

# 江苏省徐州市 2024 届部分学校高三上学期 期初试卷

## 一、单选题

1. 已知集合  $M = \{y | y = x - |x|, x \in \mathbb{R}\}$ ,  $N = \left\{y \left| y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, x \in \mathbb{R}\right.\right\}$ , 则

- A.  $M = N$       B.  $N \subseteq M$       C.  $M = C_{\mathbb{R}}N$       D.  $C_{\mathbb{R}}N \subseteq M$

2. “ $z = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta \cdot i} - \frac{1}{2}$  (其中  $i$  是虚数单位) 是纯虚数”是“ $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ”的 ( ) 条件

- A. 充分不必要      B. 必要不充分      C. 充要      D. 既不充分也不必要

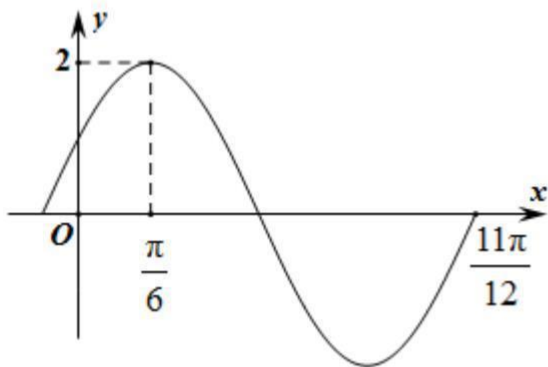
3. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F, G$  分别为  $AA_1, BC, C_1D_1$  的中点, 现有下面三个结论: ①  $\triangle EFG$  为正三角形; ② 异面直线  $AG$  与  $C_1F$  所成角为  $60^\circ$ ; ③  $AC \parallel$  平面  $EFG$ ; ④ 过  $A$  作平面  $\alpha$ , 使得棱  $AD, AA_1, D_1C_1$  在平面  $\alpha$  的正投影的长度相等, 则这样的平面  $\alpha$  有 4 个. 其中所有正确结论的编号是

- A. ②④      B. ②③      C. ①③      D. ①③④

4. 下列向量的线性运算正确的是 ( )

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$       B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$   
C.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$       D.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

5. 函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的部分图象如图所示, 则  $f(\pi) =$  ( )



- A. 1      B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D. 2

6. 设  $f(x)$  是可导函数, 且满足  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1 + \Delta x)}{2\Delta x} = 2$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线斜率为

- A. 4      B. -1      C. 1      D. -4

7. 若不等式  $x^2 + ax + 1 \geq 0$  对于一切  $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  恒成立, 则  $a$  的取值范围为

- A.  $a \geq 0$       B.  $a \geq -2$       C.  $a \geq -\frac{5}{2}$       D.  $a \geq -3$

8. 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(-x) = f(x)$ , 且当  $x \geq 0$  时  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$ , 则  $f(-2)$  的值为 ( )

- A. -3      B. -2      C. 2      D. 3

9. 将函数  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度后得到函数  $g(x)$  的图象, 则下列四个结论:

- ①  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  是  $g(x)$  的一个解析式;
- ②  $g(x)$  是最小正周期为  $\pi$  的奇函数;
- ③  $g(x)$  的单调递减区间为  $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$ ;
- ④ 直线  $x = \frac{7\pi}{12}$  是  $g(x)$  图象的一条对称轴.

其中正确结论的个数为 ( )

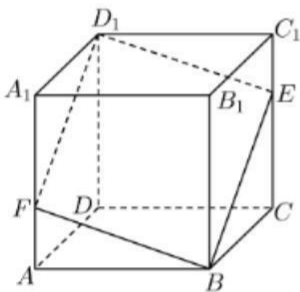
- A. 1            B. 2            C. 3            D. 4

## 二、多选题

10. 已知平面向量  $\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (t, t-3)$ , 则 ( )

- A. 若  $t = 6$ , 则  $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- B. 若  $t > 1$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为锐角
- C. 若  $\vec{c}$  为任意非零向量, 则存在实数  $t$ , 使得  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$
- D. 若  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上的投影向量为  $\frac{3}{5}\vec{b}$ , 则  $t = 2$  或  $t = \frac{7}{2}$

11. 如图所示, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $F$  是棱  $AA_1$  上的一个动点, 平面  $BFD_1$  交棱  $CC_1$  于点  $E$ , 则下列命题中正确的是 ( )



- A. 存在点  $F$ , 使得  $AC_1 \parallel$  平面  $BED_1F$
- B. 存在点  $F$ , 使得  $B_1D \parallel$  平面  $BED_1F$
- C. 对于任意点  $F$ , 四边形  $BED_1F$  均为平行四边形
- D. 对于任意的点  $F$ , 三棱锥  $F - BB_1D_1$  的体积均不变

12. 已知  $f(x)$  是定义域为  $(-\infty, +\infty)$  的奇函数,  $f(x+1)$  是偶函数, 且当  $x \in (0, 1]$  时,  $f(x) = -x(x-2)$ , 则 ( )

- A.  $f(x)$  是周期为 2 的函数
- B.  $f(2019) + f(2020) = -1$
- C.  $f(x)$  的值域为  $[-1, 1]$
- D.  $f(x)$  的图象与曲线  $y = \cos x$  在  $(0, 2\pi)$  上有 4 个交点

## 三、填空题

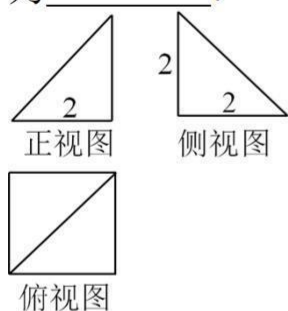
13. 已知钝角  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2}$ ,  $AB = 1, BC = \sqrt{2}$ , 则角  $B =$  \_\_\_\_\_,  $AC =$  \_\_\_\_\_.

14. 若一个等差数列的前 5 项和为 15, 后 5 项和为 145, 且该数列共有 31 项, 则这个等差数列的公差为\_\_\_\_\_.

15. 若不等式  $\left| \frac{1}{x+a} - x^2 \right| + ax \geq 0$  在  $x$  的定义域内恒成立, 则  $a^3$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

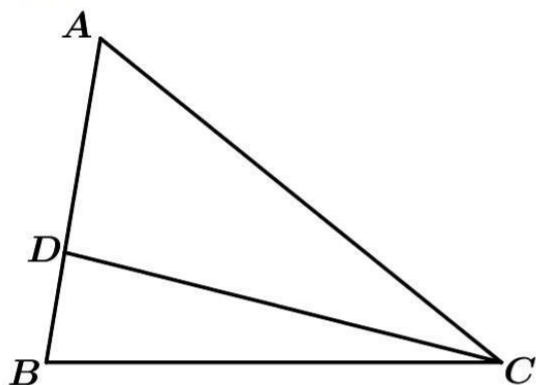
#### 四、双空题

16. 一个几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的体积为\_\_\_\_\_; 表面积为\_\_\_\_\_.



#### 五、解答题

17. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $A = \frac{\pi}{3}$ ,  $AC = 8$ , 点  $D$  在边  $AB$  上,  $AD = \frac{3}{2}BD$ ,  $\triangle ACD$  的面积为  $6\sqrt{3}$ .



- (1) 求  $CD$  的长;
- (2) 求  $\sin \angle BCD$ .

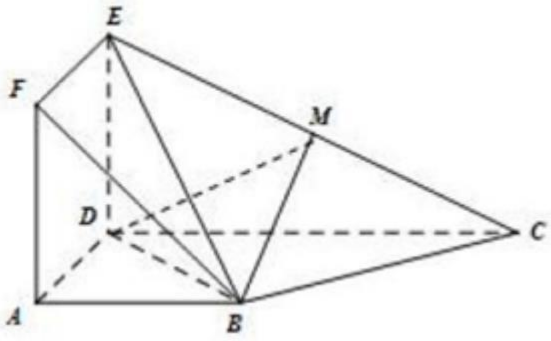
18. 已知函数  $f(x) = e^x - 1$ ,  $g(x) = \frac{3}{e^{|x|}} + 1$ .

- (1) 求函数  $g(x)$  的值域;
- (2) 求满足方程  $f(x) - g(x) = 0$  的  $x$  的值.

19. 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $b = 3$ ,  $\sin A + a \sin B = 2\sqrt{3}$ .

- (1) 求角  $A$  的值;
- (2) 求函数  $f(x) = \cos^2(x - A) - \cos^2 x$  ( $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ) 的值域.

20. 如图, 正方形  $ADEF$  与梯形  $ABCD$  所在的平面互相垂直,  $AD \perp CD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = AD = 2$ ,  $CD = 4$ ,  $M$  为  $CE$  的中点.



- (1) 求证:  $BM \parallel$  平面  $ADEF$  ;  
 (2) 求证: 平面  $BDE \perp$  平面  $BEC$  ;  
 (3) 求平面  $BEC$  与平面  $ADEF$  所成锐二面角的余弦值.

21. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = 2a_n - 2^{n+1}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 令  $b_n = \frac{a_n}{n+1} - \frac{n+1}{a_n}$ , 记数列  $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ . 求证:  $T_n < \frac{4}{3}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

22. 设函数  $f(x) = x - \frac{2}{x} - a\left(\ln x - \frac{1}{x^2}\right)$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;  
 (2) 当  $a > 0$  时, 记  $f(x)$  的最小值为  $g(a)$ , 证明:  $g(a) < 1$ .