2024届高三期初学业质量监测试卷

数学

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合$M=\{1,5\}$， $N=\{3,5\}$，则$M\cup \complement_U N$（　　）

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2,4\}$

C. $\{2,4,5\}$　　D. $\{1,2,4,5\}$

【答案】D

【详解】由题意得：$\complement_U N=\{1,2,4\}$，所以$M\cup \complement_U N=\{1,2,4,5\}$.

故选：D.

2. 设$z=\dfrac{2-4i^3}{1+i}$，则z的共轭复数为（　　）

A. $3-i$　　B. $3+i$

C. $-1-3i$　　D. $-1+3i$

【答案】A

【详解】由题意得，$z=\dfrac{2+4i}{1+i}=\dfrac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{6+2i}{2}=3+i$，

所以$\overline{z}=3-i$.

故选：A

3. 已知$a^x=2$，$a^y=3$，$x+y=1$，则$a=$（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 9

【答案】B

【详解】由于$a^x a^y=a^{x+y}=6$，$\therefore a=6$，

故选：B.

4. 已知声强级（单位：分贝）$L=10\lg\dfrac{I}{I_0}$，其中常数$I_0\left(I_0>0\right)$是能够引起听觉的最弱的声强，I是实际声强.当声强级降低1分贝时，实际声强是原来的（　　）

A. $\dfrac{1}{10}$倍　　B. $10^{\frac{1}{10}}$倍　　C. 10^{-10}倍　　D. $10^{-\frac{1}{10}}$倍

【答案】D

【详解】$L_1-L_2=1$，则$10\lg\frac{I_1}{I_0}-10\lg\frac{I_2}{I_0}=1$，

所以$\frac{I_1}{I_2}=10^{\frac{1}{10}}$，$\therefore I_2=10^{-\frac{1}{10}}I_1$．

故选：D.

5. 为了得到函数$y=3\sin 2x$的图象，只要将函数$y=3\sin(2x-1)$的图象（　　）

A. 向左平移 1 个单位长度

B. 向左平移$\frac{1}{2}$个单位长度

C. 向右平移 1 个单位长度

D. 向右平移$\frac{1}{2}$个单位长度

【答案】B

【详解】解：$\because y=3\sin(2x-1)=3\sin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore$把函数$y=3\sin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$的图形向左平移$\frac{1}{2}$个单位可得到函数$y=3\sin 2x$．

故选：B．

6. 设函数$f(x)=\ln(2ax-x^2)$在区间$(3,4)$上单调递减，则a的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,3)$　　B. $(-\infty,3]$　　C. $(2,3]$　　D. $[2,3]$

【答案】D

【详解】$y=\ln t$在$(0,+\infty)$单调递增，故$t=2ax-x^2$在$(3,4)$单调递减，则$a\le 3$，

又$\because t=2ax-x^2>0$在$(3,4)$恒成立，则$8a-16\ge 0$，故$a\ge 2$，

$\therefore 2\le a\le 3$，

故选：D.

7. 设$a=\sqrt{2}$，$b=\log_2 3$，$c=\log_9 10$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

【答案】C

【详解】$b=\log_2 3>\log_2 2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，$a<\frac{3}{2}$，所以$a<b$，

设$h(x)=\frac{\ln x}{x},x>\mathrm{e},h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，

所以$h(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，

所以$h(9)>h(10),\frac{\ln 9}{9}>\frac{\ln 10}{10},\frac{\ln 10}{\ln 9}<\frac{10}{9}$，$\log_9 10<\frac{10}{9}<\sqrt{2}$，

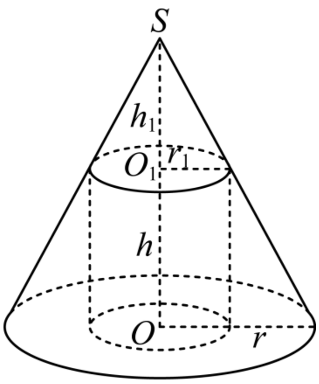
所以$c<a$，所以$b>a>c$.故选：C

8. 已知某圆柱的上、下底面圆周分别在同一圆锥的侧面和底面上，则圆柱与圆锥的体积比的最大值为（　　）

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【详解】如图，设 $SO_1=h_1$，圆柱半径 r_1，圆柱的高为 h，圆锥的半径为 r.



则 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi r_1^2h}{\frac{1}{3}\pi r^2\left(h_1+h\right)}=\frac{3r_1^2h}{r^2\left(h_1+h\right)}=3\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\cdot\frac{h}{h_1+h}=3\left(\frac{h_1}{h_1+h}\right)^2\cdot\frac{h}{h_1+h}=3\frac{\frac{h}{h_1}}{\left(1+\frac{h}{h_1}\right)^3}$，

令 $\frac{h}{h_1}=t\left(t>0\right)$，$\frac{V_1}{V_2}=\frac{3t}{\left(1+t\right)^3}$，令 $f\left(t\right)=\frac{3t}{\left(1+t\right)^3}$，

所以 $f'\left(t\right)=\frac{3\left(1+t\right)^3-9t\left(1+t\right)^2}{\left(1+t\right)^6}=\frac{3+3t-9t}{\left(1+t\right)^4}=0$，

令 $f'\left(t\right)>0\Rightarrow 0<t<\frac{1}{2}$，令 $f'\left(t\right)\langle 0\Rightarrow t\rangle\frac{1}{2}$，

所以 $f\left(t\right)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，$f\left(t\right)_{\max}=\frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=\frac{4}{9}$，

故选：C.

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 若 $a<b<0$，则（　　）

A. $ab^2<a^2b$　　B. $2^a<2^b<1$

C. $\left|a-b\right|<ab$　　D. $\lg a^2>\lg b^2$

【答案】BD

【详解】对于 A，$ab^2-a^2b=ab\left(b-a\right)>0$，$\therefore ab^2>a^2b$，A 错.

对于 B，由 $y=2^x$ 定义域上单调递增得 $2^a<2^b<2^0$，B 对.

对于 C，当 $a=-1$，$b=-\frac{1}{2}$ 时，$|a-b|=\frac{1}{2}$，$ab=\frac{1}{2}$，此时 $|a-b|=ab$，C 错。

对于 D，$a<b<0$，则 $a^2>b^2>0$，$y=\lg x$ 在定义域上单调递增，$\therefore \lg a^2>\lg b^2$，D 对.

故选：BD.

10. 下列区间上，函数 $y=\ln|x|-x+2\sin x$ 有零点的是（　　）

A. $(-2,-1)$　　　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　　　D. $(1,3)$

【答案】ACD

【详解】$x>0$ 时，$f(x)=\ln x-x+2\sin x$，

$f\left(\frac{1}{100}\right)=-\ln 100+\frac{1}{100}+2\sin\frac{1}{100}<-2\ln 10+\frac{1}{100}+2\sin\frac{\pi}{6}=1-2\ln 10+\frac{1}{100}<0$，$f(1)=-1+2\sin 1>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 有零点，C 正确.

$f(3)=\ln 3-3+2\sin 3<\ln 3-3+2\sin\frac{5\pi}{6}=\ln 3-3+1<0$，所以 $f(1)f(3)<0$，

$f(x)$ 在 $(1,3)$ 连续则 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 有零点，D 正确.

$x<0$ 时 $f(x)=\ln(-x)-x+2\sin x$，$x\to 0^-$ 时 $f(x)\to-\infty$，

由于当 $x\in(-1,0)$ 时，

$g(x)=x-2\sin x, y'=1-2\cos x<1-2\cos(-1)=1-2\cos 1<1-2\cos\frac{\pi}{3}=0,$

所以 $g(x)=x-2\sin x$ 在 $x\in(-1,0)$ 单调递减，故 $g(x)=x-2\sin x>g(0)=0$，

而当 $x\in(-1,0)$ 时，$y=\ln|x|<0$，

所以 $y=\ln|x|=g(x)$ 无实数根，故 $f(x)=\ln(-x)-x+2\sin x$ 在 $x\in(-1,0)$ 无零点.B 错误，

$f(-1)=1-2\sin 1<1-2\sin\frac{\pi}{4}=1-\sqrt{2}<0$，$f(-2)=\ln 2+2-2\sin 2>0$，

$\therefore f(-2)f(-1)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 有零点， A 正确，

故选：ACD.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，则 $f(x)$ 为奇函数的必要不充分条件是（　　）

A. $f(0)=0$　　　　B. $y=f(-x)+f(x)$ 为奇函数

C. 存在无数个 x，$f(-x)=-f(x)$　　D. $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 为偶函数

【答案】AC

【详解】$f(0)=0$ 不能得到 $f(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 为奇函数一定有 $f(0)=0$，$\therefore f(0)=0$ 是 $f(x)$ 为奇函数的必要不充分条件，A 对.

$g(x)=f(-x)+f(x)$，$g(-x)=f(x)+f(-x)=g(x)$，$g(x)$ 既是奇函数，又是偶函数，则 $g(x)=0$，

$\therefore f(-x)+f(x)=0$ 则 $f(x)$ 为奇函数，充要条件，B 不选.

有无数个 x，$f(-x)=-f(x)$ 不一定有 $f(x)$ 为奇函数，不充分，$f(x)$ 为奇函数一定有无数个 x，$f(-x)=-f(x)$ 必要，C 选.

$h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 为偶函数，$h(-x)=h(x)$，$\therefore \dfrac{f(-x)}{-x}=\dfrac{f(x)}{x}$，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(x)$ 为奇函数，充分，D 不选.

故选：AC.

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $f(0)=1$

B. $f(x)\geq 0$

C. 若 $f(m+n)>1$，则 $f(m)+f(n)>2$

D. 若对任意的实数 m，$f\left(2^m\right)>1$，则 $f(x)$ 是单调增函数

【答案】BCD

【详解】$x=y=0$ 时，$f(0)=f^2(0)$，$\therefore f(0)=0$ 或 $f(0)=1$，A 错.

取 $x=y=\frac{t}{2}$，$f(t)=f^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\geq 0$，B 对.

$f(m+n)=f(m)f(n)>1$，由 B 知：$f(m)\geq 0, f(n)\geq 0,$ 所以 $f(m)+f(n)\geq 2\sqrt{f(m)f(n)}>2$，C 对.

由 $f\left(2^m\right)>1$ 可知：当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，此时 $f(x)=f(0)f(x)$，$\therefore f(0)=1$，

故对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(-x)f(x)=1$，所以不存在 x，使 $f(x)=0$，故对 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)>0$，

当 $x_1<x_2$ 时，$\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}=f(x_2-x_1)>1$，故 $f(x_2)>f(x_1)$，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，D 对.故选：BCD.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设命题 p ：$\exists x\in \mathrm{R}$ ，$ax^2-x+1\le 0$.写出一个实数 $a=$__________，使得 p 为真命题.

【答案】0 (答案不唯一)

【详解】若 p 正确，$a=0$ 时,$-x+1\le 0$ 有解，

$a\ne 0$ 时,则 $\begin{cases}a>0\\ \Delta\ge 0\end{cases}$ 或 $a<0$，

所以 $a\in\left(0,\frac{1}{4}\right]\cup(-\infty,0)$，

综上，p 真，则 $a\le\frac{1}{4}$，即 $a\le\frac{1}{4}$ 中任取一个值都可以.

故答案为：0 (答案不唯一)

14. 某单位建造一个长方体无盖水池，其容积为 $48\mathrm{m}^3$，深 3m.若池底每平米的造价为 150 元，池壁每平米的造价为 120 元，则最低总造价为__________元.

【答案】8160

【详解】设长 x，宽 y，$\therefore xy\cdot 3=48$，

$\therefore xy=16$，

总造价 $=(6x+6y)\cdot 120+16\times 150=720(x+y)+2400\ge 720\times 2\sqrt{xy}+2400=8160$.

当且仅当 $x=y=4$ 时取得等号.

故答案为：8160

15. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 同时满足下列三个条件：

① $f(x)$ 为奇函数；②当 $0\le x\le 2$ 时，$f(x)=x^3-3x$，③当 $x\ge 0$ 时，$f(x+2)=f(x)+2$.

则函数 $y=f(x)-\ln|x|$ 的零点的个数为__________.

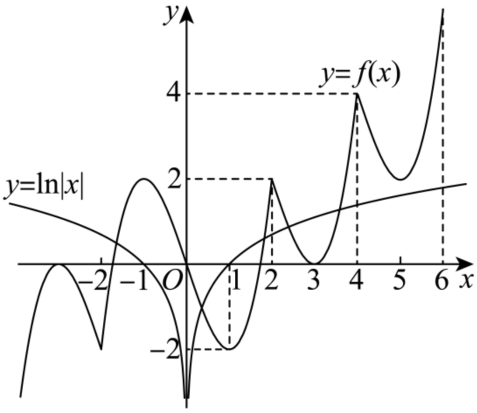
【答案】5

【详解】$0\le x\le 2$，则 $f'(x)=3x^2-3=0$，$x=1$，

$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上为负，$f(x)$ 递减；

$f'(x)$ 在 $(1,2)$ 为正，$f(x)$ 递增，

$f(0)=0$，$f(1)=-2$，$f(2)=2$，作出 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 的图象.



$2\le x\le 4$时，$f\left(x\right)=f\left(x-2\right)+2$，向上平移2个单位；

$4\le x\le 6$时，$f\left(x\right)=f\left(x-2\right)+2$，再向上平移2个单位，$f\left(5\right)=2$，$\ln 5<2$.

纵轴右边图象与左边图形关于原点对称，由图可知

函数$y=f\left(x\right),y=\ln\left|x\right|$的图象在纵轴右边上有4个交点，

在纵轴左边上有1个交点点，

$\therefore y=f\left(x\right)-\ln\left|x\right|$共有5个零点.

故答案为：5.

16. 若函数$f\left(x\right)=\begin{cases}1-ax,x>a\\ \left|x-2a\right|-3,x\le a\end{cases}$，存在最值，则实数$a$的取值范围是__________.

【答案】$[-2,0]$##$\left\{a\middle|-2\le a\le 0\right\}$

【详解】①当$a>0$时，$2a>a$，$f\left(x\right)=\begin{cases}1-ax,x>a\\ 2a-x-3,x\le a\end{cases}$，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,a\right)$上单调递减，

$\left(a,+\infty\right)$上单调递减，此时$f\left(x\right)$无最值；

②当$a=0$时，$f\left(x\right)=\begin{cases}1,x>0\\ -x-3,x\le 0\end{cases}$，则易知$f\left(x\right)$有最小值-3.

③当$a<0$时，$2a<a$，$f\left(x\right)=\begin{cases}1-ax,x>a\\ x-2a-3,2a<x\le a\\ 2a-x-3,x\le 2a\end{cases}$，

$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,2a\right)$上单调递减，$\left(2a,a\right)$上单调递增，$\left(a,+\infty\right)$上单调递增，

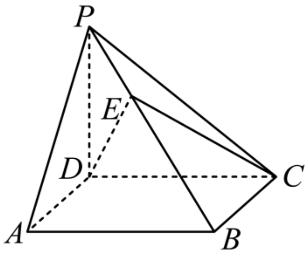
即$f\left(x\right)$有最小值，则$f\left(2a\right)\le 1-a^2$，$\therefore -2\le a<0$，

综上：$-2\le a\le 0$.

故答案为：$\left[-2,0\right]$.

四、解答题：本大题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=AD=3$，点 E 满足 $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EP}$，点 F 为棱 PA 与平面 CDE 的交点.



（1）证明：$AB\,//\,EF$；

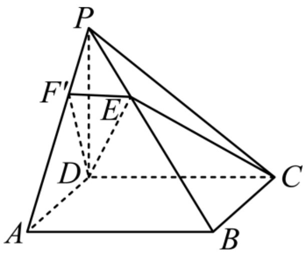
（2）求直线 BF 与平面 CDE 所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$

【小问 1 详解】

过 E 作 $EF'//AB$ 交 PA 于点 F'，连接 DF'，



因为 $ABCD$ 为正方形，所以 $EF'\,//\,CD$，

所以 C,D,E,F' 四点共面，即平面 CDE 延伸至平面 $CDF'E$，

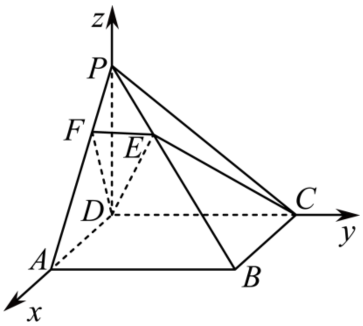
所以 F' 即为棱 PA 与平面 CDE 的交点 F，

所以 $AB\,//\,EF$.

【小问 2 详解】

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $ABCD$ 为正方形，

所以 DA,DC,DP 两两垂直，以 D 为原点建立如图所示坐标系，



所以由题意可知 $B\left(3,3,0\right)$，$C\left(0,3,0\right)$，$D\left(0,0,0\right)$，

因为点 E 满足 $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EP}$ 且 $EF\,//\,AB$，

所以$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FP}$，$F(1,0,2)$，

所以$\overrightarrow{BF}=(-2,-3,2)$，$\overrightarrow{DC}=(0,3,0)$，$\overrightarrow{DF}=(1,0,2)$，

设平面CDE的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}3y=0\\x+2z=0\end{cases}$，令$x=2$可得平面$CDE$的一个法向量为$\vec{n}=(2,0,-1)$，

设BF与平面CDE所成角为θ，

$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BF}||\vec{n}|}=\frac{6}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

18. 记$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$c=2b$.点D在BC上，且AD为$\angle BAC$的平分线，$AD=1$.

（1）若$\angle BAC=60^\circ$，求a；

（2）若$\angle ADB=120^\circ$，求$\triangle ABC$的面积.

【答案】（1）$\frac{3}{2}$

（2）$\frac{3\sqrt{3}}{8}$

【小问1详解】

解：因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，$AD$为$\angle BAC$的平分线，$\angle BAC=60^\circ$，$AD=1$，

则$\frac{1}{2}bc\sin 60^\circ=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin 30^\circ+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin 30^\circ$，即$\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{1}{4}(b+c)$，则$b+c=\sqrt{3}bc$，

所以，$\begin{cases}b+c=\sqrt{3}bc\\c=2b\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=\frac{\sqrt{3}}{2}\\c=\sqrt{3}\end{cases}$，

由余弦定理可得$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ}=\sqrt{\frac{3}{4}+3-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$.

【小问2详解】

解：因为AD为$\angle BAC$的平分线，则$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}=2$，

又因为$BD+CD=a$，则$BD=\frac{2}{3}a$，$CD=\frac{a}{3}$，

因为$\angle ADB=120^\circ$，则$\angle ADC=60^\circ$，

在$\triangle ABD$中，由余弦定理可得$c^2=4b^2=BD^2+AD^2-2AD\cdot BD\cos120^\circ$，

即$\frac{4}{9}a^2+1-2\times\frac{2}{3}a\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9}a^2+\frac{2}{3}a+1=4b^2$，①

在$\triangle ACD$中，由余弦定理可得$b^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos60^\circ$，

即$\frac{a^2}{9}+1-2\times\frac{1}{3}a\times1\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{9}-\frac{a}{3}+1=b^2$，②，联立①②可得$a=\frac{3}{2}$，

因此，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot\frac{2a}{3}\cdot\sin120^\circ+\frac{1}{2}AD\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin60^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{2}\times1=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

19. 如图，一个各项均为正数的数表中，每一行从左至右均是等差数列，每一列从上至下均是等比数列，且公比相等，记第i行第j列的数为$a_{(i,j)}$.

1			…
	6		
		20	
…			

（1）求$a_{(4,4)}$；

（2）记$b_n=a_{(n,n)}$，求数列$\{b_n\}$的前n项的和S_n.

【答案】（1）56　（2）$S_n=(2n-3)\cdot2^n+3$

【小问1详解】

设第一行从左至右公差为$d,d>0$，各侧自上而下公比为$q,q>0$，

$$\therefore\begin{cases}(1+d)q=6\\(1+2d)q^2=20\\d,q>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=2\\q=2\end{cases}，\therefore a_{(4,4)}=(1+3\times2)\cdot2^3=56.$$

【小问2详解】

$b_n=[1+(n-1)d]\cdot q^{n-1}=(2n-1)\cdot2^{n-1}$，

$\therefore S_n=2^0+3\cdot2^1+5\cdot2^2+\cdots+(2n-3)\cdot2^{n-2}+(2n-1)\cdot2^{n-1}$①，

$2S_n=2^1+3\cdot 2^2+\cdots+(2n-5)\cdot 2^{n-2}+(2n-3)\cdot 2^{n-1}+(2n-1)\cdot 2^n$②，

①−②得：$-S_n=1+2^2+2^3+\cdots+2^n-(2n-1)\cdot 2^n$

$=1+\dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot 2^n=(3-2n)\cdot 2^n-3$，

$\therefore S_n=(2n-3)\cdot 2^n+3$.

20. 现有甲、乙两个盒子，甲盒中有 3 个红球和 1 个白球，乙盒中有 2 个红球和 2 个白球，所有的球除颜色外都相同.某人随机选择一个盒子，并从中随机摸出 2 个球观察颜色后放回，此过程为一次试验.重复以上试验，直到某次试验中摸出 2 个红球时，停止试验.

（1）求一次试验中摸出 2 个红球的概率；

（2）在 3 次试验后恰好停止试验的条件下，求累计摸到 2 个红球的概率.

【答案】（1）$\dfrac{1}{3}$

（2）$\dfrac{1}{64}$

【小问 1 详解】

一次试验摸出 2 个红球的概率为 $P=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{C_3^2}{C_4^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{3}$.

【小问 2 详解】

记在 3 次试验后恰好停止试验为事件 A，累计摸到 2 个红球为事件 B，

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，$P(AB)=\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_4^2}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{144}\times\dfrac{1}{3}$，$P(A)=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{3}$，

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{144}\times\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{64}$

21. 在直角坐标系 xOy 中，点 P 到点 $F(\sqrt{3},0)$ 的距离与到直线 l：$x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 的距离之比为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，记动点 P 的轨迹为 W.

（1）求 W 的方程；

（2）过 W 上两点 A，B 作斜率均为 $-\dfrac{1}{2}$ 的两条直线，与 W 的另两个交点分别为 C，D.若直线 AB，CD 的斜率分别为 k_1，k_2，证明：k_1k_2 为定值.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）证明见解析

【小问 1 详解】

设 $P(x,y)$，由题意可知，

$$\frac{\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+y^2}}{\left|x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

所以 W 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

【小问 2 详解】

设 $A(x_0,y_0)$，$C(x_1,y_1)$，

$\therefore AC$ 方程：$y=-\frac{1}{2}(x-x_0)+y_0$ 代入椭圆方程

$\Rightarrow x^2+4\left[\frac{1}{4}\left(x^2-2x_0x+x_0^2\right)+y_0^2-(x-x_0)y_0\right]=4$，

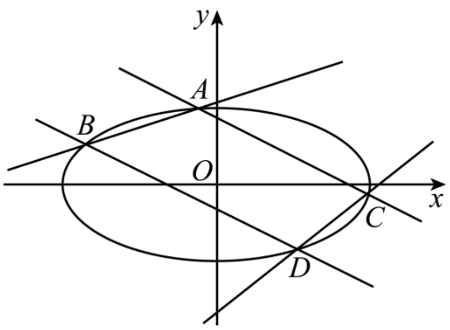
$\therefore 2x^2-(2x_0+4y_0)x+x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4=0$，

$\therefore x^2-(x_0+2y_0)x+2x_0y_0=0$，$\therefore x_1x_0=2x_0y_0$，

$\therefore x_1=2y_0$，$\therefore C\left(2y_0,\frac{x_0}{2}\right)$

同理设 $B(x_0',y_0')$，$D(x_2,y_2)$，$\therefore D\left(2y_0',\frac{x_0'}{2}\right)$，

$\therefore k_1k_2=k_{AB}\cdot k_{CD}=\frac{y_0'-y_0}{x_0'-x_0}\cdot\frac{\frac{x_0'}{2}-\frac{x_0}{2}}{2y_0'-2y_0}=\frac{1}{4}$ 为定值.



22. 已知函数 $f(x)=a^x-\ln x-2(a>0,a\neq 1)$.

（1）若 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -1，求 a；

（2）若 $f(x)$ 不是单调函数，证明：$a>1$，且 $f(x)>\ln(\ln a)$.

【答案】（1）$a=\mathrm{e}$　　（2）证明见解析

【小问 1 详解】

$f'(x)=a^{x}\ln a-\frac{1}{x}$，切点$(1,a-2)$，$k=f'(1)=a\ln a-1$

切线方程$y=(a\ln a-1)(x-1)+a-2$，令$x=0\Rightarrow -a\ln a+1+a-2=-1$

$a\ln a-a=0$，由于$a>0$且$a\neq 1$，所以$a=\mathrm{e}$.

【小问 2 详解】

$f'(x)=a^{x}\ln a-\frac{1}{x}(x>0)$，

若$0<a<1$，则$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，这与条件矛盾，舍去.

所以$a>1$，且$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

若$0<x<1$，则$f'(x)<a\ln a-\frac{1}{x}$，令$a\ln a-\frac{1}{x}<0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{a\ln a}$，

取$x=\frac{1}{1+a\ln a}$，则$f'\left(\frac{1}{1+a\ln a}\right)<0$，

若$x>1$，则$f'(x)>a\ln a-\frac{1}{x}$，令$a\ln a-\frac{1}{x}>0\Rightarrow x>\frac{1}{a\ln a}$，

取$x=\frac{1}{a\ln a}+1$，则$f'\left(\frac{1}{a\ln a}+1\right)>0$

所以存在唯一的$x_0\in\left(\frac{1}{1+a\ln a},\frac{1}{a\ln a}+1\right)$使$f'(x_0)=0$，

$a^{x_0}\ln a-\frac{1}{x_0}=0\Rightarrow x_0\ln a+\ln(\ln a)=-\ln x_0$

且当$0<x<x_0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x>x_0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以$f(x)\geq f(x_0)=a^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0\ln a}+x_0\ln a+\ln(\ln a)-2$

$>2\sqrt{\frac{1}{x_0\ln a}\cdot x_0\ln a}+\ln(\ln a)-2=\ln(\ln a)$，

（$\frac{1}{x_0\ln a}=x_0\ln a,x_0\ln a=1,\ln a=\frac{1}{x_0}=a^{x_0}\ln a,a^{x_0}=1,x_0=0$不符合，基本不等式等号不成立）