数学试题答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1．B　2．C　3．A　4．D　5．C　6．B　7．C　8．B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9．ABC　10．AB　11．BC　12．BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$2-\sqrt{3}$　　14．0.9　　15．$(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$　　16．$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（1）$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}BD\cdot AD\cdot\sin\angle ADB+\dfrac{1}{2}DC\cdot AD\cdot\sin\angle ADC$，　　2 分

因为$\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以$\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，

则$S=\dfrac{1}{2}(BD+DC)\cdot AD\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}a\cdot 2\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=2$，所以$a=2\sqrt{2}$．　　4 分

解法二：$\triangle ABC$的高$h=AD\sin\angle ADB=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，　　2 分

所以$S=\dfrac{1}{2}BC\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{2}=2$，则$a=2\sqrt{2}$．　　4 分

（2）因为AD是$\angle BAC$的角平分线，所以$\angle BAD=\angle DAC$，

设$\angle BAD=\angle DAC=\theta$，则$\angle ADB=\angle DAC+\angle C=\theta+\dfrac{\pi}{4}$．

在$\triangle ABD$中，因为$AB=AD=2$，所以$\angle B=\angle ADB=\theta+\dfrac{\pi}{4}$，　　6 分

由内角和定理，$\angle B+\angle ADB+\angle BAD=2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+\theta=3\theta+\dfrac{\pi}{2}=\pi$，所以$\theta=\dfrac{\pi}{6}$．　　8 分

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin\angle BAC}=\dfrac{c}{\sin C}$，则$a=\dfrac{c\sin\angle BAC}{\sin C}=\dfrac{2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{6}$．　　10 分

18．（1）证明：如图，取BD中点O，连接OA，OP．

因为四边形$ABCD$是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$，所以$\triangle ABD$、$\triangle PBD$是边长为 2 的正三角形，

因为O是BD中点，所以$OA\perp BD$，$OP\perp BD$，　　2 分

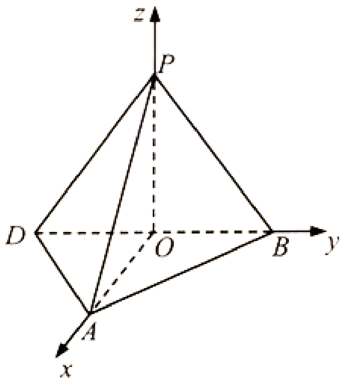
因为$PD=2, OD=\dfrac{1}{2}BD=1$，所以$OP=\sqrt{PD^2-OD^2}=\sqrt{3}$，同理可得$OA=\sqrt{3}$，因为$PA=\sqrt{6}$，

所以$OP^2+OA^2=PA^2$，则$OP\perp OA$，由二面角定义可得平面$PBD\perp$平面ABD．　　5 分

或：又因为$OP\perp BD$，$OA, BD\subset$平面ABD，$OA\cap BD=O$，所以$OP\perp$平面ABD，

因为$OP\subset PBD$，所以平面$PBD\perp$平面ABD．　　5 分

（2）以$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}\}$为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，



则 $O(0,0,0),A(\sqrt{3},0,0),B(0,1,0),D(0,-1,0),P(0,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}),\overrightarrow{DP}=(0,1,\sqrt{3})$， 7 分

设平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AP}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{DP}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(x,y,z)\cdot(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=(x,y,z)\cdot(0,1,\sqrt{3})=y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令 $x=1$ 得 $y=-\sqrt{3},z=1$，则 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},1)$， 10 分

设直线 AB 与平面 PAD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{(1,-\sqrt{3},1)\cdot(-\sqrt{3},1,0)}{\sqrt{1+3+1}\cdot\sqrt{3+1+0}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

所以直线 AB 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. 12 分

注：第二问用等积法、综合法等方法解答同样给分.

19.（1）因为 $f(x)=ax^2-2\ln x$，所以 $f'(x)=2ax-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2\left(ax^2-1\right)}{x},x>0$. 1 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减; 3 分

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增. 6 分

（2）当 $a>0$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)=\ln a+1$，

要证明 $f(x)\ge 2-\frac{1}{a}$，只要证 $\ln a+1\ge 2-\frac{1}{a}$，即证 $\ln a+\frac{1}{a}-1\ge 0$，　　　　　8 分

设 $\varphi(a)=\ln a+\frac{1}{a}-1, a>0$，则 $\varphi'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=\frac{a-1}{a^2}$，令 $\varphi'(a)=0$ 得 $a=1$，列表得

a	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(a)$	$-$	0	$+$
$\varphi(a)$	↘	极小值	↗

所以 $\varphi(a)\ge\varphi(1)=0$，即 $\ln a+\frac{1}{a}-1\ge 0$，所以 $f(x)\ge 2-\frac{1}{a}$.　　　　　12 分

20.（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，　　　　　11 分

则 $\begin{cases}a_5=a_1+4d=9\\ S_7=7a_1+21d=49\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$，所以 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.　　　　　3 分

因为 $T_n=b_{n+1}-1$，当 $n=1$ 时，$b_1=T_1=b_2-1$，则 $b_2=2$，所以 $b_2=2b_1$；　　　　　4 分

当 $n\ge 2$ 时，$b_n=T_n-T_{n-1}=b_{n+1}-1-(b_n-1)=b_{n+1}-b_n$，所以 $b_{n+1}=2b_n$，

则 $\{b_n\}$ 构成首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以 $b_n=2^{n-1}$.

（2）因为 $c_n=\frac{a_n^2}{b_n}=\frac{(2n-1)^2}{2^{n-1}}$，所以 $c_1=1, c_2=\frac{9}{2}, c_3=\frac{25}{4}$，　　　　　7 分

当 $n\ge 3$ 时，$c_{n+1}-c_n=\frac{(2n+1)^2}{2^n}-\frac{(2n-1)^2}{2^{n-1}}=\frac{-4n^2+12n-1}{2^n}$，

因为 $-4n^2+12n-1=-4\left(n-\frac{3}{2}\right)^2+8$ 在 $n\ge 3$ 时单调递减，所以 $-4n^2+12n-1\le -1<0$，

所以，当 $n\ge 3$ 时，$c_{n+1}-c_n<0$，即 $c_n>c_{n+1}$，所以 $c_1<c_2<c_3>c_4>c_5>\cdots$，　　　　　11 分

所以数列 $\{c_n\}$ 的最大项为 $c_3=\frac{25}{4}$.　　　　　12 分

注：第二问解方程组 $\begin{cases}c_n\ge c_{n-1}\\ c_n\ge c_{n+1}\end{cases}$ 得 $n\in\left[\frac{3}{2}+\sqrt{2},\frac{5}{2}+\sqrt{2}\right]$，结合 $n\in\mathbf{N}^*$ 得最大项为 $c_3=\frac{25}{4}$ 同样给分.

21.（1）因为每个箱子中放入的奖品个数 ξ 满足 $P(\xi=n)=k\cdot n\quad(n=1,2,3,4,5)$，

所以 $k\cdot(1+2+3+4+5)=1$，则 $k=\frac{1}{15}$，所以 ξ 的概率分布为：

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

2 分

设事件 A 为甲能从 1 号箱子中取走一个奖品，则 $P(A)=P(\xi>3)=P(\xi=4)+P(\xi=5)=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$，

所以甲能从 1 号箱子中取走一个奖品的概率为 $\frac{3}{5}$ 　　　　　　　　　　　4 分

（2）$X=0,1,2,3,4$，因为甲能从每个箱子中取走一个奖品的概率为 $\frac{3}{5}$，所以 $X\sim B\left(4,\frac{3}{5}\right)$，

所以 $P(X=k)=C_4^k\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{4-k}$，$k=0,1,2,3,4$，$X$ 的概率分布为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

8 分

所以 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{16}{625}+1\times\frac{96}{625}+2\times\frac{216}{625}+3\times\frac{216}{625}+4\times\frac{81}{625}=\frac{12}{5}$.

或 $E(X)=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$. 　　　　　　　　　　　9 分

（3）乙能从箱子中取到奖品必须箱子中最初有 5 个奖品，即乙能从每个箱子中取走一个奖品的概率为 $p=P(\xi=5)=\frac{1}{3}$，所以 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，所以 Y 的数学期望为 $E(Y)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$. 　　　　　12 分

22.（1）因为 $b=0$ 所以 $f(x)=e^x-ax^2,\ f'(x)=e^x-2ax,\ f''(x)=e^x-2a$，令 $f''(x)=0$ 得 $x=\ln 2a$，

则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)\ge f'(\ln 2a)=2a(1-\ln 2a)$.

①当 $1-\ln 2a\ge 0$，即 $0<a\le\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$f'(x)\ge 0,\ f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(0)=1>0,\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}-1<0$，所以 $\exists t\in\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},0\right)$ 使得 $f(t)=0$，

所以 $g(x)=|f(x)|$ 在 $(-\infty,t)$ 上单调递减，在 $(t,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 仅有一个极小值点 $x=t$，不合题意. 　　　　　　　　　2 分

②当 $1-\ln 2a<0$，即 $a>\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$f'(\ln 2a)<0$.

设 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x},x>\mathrm{e}$，则 $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，则 $\varphi(x)<\varphi(1)=\frac{1}{e}$.

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\mathrm{e}}<1$，所以 $x>\ln x$，因为 $2a>\mathrm{e}$，所以 $2a>\ln 2a$，则 $0<\ln 2a<2a$；

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\mathrm{e}}<\frac{1}{2}$，所以 $x>2\ln x=\ln x^2$，则 $\mathrm{e}^x>x^2$，所以 $f'(2a)=\mathrm{e}^{2a}-(2a)^2>0$.

因为 $f'(0)=1>0,\ f'(\ln 2a)<0,\ f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\exists x_1\in(0,\ln 2a),x_2\in(\ln 2a,2a)$，使 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,x_1\right)$ 上单调递增，$\left(x_1,x_2\right)$ 上单调递减，$\left(x_2,+\infty\right)$ 上单调递增. 4 分

因为 $f(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a<0,\ f(0)=1>0, g(x)=|f(x)|$ 有两个极小值点，

所以 $\exists x_3\in(-1,0)$ 为 $g(x)$ 的极小值点，且 $\begin{cases} f\left(x_2\right)=\mathrm{e}^{x_2}-ax_2^2\ge 0 \\ f'\left(x_2\right)=\mathrm{e}^{x_2}-2ax_2=0 \end{cases}$ 时，x_2 为 $g(x)$ 的极小值点，

所以 $2ax_2-ax_2^2=ax_2\left(2-x_2\right)\ge 0$，即 $x_2\le 2$，则 $f(2)=\mathrm{e}^2-4a\ge 0$，所以 $\dfrac{\mathrm{e}}{2}<a\le\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$，

此时，$g(x)$ 在 $\left(-\infty,x_3\right)$ 上单调递减，$\left(x_3,x_1\right)$ 上单调递增，$\left(x_1,x_2\right)$ 上单调递减，$\left(x_2,+\infty\right)$ 上单调递增，

所以，在 $x=x_3$ 及 $x=x_2$ 处取得极小值，实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2},\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}\right]$. 6 分

（2）因为 $b=1$，所以 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2+x, f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}-a\left(x_1^2+x_2^2\right)+x_1+x_2=2, a<0$.

则 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}-a\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]+x_1+x_2=2$，即 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}+2ax_1x_2=a\left(x_1+x_2\right)^2-\left(x_1+x_2\right)+2$，

因为 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}\ge 2\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}, 2ax_1x_2\ge 2a\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2$，则 $a\left(x_1+x_2\right)^2-\left(x_1+x_2\right)+2\ge 2\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}+\dfrac{a}{2}\left(x_1+x_2\right)^2$， 8 分

令 $t=x_1+x_2$，则 $2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}-\dfrac{a}{2}t^2+t-2\le 0$，令 $g(t)=2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}-\dfrac{a}{2}t^2+t-2, a<0$，

则 $g'(t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-at+1, g''(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-a>0$，所以 $g'(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，

因为 $g'\left(\dfrac{2}{a}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1<0, g'(0)=2>0$，所以 $\exists x_0\in\left(\dfrac{2}{a},0\right)$ 使得 $g'\left(x_0\right)=0$，

所以 $g(t)$ 在 $\left(-\infty,x_0\right)$ 单调递减，$\left(x_0,+\infty\right)$ 单调递增， 10 分

又 $g(0)=0, g\left(\dfrac{4}{a}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{2}{a}}-\dfrac{4}{a}-2\ge 2\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{a}}-\dfrac{2}{a}-1\right)>0$，

所以 $\dfrac{4}{a}\le t\le 0$，即 $\dfrac{4}{a}\le x_1+x_2\le 0$. 12 分