2023-2024学年度高三年级第一次调研测试

数学试题

总分：150分　　时间：120分钟

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合$A=\{x\mid x>3\},B=\{0,1,2,3,4,5\}$，则$(\complement_R A)\cap B=$（　　）

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$　　C．$\{4,5\}$　　D．$\{3,4,5\}$

2．“$a=1$”是“函数$f(x)=\log_2\dfrac{ax+1}{x-1}$是奇函数”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分又不必要条件

3．已知长方形$ABCD$的边$AB=4$，$AD=2$，E为BC的中点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$（　　）

A．-14　　B．14　　C．-18　　D．18

4．谢尔宾斯基（Sierpinski）三角形是一种分形，它的构造方法如下：取一个实心等边三角形（如图1），沿三边中点的连线，将它分成四个小三角形，挖去中间小三角形（如图2），对剩下的三个小三角形继续以上操作（如图3），按照这样的方法得到的三角形就是谢尔宾斯基三角形．如果图1三角形的边长为2，则图4被挖去的三角形面积之和是（　　）

图1　　图2　　图3　　图4

A．$\dfrac{7\sqrt{3}}{16}$　　B．$\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$　　C．$\dfrac{27\sqrt{3}}{64}$　　D．$\dfrac{37\sqrt{3}}{64}$

5．某个弹簧振子做简谐运动，已知在完成一次全振动的过程中，时间t（单位：s）与位移y（单位：cm）之间满足函数关系：$y=\sin t+\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)$，则这个简谐运动的振幅是（　　）

A．1cm　　B．2cm　　C．$\sqrt{3}$cm　　D．$2\sqrt{3}$cm

6．函数$f(x)=\ln x-ax$与直线$x+y+1=0$相切，则实数a的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．e　　D．2e

7．球M是圆锥SO的内切球，若球M的半径为1，则圆锥SO体积的最小值为（　　）

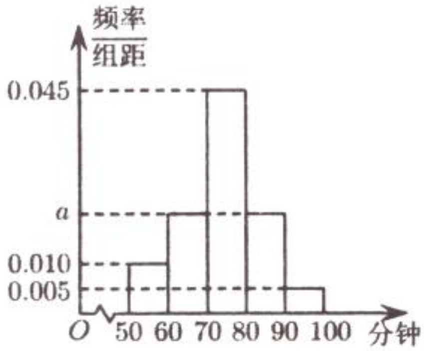
A. $\frac{4}{3}\pi$　　B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$　　C. $\frac{8}{3}\pi$　　D. 4π

8．已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且满足 $f(x)=2-f(6-x)$， $f'(x)=2-f'(4-x)$，$f'(3)=-1$，若 $g(x)=f(3-x)+5$，则 $\sum_{k=1}^{18}g'(k)=$（　　）

A. -18　　B. -20　　C. 88　　D. 90

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．实践育人是落实立德树人根本任务的重要环节，是培养担当民族复兴大任时代新人的有效途径．某研究性学习小组为了解某校 2000 名学生参加 2023 年暑期社会实践的情况，通过分层抽样的方法抽取一个容量为 N 的样本，对学生某一天社会实践的时间（单位：分钟）进行统计，得到样本的频率分布直方图如图所示．已知样本中 $[60,70)$ 的人数为 20 人，则以下说法正确的是（　　）



A. $a=0.020$　　B. $N=100$

C．估计该样本数据的平均数为 74

D．估计全校社会实践时间在 60 分钟以上的学生约为 180 人

10．若 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，曲线 C 的方程为 $x^2\cos\alpha+y^2\sin\alpha=1$，则（　　）

A．当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，曲线 C 表示圆

B．当 $\alpha=0$ 时，曲线 C 表示两条直线

C．当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，曲线 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆

D．当 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，曲线 C 表示焦点在 y 轴上的双曲线

11．设 α，β 是两个不同的平面，m，n 是两条不同的直线，下列命题正确的有（　　）

A．如果 $m/\!/n,m/\!/\alpha,n/\!/\beta$，那么 $\alpha/\!/\beta$　　B．如果 $m/\!/n,m\perp\alpha,n/\!/\beta$，那么 $\alpha\perp\beta$

C．如果 $m\perp n,m\perp\alpha,n\perp\beta$，那么 $\alpha\perp\beta$　　D．如果 $m\perp n,m/\!/\alpha,n\perp\beta$，那么 $\alpha/\!/\beta$

12．设函数 $f(x)=2+x-\mathrm{e}^x$，对于任意给定的实数 K，定义函数 $f_K(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\le K \\ x\mathrm{e}^x-\ln 2, & f(x)>K \end{cases}$，则下列结论正确的有（　　）

A．函数 $y=f_1(x)$ 的零点有 3 个　　　　B．$\exists t\in(0,1)$，使 $f_0(t)=0$

C．若 $\forall x\in\mathbf{R}, f_K(x)=f(x)$，则 $K\ge 1$　　　　D．若 $f_K(x)$ 存在最大值，则 $K\ge \ln 2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13． $\tan 555^\circ$ 的值为__________.

14．在我国长江中下游地区，每年的 6 月中下旬到 7 月中旬为梅雨季节，这段时间阴雨天气较多．这个地区的一个市级监测资料表明，该市一天为阴雨天气的概率是 0.8，连续两天为阴雨天气的概率是 0.72，已知某天为阴雨天气，则随后一天也为阴雨天气的概率是__________.

15．定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)<1$，且 $f(\mathrm{e})=3$，则不等式 $f\left(x^2\right)-2\ln x<2$ 的解集为__________.

16．椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，上顶点为 A，直线 AF_1 与椭圆 C 交于另一点 B，若 $\angle AF_2B=120^\circ$，则椭圆 C 的离心率为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

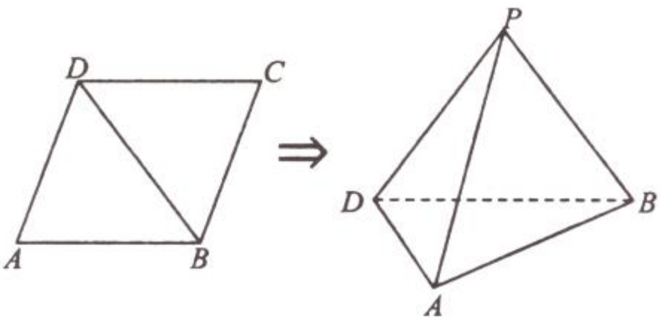
在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，D 为边 BC 上一点，$AD=2$.

（1）若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=2,\angle ADB=\dfrac{\pi}{4}$，求 a；

（2）若 D 为 $\angle BAC$ 的角平分线与边 BC 的交点，$c=2,C=\dfrac{\pi}{4}$，求 a，

18.（本小题满分 12 分）

如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$，将 $\triangle CBD$ 沿 BD 折起到 $\triangle PBD$ 的位置，使 $PA=\sqrt{6}$.



（1）求证：平面 $PBD\perp$ 平面 ABD；

（2）求直线 AB 与平面 PAD 所成角的正弦值.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ax^2-2\ln x$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）求证：当$a>0$时，$f(x)\geq 2-\frac{1}{a}$.

20．（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_5=9, S_7=49$．数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，$b_1=1$，$T_n=b_{n+1}-1$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=\frac{a_n^2}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的最大项.

21．（本小题满分 12 分）

某数学兴趣小组设计了一个开盲盒游戏：在编号为 1 到 4 号的四个箱子中随机放入奖品，每个箱子中放入的奖品个数ξ满足$P(\xi=n)=k\cdot n \quad (n=1,2,3,4,5)$，每个箱子中所放奖品的个数相互独立．游戏规定：当箱子中奖品的个数超过 3 个时，可以从该箱中取走一个奖品，否则从该箱中不取奖品．每个参与游戏的同学依次从 1 到 4 号箱子中取奖品，4 个箱子都取完后该同学结束游戏．甲、乙两人依次参与该游戏.

（1）求甲能从 1 号箱子中取走一个奖品的概率；

（2）设甲游戏结束时取走的奖品个数为 X，求 X 的概率分布与数学期望；

（3）设乙游戏结束时取走的奖品个数为 Y，求 Y 的数学期望.

22．（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2+bx$.

（1）若$a>0,b=0$，函数$g(x)=|f(x)|$有两个极小值点，求实数 a 的取值范围；

（2）若$a<0,b=1,f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=2$，求证：$\frac{4}{a}\leq x_1+x_2\leq 0$.