试题解析

1．C

由$M=\{y|y=x-|x|,x\in R\},N=\left\{y\left|y=\left(\frac{1}{3}\right)^x,x\in R\right.\right\}$得：$M=(-\infty,0]$，$N=(0,+\infty)$，则$C_RN=(-\infty,0]$，故$M=C_RN$，故选 C.

2．B

首先根据复数代数形式的除法运算化简复数z，再根据复数的类型求出θ的取值，最后根据充分条件、必要条件的定义判断即可.

解：因为$z=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta\cdot \mathrm{i}}-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sin\theta-\cos\theta\cdot \mathrm{i}}{(\sin\theta+\cos\theta\cdot \mathrm{i})(\sin\theta-\cos\theta\cdot \mathrm{i})}-\frac{1}{2}=\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)-\cos\theta\cdot \mathrm{i}$，

若z为纯虚数，则$\begin{cases}\sin\theta-\frac{1}{2}=0\\ \cos\theta\neq 0\end{cases}$，

所以$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in \mathrm{Z})$或$\theta=2k\pi+\frac{5}{6}\pi(k\in \mathrm{Z})$，

所以由“$z=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta\cdot \mathrm{i}}-\frac{1}{2}$（其中$\mathrm{i}$是虚数单位）是纯虚数”推不出“$\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$”，

由“$\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$”推得出“$z=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta\cdot \mathrm{i}}-\frac{1}{2}$（其中$\mathrm{i}$是虚数单位）是纯虚数”，

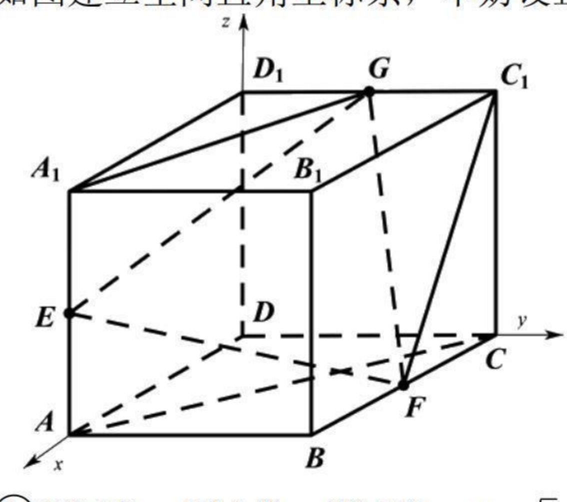
所以“$z=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta\cdot \mathrm{i}}-\frac{1}{2}$（其中是$\mathrm{i}$虚数单位）是纯虚数”是“$\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$”的必要不充分条件.

故选：B

3．D

建立空间直角坐标系，通过空间向量的计算，可以判断①②③是否正确，对于④，把 AD，AA_1，D_1C_1平移到有公共起点 A 的三条棱 AD，AA_1，AB，进而找出 4 个平面符合条件.

如图建立空间直角坐标系，不妨设正方体的边长为 2，



① $E(2,0,1)$，$F(1,2,0)$，$G(0,1,2)$，$EF=\sqrt{6}$，$EG=\sqrt{6}$，$GF=\sqrt{6}$，

所以$\triangle EFG$为正三角形，①正确；

② $A_1(2,0,2)$，$G(0,1,2)$，$C_1(0,2,2)$，$F(1,2,0)$

$\overrightarrow{A_1G}=(-2,1,0)$， $\overrightarrow{C_1F}=(1,0,-2)$， $\cos\left\langle\overrightarrow{A_1G},\overrightarrow{C_1F}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1G}\cdot\overrightarrow{C_1F}}{\left|\overrightarrow{A_1G}\right|\cdot\left|\overrightarrow{C_1F}\right|}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{2}{5}$

异面直线 A_1G 与 C_1F 所成角的余弦值为 $\dfrac{2}{5}$，②不正确；

③ $E(2,0,1)$， $F(1,2,0)$， $G(0,1,2)$，

$\overrightarrow{EF}=(-1,2,-1)$， $\overrightarrow{EG}=(-2,1,1)$

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\vec{m}=-x+2y-z=0\\ \overrightarrow{EG}\cdot\vec{m}=-2x+y+z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=1,z=1$，$\therefore\vec{m}=(1,1,1)$

$A(2,0,0)$， $C(0,2,0)$， $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m}=0$，

$\because AC\not\subset$ 平面 EFG，$\therefore AC//$ 平面 EFG，③正确；

④ $D_1C_1//AB$，且 $D_1C_1=AB$

AD， AA_1， D_1C_1 在平面 α 的正投影的长度相等

$\Leftrightarrow$ AD， AA_1， AB 在平面 α 的正投影的长度相等

分别 BD， A_1D， A_1B 中点为 H，I，J，

则平面 AHI， AHJ， AIJ，和过 A 点平行于平面 A_1BD 的平面，

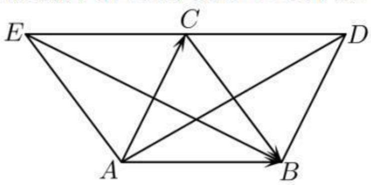
使得棱 AD， AA_1， D_1C_1 在该平面的正投影的长度相等，这样的平面 α 有 4 个，④正确.

故选：D

本题考查了空间中的线线、线面和投影等基本知识，考查了空间想象能力、数学运算求解能力和转化的数学思维，属于中档题目.

4．C

根据向量的线性运算分别判断即可.



如图所示，以 AB， AC 为邻边作平行四边形 $ABDC$，再以 AB， CB 为邻边作平行四边形 $ABCE$，

对于 A，因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BC}$，故 A 选项错误；

对于 B， $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=-\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=-\overrightarrow{BE}\neq\overrightarrow{AC}$，故 B 选项错误；

对于 C， $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，故 C 选项正确；

对于 D， $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$，故 D 选项错误，

故选：C.

5．A

由函数图象可求函数周期，利用周期公式可求 ω，将点 $\left(\dfrac{\pi}{6},2\right)$ 的坐标代入函数解析式，结合 φ 的取值范围可求得 φ 的值，然后代值计算可得出 $f(\pi)$ 的值.

由题意可知，函数 $y=f(x)$ 的周期为 $T=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{11}{12}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\pi$， $\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，

$\because f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$， $2\cdot\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$， $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$，

$\because 0<\varphi<\pi$， $\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$， $\therefore f(\pi)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$，

故选：A.

本题主要考查了由图象求正弦型函数的解析式，考查了三角函数的图象和性质，考查了数形结合思想，属于基础题.

6．D

由已知条件推导得到 f'（1）=-4，由此能求出曲线 y=f（x）在（1，f（1））处切线的斜率.

由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1)-f(1+\Delta x)}{2\Delta x}=2$，

得 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1)-f(1+\Delta x)}{-\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1)-f(1+\Delta x)}{2\Delta x}\cdot(-2)=-4$，

∴曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为-4，

故选：D.

本题考查导数的几何意义及运算，求解问题的关键，在于对所给极限表达式进行变形，利用导数的几何意义求曲线上的点的切线斜率，属于基础题.

7．C

$x^2+ax+1\ge 0$ 对于一切 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 成立，

则等价为 $a\geqslant\frac{-x^2-1}{x}$ 对于一切 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 成立，

即 $a\geqslant -x-\frac{1}{x}$ 对于一切 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 成立，

设 $y=-x-\frac{1}{x}$，则函数在区间 $(0,\frac{1}{2}]$ 上是增函数

$\therefore -x-\frac{1}{x}<-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$，

$\therefore a\geqslant-\frac{5}{2}$.

故选 C.

点睛：函数问题经常会遇见恒成立的问题：

（1）根据参变分离，转化为不含参数的函数的最值问题；

（2）若 $f(x)>0$ 就可讨论参数不同取值下的函数的单调性和极值以及最值，最终转化为 $f(x)_{\min}>0$，若 $f(x)<0$ 恒成立，转化为 $f(x)_{\max}<0$；

（3）若 $f(x)>g(x)$ 恒成立，可转化为 $f(x_{\min})>g(x)_{\max}$.

8．B

根据题意，由函数的解析式计算 $f(2)$ 的值，又由 $f(-2)=f(2)$，即可得答案.

根据题意，当 $x\ge 0$ 时 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, 0\le x<1\\ 2-2^x, x\ge 1\end{cases}$，则 $f(2)=2-2^2=-2$，

又由函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，则 $f(-2)=f(2)=-2$；

故选 B.

本题考查分段函数的解析式以及函数奇偶性的性质以及应用，属于基础题．函数奇

偶性的判断，先要看定义域是否关于原点对称，接着再按照定义域验证$f(x)$和 $f(-x)$的关系.

9．B

根据三角函数的变换规则得到$g(x)$的解析式，再根据余弦函数的性质计算可得.

将函数$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

得到函数$g(x)=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，故①错误；

函数$g(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，但是$g(-x)=-\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故$g(x)$为非奇非偶函数，即②错误；

令$2k\pi\le 2x+\frac{5\pi}{6}\le 2k\pi+\pi$，$k\in Z$，解得$k\pi-\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in Z$，

所以$g(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$，$k\in Z$，故③正确；

因为$g\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\left(2\times\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{3\pi}{2}=1$，所以直线$x=\frac{7\pi}{12}$是$g(x)$图象的一条对称轴，故④正确;

故选：B

10．AD

利用平面向量共线的坐标表示可判断 A 选项；由$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角求出t的取值范围，可判断 B 选项；设$\vec{c}=(x,y)$，根据平面向量数量积的坐标表示可判断 C 选项；利用投影向量的性质可得出$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{5}\vec{b}^2$，结合平面向量数量积的坐标运算可求得$t$的值，可判断 D 选项.

对于 A 选项，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$2(t-3)=t$，解得$t=6$，A 对；

对于 B 选项，若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角，则$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线，

所以，$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=2t+t-3=3t-3>0\\ t\ne 6\end{cases}$，解得$t>1$且$t\ne 6$，B 错；

对于 C 选项，设$\vec{c}=(x,y)$，其中$x^2+y^2>0$，若存在$t\in\mathbf{R}$，使得$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，

则$\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=(2x+y)-[tx+(t-3)y]=(2x+4y)-(x+y)t=0$，

令$x=-y=1$，此时$2x+4y\ne 0$，该方程无解，

若$\vec{c}=(1,-1)$，不存在实数t，使得$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，C 错；

对于 D 选项，若$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{3}{5}\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{5}\vec{b}^2$，

即$2t+t-3=\frac{3}{5}\left[t^2+(t-3)^2\right]$，整理可得$2t^2-11t+14=0$，解得$t=2$或$t=\frac{7}{2}$，D 对.

故选：AD.

11．ACD

对于 A，根据线面平行的判定判断即可；对于 B，可知B_1D与平面BED_1F一定相交，从而可知不正确；对于 C，由面面平行的性质可判断；对于 D，由体积公式可判断.

对于 A，当 F 为AA_1的中点时，则 E 也为CC_1的中点，$\therefore EF // A_1C_1$，$EF\subset$平面BED_1F，$A_1C_1\not\subset$平面BED_1F，$\therefore A_1C_1 //$平面BED_1F，故 A 为真命题；

对于 B，因为$BD_1\subset$平面BED_1F，所以$B_1D //$平面BED_1F不可能，故 B 为假命题；

对于 C，由面面平行的性质，可知$BF//ED_1, BE//FD_1$，因此四边形BED_1F一定为平行四边

形，故 C 是真命题；
对于 D，$\because AA_1 /\!/$ 平面 BB_1D_1，所以点 F 到平面 BB_1D_1 的距离为定值，$\therefore$ 三棱锥 $F-BB_1D_1$ 的体积为定值，故 D 是真命题.
故选：ACD
12．BCD
对于 A，由 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，$f(x+1)$ 为偶函数，得 $f(x)=f(x-4)$，则 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，可判断 A；
对于 B，由 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，则 $f(2020)=f(0)=0$，
$f(2019)=f(-1)=-f(1)=-1$，可判断 B.
对于 C，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=-x(x-2)$，有 $0<f(x)\le 1$，又由 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，则 $x\in[-1,0)$ 时，$-1\le f(x)<0$，可判断 C.
对于 D，构造函数 $g(x)=f(x)-\cos x$，利用导数法求出单调区间，结合零点存在性定理，即可判断 D.
根据题意，
对于 A，$f(x)$ 为 R 上的奇函数，$f(x+1)$ 为偶函数，
所以 $f(x)$ 图象关于 $x=1$ 对称，$f(2+x)=f(-x)=-f(x)$
即 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$
则 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，A 错误；
对于 B，$f(x)$ 定义域为 R 的奇函数，则 $f(0)=0$，
$f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，则 $f(2020)=f(0)=0$；
当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=-x(x-2)$，则 $f(1)=-1\times(1-2)=1$，
则 $f(2019)=f(-1+2020)=f(-1)=-f(1)=-1$，
则 $f(2019)+f(2020)=-1$；故 B 正确.
对于 C，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=-x(x-2)$，此时有 $0<f(x)\le 1$，
又由 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，则 $x\in[-1,0)$ 时，$-1\le f(x)<0$，
$f(0)=0$，函数关于 $x=1$ 对称，所以函数 $f(x)$ 的值域 $[-1,1]$.
故 C 正确.
对于 D，$\because f(0)=0$，且 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=-x(x-2)$，
$\therefore x\in[0,1], f(x)=-x(x-2)$，
$\therefore x\in[1,2], 2-x\in[0,1], f(x)=f(2-x)=-x(x-2)$，
$\therefore x\in[0,2], f(x)=-x(x-2)$，
$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore x\in[-2,0], f(x)=x(x+2)$，
$\because f(x)$ 的周期为 4，$\therefore x\in[2,4], f(x)=(x-2)(x-4)$，
$\therefore x\in[4,6], f(x)=-(x-4)(x-6)$，
$\therefore x\in[6,2\pi], f(x)=(x-6)(x-8)$，
设 $g(x)=f(x)-\cos x$，
当 $x\in[0,2], g(x)=-x^2+2x-\cos x$，
$g'(x)=-2x+2+\sin x$，
设 $h(x)=g'(x), h'(x)=-2+\cos x<0$ 在 $[0,2]$ 恒成立，
$h(x)$ 在 $[0,2]$ 单调递减，即 $g'(x)$ 在 $[0,2]$ 单调递减，

且$g'(1)=\sin 1>0, g'(2)=-2+\sin 2<0$，
存在$x_0\in(1,2), g'(x_0)=0$，
$x\in(0,x_0), g'(x)>0, g(x)$单调递增，
$x\in(x_0,2), g'(x)<0, g(x)$单调递减，
$g(0)=-1, g(1)=1-\cos 1>0, g(x_0)>g(1)>0, g(2)=-\cos 2>0$，
所以$g(x)$在$(0,x_0)$有唯一零点，在$(x_0,2)$没有零点，
即$x\in(0,2]$，$f(x)$的图象与曲线$y=\cos x$有 1 个交点，
当$x\in[2,4]$时，，$g(x)=f(x)-\cos x=x^2-6x+8-\cos x$，
则$g'(x)=2x-6+\sin x$，$h(x)=g'(x)=2x-6+\sin x$，
则$h'(x)=2+\cos x>0$，所以$g'(x)$在$[2,4]$上单调递增，
且$g'(3)=\sin 3>0, g'(2)=-2+\sin 2<0$，
所以存在唯一的$x_1\in[2,3]\subset[2,4]$，使得$g'(x)=0$，
所以$x\in(2,x_1)$，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(2,x_1)$单调递减，
$x\in(x_1,4)$，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(x_1,4)$单调递增，
又$g(3)=-1-\cos 3<0$，所以$g(x_1)<g(3)<0$，
又$g(2)=-\cos 2>0, g(4)=-\cos 4>0$，
所以$g(x)$在$(2,x_1)$上有一个唯一的零点，在$(x_1,4)$上有唯一的零点，
所以当$x\in[2,4]$时，$f(x)$的图象与曲线$y=\cos x$有 2 个交点，，
当$x\in[4,6]$时，同$x\in[0,2]$，$f(x)$的图象与曲线$y=\cos x$有 1 个交点，
当$x\in[6,2\pi], f(x)=(x-6)(x-8)<0, y=\cos x>0$，
$f(x)$的图象与曲线$y=\cos x$没有交点，
所以$f(x)$的图象与曲线$y=\cos x$在$(0,2\pi)$上有 4 个交点，故 D 正确；
故选：BCD.
本题考查抽象函数的奇偶性、周期性、两函数图像的交点，属于较难题.

13．$\frac{3}{4}\pi$，$\sqrt{5}$.

分析：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\sin B\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，若$B=\frac{\pi}{4}$：
$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{1+2-2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$，$\Delta ABC$为等腰直角三角形，
不合题意，舍去；若$B=\frac{3\pi}{4}$：$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{1+2+2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{5}$，
故填：$\frac{3}{4}\pi$，$\sqrt{5}$.
考点：解三角形.

14．1
根据题意，利用等差数列等差中项的性质即可求得a_3和a_{29}，进而求得公差.
设这个等差数列为$\{a_n\}$，则$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3=15$，
$a_{27}+a_{28}+a_{29}+a_{30}+a_{31}=5a_{29}=145$，所以$a_3=3$，$a_{29}=29$，所以公差$d=\frac{29-3}{29-3}=1$.
故答案为：1.

15．$a^3\in\left[0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

讨论$a=0$成立，$a<0$时，$y=\frac{1}{x+a}$与$y=x^2$的图象有一个交点，如图1，不成立，$a>0$时，计算得到$x^3-a^2x-1\le 0$，令$f(x)=x^3-a^2x-1$，根据函数的单调性计算最值得到答案.

当$a=0$时显然成立；

当$a<0$时，不等式化为$\left|\frac{1}{x+a}-x^2\right|\ge -ax$，当$x\le 0$时显然成立，

而当$x>0$时$y=\frac{1}{x+a}$与$y=x^2$的图象有一个交点，如图1，

其横坐标记为t，渐近线$x=-a$在y轴右侧，在交点左侧.

当$x=t$时，$-ax>0$，$\left|\frac{1}{x+a}-x^2\right|=0$，矛盾，故$a<0$不成立.

当$a>0$时，不等式化为$\left|\frac{1}{x+a}-x^2\right|\ge -ax$.当$x\ge 0$时显然成立，

而当$x<0$时，注意到$y=-ax$与$y=x^2$交于点$\left(-a,a^2\right)$.

当$x<-a$时不等式$\left|\frac{1}{x+a}-x^2\right|\ge -ax$显然成立，只需考虑$-a<x<0$时的不等式，

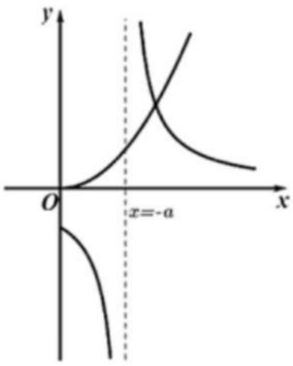
此时$y=x^2$在$y=-ax$图象下方，为保证$-a<x<0$时不等式成立，需如图2所示，$y=\frac{1}{x+a}$必须在$y=-ax$上方，于是去绝对值得$\frac{1}{x+a}-x^2+ax\ge 0$，即$x^3-a^2x-1\le 0$.令$f(x)=x^3-a^2x-1$，$-a<x<0$，$f'(x)=3x^2-a^2$，

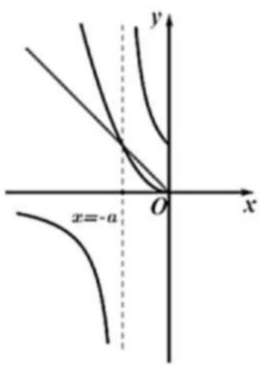
则$f(x)$在$\left(-a,-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$上单增，在$\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},0\right)$上单减，

故$f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\le 0$恒成立，解得$a^3\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

综上，$a^3\in\left[0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$.

故答案为：$a^3\in\left[0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$.





本题考查了不等式恒成立问题，将恒成立问题转化为最值问题是解题关键，意在考查学生的分类讨论的能力，综合应用能力.

16．$\frac{8}{3}$　　$8+4\sqrt{2}$

由三视图得到该几何体为底面边长为2的正方形，一条侧棱垂直于底面的四棱锥，结合几何体的结构特征和表面积与体积公式，即可求解.

由三视图，可得该几何体为底面边长为 2 的正方形，一条侧棱垂直于底面的四棱锥，且四棱锥的高为$h=2$ ，如图所示，

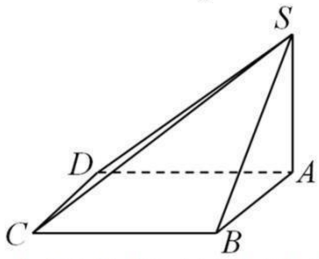
则该几何体的体积为：$\frac{1}{3}\times2\times2\times2=\frac{8}{3}$，

在直角ΔSAB中，可得$SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

同理在直角ΔSAD中，可得$SD=2\sqrt{2}$，

表面积为：$2\times2+2\times\frac{1}{2}\times2\times2+2\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}$.

故答案为：$\frac{8}{3}$，$8+4\sqrt{2}$.



本题考查了几何体的三视图及体积的计算，在由三视图还原为空间几何体的实际形状时，要根据三视图的规则，空间几何体的可见轮廓线在三视图中为实线，不可见轮廓线在三视图中为虚线，求解以三视图为载体的空间几何体的表面积与体积的关键是由三视图确定直观图的形状以及直观图中线面的位置关系和数量关系，利用相应公式求解.

17.（1）7;（2）$\frac{8\sqrt{3}}{49}$.

（1）先由面积求得$AD=3$，再由余弦定理可得CD；

（2）先由AD求得BD，在$\triangle ABC$中用余弦定理求得BC，在$\triangle BCD$中由余弦定理求得$\cos\angle BCD$，进而可得结果.

（1）因为$\triangle ACD$的面积为$6\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}\times AD\times8\times\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$，解得$AD=3$.

在$\triangle ACD$中，由余弦定理得$CD^2=3^2+8^2-2\times3\times8\times\cos\frac{\pi}{3}=49$，所以$CD=7$.

（2）由（1）知$AD=3$，由$AD=\frac{3}{2}BD$得$BD=2$，所以$AB=AD+BD=5$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$BC^2=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos\frac{\pi}{3}=49$，所以$BC=7$.

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得$\cos\angle BCD=\frac{7^2+7^2-2^2}{2\times7\times7}=\frac{47}{49}$，

所以$\sin\angle BCD=\sqrt{1-\left(\frac{47}{49}\right)^2}=\frac{8\sqrt{3}}{49}$.

18.（1）(1，4]；（2）x=ln3.

（1）由指数函数的值域求解函数 g(x)的值域；

（2）由 f(x)﹣g(x)=0，得 ex$-\frac{3}{e^{|x|}}$−2=0，对 x 分类求解得答案.

（1）$g(x)=\frac{3}{e^{|x|}}+1=3\left(\frac{1}{e}\right)^{|x|}+1$，因为|x|≥0，$e^{|x|}\geq1$，所以$0<\left(\frac{1}{e}\right)^{|x|}\leq1$，$0<3\left(\frac{1}{e}\right)^{|x|}\leq3$，即

1<g(x)≤4，

故 g(x)的值域是(1，4].

（2）由 f(x)-g(x)=0，得 $e^x-\frac{3}{e^{|x|}}-2=0$，

当 x≤0 时，方程 $e^x-\frac{3}{e^{|x|}}-2=0$ 化为 $e^x-\frac{3}{e^{-x}}-2=0$，即 $e^x+1=0$，所以方程无解；

当 x>0 时，$e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$，整理得(ex)²-2ex-3=0，(ex+1)(ex-3)=0，

因为 ex>0，所以 ex=3，即 x=ln3.

本题考查指数函数的值域，方程的根的问题，属于中档题.

19．（1）$A=\frac{\pi}{3}$（2）$\left[-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(1)利用正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 代入 $\sin A+a\sin B=2\sqrt{3}$ 即可求得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,再利用锐角三角形求解 A 即可.

(2)利用降幂公式化简 $f(x)=\cos^2(x-A)-\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,再利用 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 代入求值域即可.

(1)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $a\sin B=b\sin A=3\sin A$,

则 $\sin A+a\sin B=4\sin A=2\sqrt{3}$,得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 A 为锐角,故 $A=\frac{\pi}{3}$；

(2) $f(x)=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2 x=\frac{1+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,因

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$,故 $-\frac{\pi}{3}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$,

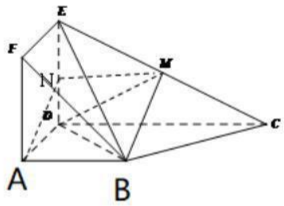
于是 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$,因此 $-\frac{3}{4}\le f(x)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

本题主要考查了正弦定理的运用,同时也考查了三角恒等变换中的降幂公式与根据定义域求三角函数的值域问题等,属于中等题型.

20．（1）证明过程详见解析；（2）证明过程详见解析；（3）$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

分析：本题主要考查中位线、平行四边形的证明、线面平行、线面垂直、面面垂直、二面角等基础知识，考查学生的空间想象能力、逻辑推理能力、计算能力.第一问，作出辅助线 MN，N 为 DE 中点，在 ΔEDC 中，利用中位线得到 $MN//CD$，且 $MN=\frac{1}{2}CD$，结合已知条件，可证出四边形 ABMN 为平行四边形，所以 $BM//AN$，利用线面平行的判定，得 $BM\parallel$ 平面 $ADEF$；第二问，利用面面垂直的性质，判断 $ED\perp$ 面 $ABCD$，再利用已知的边长，可证出 $BC\perp BD$，则利用线面垂直的判定得 $BC\perp$ 平面 BDE，再利用面面垂直的判定得平面 $BCE\perp$ 平面 BDE；第三问，可以利用传统几何法证明二面角的平面角，也可以利用向量法建立空间直角坐标系，求出平面 BEC 和平面 ADEF 的法向量，利用夹角公式计算即可.

（1）证明：取 DE 中点 N，连结 MN,AN.



在$\triangle EDC$中，

M,N分别为EC,ED的中点，所以$MN\parallel CD$，且

$MN=\frac{1}{2}CD$．由已知$AB\parallel CD$，$AB=\frac{1}{2}CD$，所以

$MN\parallel AB$，且$MN=AB$．所以四边形$ABMN$为平行四边形，

所以$BM\parallel AN$．

又因为$AN\subset$平面$ADEF$，且$BM\not\subset$平面$ADEF$，

所以$BM\parallel$平面$ADEF$．

（2）证明：在正方形$ADEF$中，$ED\perp AD$．又因为

平面$ADEF\perp$平面$ABCD$，且平面$ADEF\cap$平面$ABCD=AD$，

所以$ED\perp$平面$ABCD$．所以$ED\perp BC$．

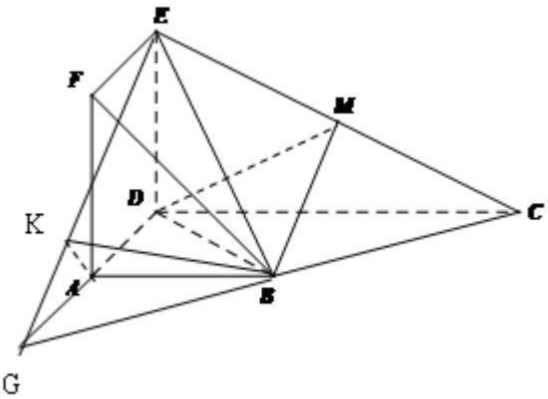
在直角梯形$ABCD$中，$AB=AD=2$，$CD=4$，可得$BC=2\sqrt{2}$．

在$\triangle BCD$中，$BD=BC=2\sqrt{2},CD=4$，所以$BC\perp BD$．

所以$BC\perp$平面BDE．

又因为$BC\subset$平面BCE，所以平面$BDE\perp$平面BEC．

（3）（方法一）延长DA和CB交于G．



在平面$ADEF$内过A作$AK\perp EG$于K,连结BK．由平面$ADEF\perp$平面$ABCD$，

$AB\parallel CD$，$AD\perp CD$，平面$ADEF\cap$平面$ABCD=AD$，

得$AB\perp$平面ADEF，于是$AB\perp$EG．

又$AB\cap$AK$=$A，$EG\perp$平面ABK，所以BK$\perp$EG，

于是$\angle BKA$就是平面BEC与平面$ADEF$所成锐二面角的

平面角.

由$Rt\Delta AKG\sim Rt\Delta EDG,\frac{AK}{DE}=\frac{AG}{GE},ED=AG=2,GE=2\sqrt{5}$，得$AK=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

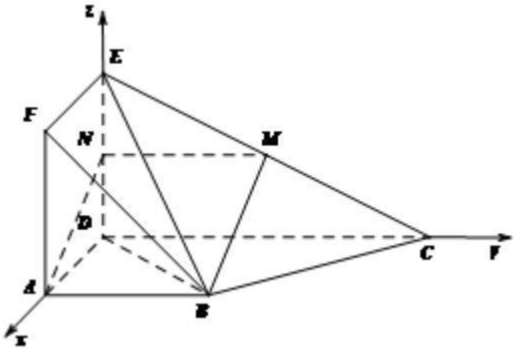
又$AB=2$，于是有$KB=\sqrt{AK^2+AB^2}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

在 $Rt\Delta AKB$ 中， $\cos\angle BKA=\dfrac{AK}{BK}=\dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{30}}{5}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

所以平面 BEC 与平面 $ADEF$ 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

（方法二）由（2）知 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AD\perp CD$.

以 D 为原点， DA,DC,DE 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系.



易得 $B(2,2,0),C(0,4,0),E(0,0,2)$.平面 $ADEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$.设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BEC 的一个法向量，因为 $\overline{BC}=(-2,2,0)$, ， $\overline{CE}=(0,-4,2)$ 所以 $\begin{cases}-2x+2y=0\\-4y+2z=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $y=1,z=2$.

所以 $n=(1,1,2)$ 为平面 BEC 的一个法向量.

设平面 BEC 与平面 $ADEF$ 所成锐二面角为 θ.

则 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{1\cdot\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. 所以平面 BEC 与平面 $ADEF$ 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

考点：中位线、平行四边形的证明、线面平行、线面垂直、面面垂直、二面角.

21.（1） $a_n=(n+1)2^n$， $n\in\mathrm{N}^*$；（2）证明见解析.

（1）由 $S_n=2a_n-2^{n+1}$，推得 $\dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=1$，得出数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$表示首项为 2，公差为 1 的等差数列，进而求得数列的通项公式；

（2）由题意，求得 $b_n=2^n-\dfrac{1}{2^n}$，根据 $2^n-\dfrac{1}{2^n}>2\left(2^{n-1}-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$，得到 $\dfrac{1}{b_n}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{b_{n-1}}(n\geq 2)$，进而证得 $T_n<\dfrac{2}{b_1}=\dfrac{4}{3}$，再由 $n=1$ 时，得到 $T_1<\dfrac{4}{3}$，即可得到结论.

（1）由题意，当 $n=1$ 时，可得 $S_1=2a_1-4$，解得 $a_1=4$，

又由 $S_n=2a_n-2^{n+1}$，

当 $n\geq 2$ 时， $S_{n-1}=2a_{n-1}-2^n$，

两式相减，得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-2^n$， 即 $a_n-2a_{n-1}=2^n$， 可得 $\dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=1$，

又由 $\dfrac{a_1}{2^1}=2$，所以数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$表示首项为 2，公差为 1 的等差数列，

所以 $\dfrac{a_n}{2^n}=2+(n-1)=n+1$， 所以 $a_n=(n+1)2^n,n\in N^*$.

（2）由$b_n=\frac{a_n}{n+1}-\frac{n+1}{a_n}=2^n-\frac{1}{2^n}$，$T_n=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}$.

因为$2^n-\frac{1}{2^n}=2\left(2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)>2\left(2^{n-1}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$，即$b_n>2b_{n-1}$，

所以$\frac{1}{b_n}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b_{n-1}}(n\geq 2)$.

当$n\geq 2$时，$T_n=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}<\frac{1}{b_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_{n-1}}\right)<\frac{1}{b_1}+\frac{1}{2}T_n$，

可得$T_n<\frac{2}{b_1}=\frac{4}{3}$.

当$n=1$时，$T_1=\frac{1}{b_1}=\frac{2}{3}<\frac{4}{3}$.

综上可得，$T_n<\frac{4}{3}$.

数列与函数、不等式综合问题的求解策略：

1、已知数列的条件，解决函数问题，解决此类问题一定要利用数列的通项公式，前n项和公式，求和方法等对于式子化简变形，注意数列与函数的不同，数列只能看作是自变量为正整数的一类函数，在解决问题时要注意这一特殊性；

2、解决数列与不等式的综合问题时，若是证明题中，则要灵活选择不等式的证明方法，如比较法、综合法、分析法、放缩法等，若是含参数的不等式恒成立问题，则可分离参数，转化为研究最值问题来解决.

22．（1）见解析；（2）见解析.

分析：（1）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，对函数$f(x)$求导得$f'(x)=\frac{(x^2+2)(x-a)}{x^3}$，对实数$a$分$a\leq 0,a>0$分两种情况讨论，得出单调性；（2）由（1）知，$f(x)_{\min}=g(a)=a-a\ln a-\frac{1}{a}$，$g'(a)=1-\ln a-1+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}-\ln a$，$g''(a)=-\frac{2}{a^3}-\frac{1}{a}<0$，所以$g'(a)$单调递减，又$g'(1)>0$，$g'(2)<0$，所以存在$a_0\in(1,2)$，使得$g'(a_0)=0$，当$a\in(0,a_0)$时，$g'(a)>0$，$g(a)$单调递增；当$a\in(a_0,+\infty)$时，$g'(a)<0$，$g(a)$单调递减；所以$g(a)_{\max}=g(a_0)$，再证明出$g(a_0)<1$.

解析（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}-a\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)=\frac{x^2+2}{x^2}-a\frac{x^2+2}{x^3}=\frac{(x^2+2)(x-a)}{x^3}$，

当$a\leq 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a>0$时，当$x\in(0,a)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(a,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

综上，当$a\leq 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a>0$时，$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增.

（2）由（1）知，$f(x)_{\min}=f(a)=a-\frac{2}{a}-a\left(\ln a-\frac{1}{a^2}\right)=a-a\ln a-\frac{1}{a}$，

即$g(a)=a-a\ln a-\frac{1}{a}$.

解法一：$g'(a)=1-\ln a-1+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}-\ln a$，$g''(a)=-\frac{2}{a^3}-\frac{1}{a}<0$，

$\therefore g'(a)$单调递减，

又$g'(1)>0$， $g'(2)<0$，所以存在$a_0\in(1,2)$，使得$g'(a_0)=0$，
$\therefore$当$a\in(0,a_0)$时， $g'(a)>0$， $g(a)$单调递增；
当$a\in(a_0,+\infty)$时， $g'(a)<0$， $g(a)$单调递减；
$\therefore g(a)_{\max}=g(a_0)\ =a_0-a_0\ln a_0-\dfrac{1}{a_0}$，又$g'(a_0)=0$，即$\dfrac{1}{{a_0}^2}-\ln a_0=0$， $\ln a_0=\dfrac{1}{{a_0}^2}$，
$\therefore g(a_0)=a_0-a_0\dfrac{1}{{a_0}^2}-\dfrac{1}{a_0}\ =a_0-\dfrac{2}{a_0}$，令$t(a_0)=g(a_0)$，则$t(a_0)$在$(1,2)$上单调递增，
又$a_0\in(1,2)$，所以$t(a_0)<t(2)=2-1=1$， $\therefore g(a)<1$.
解法二：要证$g(a)<1$，即证$a-a\ln a-\dfrac{1}{a}<1$，即证：$1-\ln a-\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{a}$，
令$h(a)=\ln a+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}-1$，则只需证$h(a)=\ln a+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}-1>0$，
$h'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{a^3}\ =\dfrac{a^2-a-2}{a^3}=\dfrac{(a-2)(a+1)}{a^3}$，
当$a\in(0,2)$时， $h'(a)<0$， $h(a)$单调递减；
当$a\in(2,+\infty)$时， $h'(a)>0$， $h(a)$单调递增；
所以$h(a)_{\min}=h(2)\ =\ln2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-1=\ln2-\dfrac{1}{4}>0$，
所以$h(a)>0$，即$g(a)<1$.
点睛：本题主要考查利用导数研究函数的单调性和最值，考查分类讨论思想，解答时要认真审题，仔细作答，注意导数的应用.