，再分别统计两样本中小于 m 与不小于 m 的数据的个数，完成如下列联表：

	$< m$	$\geq m$
对照组		
实验组		

(ii) 根据 (i) 中的列联表，能否有 95% 的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异？

附：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

22. (12 分)

根据人教 2019 版必修一 P87 页的 13 题介绍：函数 $f(x)$ 的图象关于点 $P(m, n)$ 成中心对称图形的充要条件是函数

$$y = f(x + m) - n \text{ 为奇函数. 设函数 } f(x) = \log_a \frac{x}{x + 2}, a > 0 \text{ 且 } a \neq 1,$$

(1) 利用上述结论，求函数 $f(x)$ 的对称中心；

(2) 若对于 $\forall x \in [2, 3]$ ，不等式 $f\left[a(4^x + 2^x)\right] + f(1 - 2^x) \leq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.